



Univerzitet u Novom Sadu
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
DEPARTMAN ZA PROIZVODNO MAŠINSTVO
Novi Sad, Srbija



**32. SAVETOVANJE PROIZVODNOG
MAŠINSTVA SRBIJE SA
MEĐUNARODNIM UČEŠĆEM**

**32. CONFERENCE ON PRODUCTION
ENGINEERING OF SERBIA WITH
FOREIGN PARTICIPANTS**



**ZBORNIK RADOVA
PROCEEDINGS**

Novi Sad, 18.-20. septembar 2008.

Ivanović, L., Devedžić, G.

MODELIRANJE TROHOIDNOG OZUBLJENJA SA ASPEKTA RAVNOMERNOG HABANJA BOKOVA ZUBACA

Rezime: U radu je prezentovan teorijski model ozubljenja sa modifikovanim trohoidnim profilom, koji se primenjuje kod gerotorskih pumpi. Gerotorske pumpe pripadaju grupi planetarnih rotacionih mašina čija je kinematika zasnovana na principu planetarnog mehanizma sa unutrašnjim ozubljenjem. Prikazana je detaljna analiza specifičnog klizanja u tačkama dodira spregnutih profila na bazi razvijenih geometrijskih i kinematskih modela trohoidnog ozubljenja, kao i izrazi za njegovo određivanje. Specifično klizanje je jedan od značajnih faktora ograničenja pri izboru geometrijskih parametara profila ozubljenja i pokazatelj je uslova za pojavu trenja i habanja površina zubaca u kontaktu. Cilj optimalnog izvođenja konstrukcije gerotorske pumpe je da se odgovarajućim izborom geometrijskih parametara ozubljenja ostvari ravnomerno habanje zubaca spregnutih zupčanika u procesu sprezanja. Stoga je neophodno da se obezbedi jednakost specifičnih klizanja u tačkama sa najvećom brzinom klizanja, odnosno u tačkama koje su najudaljenije od trenutnog pola relativnih brzina. U tom smislu, u radu su definisana ograničenja kojima se obezbeđuje ravnomernost habanja bokova zubaca spregnutih zupčanika sa aspektom kinematike.

Ključne reči: trohoidalno ozubljenje, specifično klizanje, ravnomerno habanje

MODELING OF TROCHOIDAL GEARING FROM THE ASPECT OF UNIFORM TEETH WEAR

Abstract: The paper presents theoretical model of the gearing with modified trochoidal profile which is applied to the gerotor pumps. Gerotor pumps belong to the category of rotating machines whose kinematics is based on the principles of planetary mechanism with internal gearing. Using geometrical and kinematical models of the trochoidal gearing, we provide detailed analysis of specific sliding at the contact points of the profiles, as well as the relations for its determination. Specific sliding is one of the most significant constraining factors in the selection of the geometrical parameters of the gearing profile, which indicates conditions for appearing friction and wear of the tooth contact surface. The key objective in optimal gerotor pump design is to provide appropriate selection of geometrical parameters of the gearing, leading to the uniform wear of meshing gears teeth profiles. This requires ensuring the uniform wear of meshing profiles at the point with highest value of sliding velocity, i.e. at the contact points the most distant from the pitch point. Consequently, the methodology described in the paper defines the constraints to enable for uniform wear of meshing gears teeth profiles from the kinematical point of view.

Key words: trochoidal gearing, specific sliding, uniform wear

1. UVOD

Gerotorske pumpe pripadaju grupi planetarnih rotacionih mašina, čija je kinematika zasnovana na principu planetarnog mehanizma sa unutrašnjim ozubljenjem. Broj zubaca spoljašnjeg zupčanika je uvek za jedan veći od broja zubaca unutrašnjeg zupčanika. Kod ove vrste ozubljenja, pokretni krug se kotrlja bez klizanja po drugom nepokretnom krugu i pri tome, izabrana tačka opisuje profil zupca, odnosno trohoidu [1, 5]. Nepokretni krug je, uslovno uzeto, kinematski krug zupčanika. Spregnuti profil se može predstaviti kao obvojnica uzastopnih položaja osnovnog profila pri njegovom relativnom kretanju. U opštem slučaju spregнута обвоjnica ima vrhove, koji su nepoželjna pojava zato što dovode do intenzivnog habanja, a da bi se izbegla njihova pojava uvodi se modifikacija osnovne trohoide. Trohoidne krive se modifikuju uz pomoć priraštaja konstantne vrednosti r_c , koji se nanosi duž normale date krive. Dobijena kriva je ekvidistanta, a konstantni priraštaj r_c se može definisati kao poluprečnik ekvidistante.

Na bazi geometrijskih i kinematskih modela, koji su razvijeni u radovima [2-9], u ovom radu biće definisane formule za proračun specifičnog klizanja i definisani uslovi kojima se obezbeđuje jednakost specifičnih klizanja u tačkama sa najvećom brzinom klizanja. U tom cilju uvođe se sledeći koordinatni sistemi: generišući koordinatni sistem, vezan za generišuću tačku, koordinatni sistem trohoide,

koordinatni sistem obvojnice i nepokretni koordinatni sistem. Za kinematsku analizu spregnutih profila razmatra se kretanje tačke dodira spregnutih profila.

2. GEOMETRIJSKI I KINEMATSKI ODNOSI TROHOIDNOG OZUBLJENJA

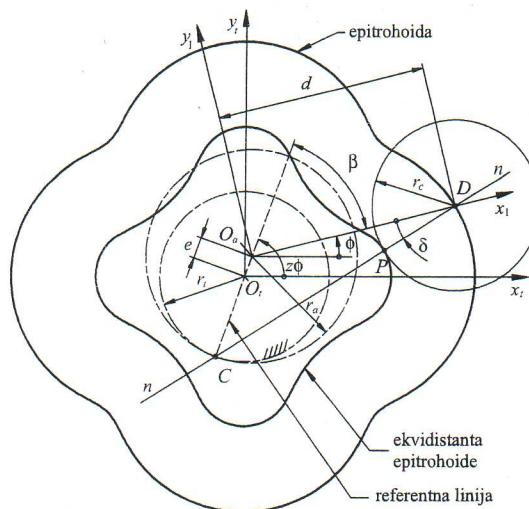
Osnovni geometrijski odnosi pri generisanju nemodifikovane i modifikovane epitrohoide su prikazani na slici 1. Epitrohoide opisuje tačka D fiksirana u ravni kruga poluprečnika r_a kada se krug svojom unutrašnjom stranom kotrlja po spoljašnjoj strani nepokretnog kruga poluprečnika r_t . Jednačine ekvidistante epitrohoide se izvode u koordinatnom sistemu trohoide $O_t x_t y_t$, prema slici 1.

Na slici 1 je pokazano da u toku relativnog kretanja kinematskih krugova, dok tačka D generiše epitrohoide, tačka P generiše ekvidistantu. Ugao označen sa δ predstavlja ugao između normale $n-n$ i radijusa vektora tačke D , a može se definisati kao ugao zahvata. Koordinate tačke dodira P u koordinatnom sistemu epitrohoide mogu se napisati kao:

$$\begin{aligned} x_t &= e(\cos z\phi + \lambda z \cos \phi) - r_c \cos(\phi + \delta) \\ y_t &= e(\sin z\phi + \lambda z \sin \phi) - r_c \sin(\phi + \delta) \end{aligned} \quad (1)$$

gde je λ koeficijent trohoide kojim se definiše odnos između

veličina poluprečnika trohoide i poluprečnika pokretnog kruga $\lambda = d/ez$.

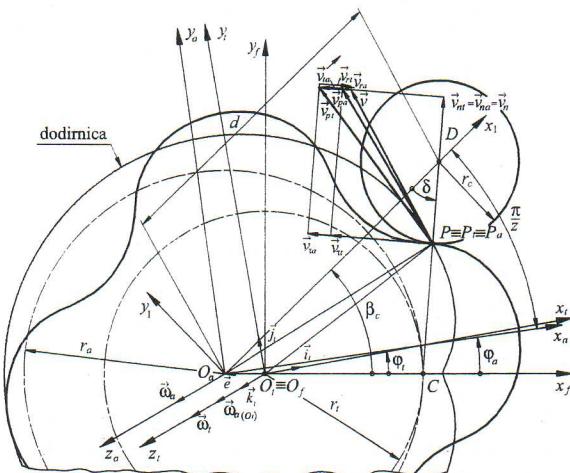


Slika 1. Generisanje nemodifikovane i modifikovane epitrohoide

Na osnovu geometrijskih odnosa sa slike 1 može se dobiti izraz za određivanje ugla δ :

$$\delta = \arctan \frac{\sin(z-1)\phi}{\lambda + \cos(z-1)\phi}. \quad (2)$$

Za kinematsku analizu spregnutih profila razmatra se kretanje tačke P_t na profilu unutrašnjeg zupčanika i tačke P_a na profilu spoljašnjeg zupčanika (slika 2).



Slika 2. Kinematski parametri trohoidnog zupčastog para

U toku sprezanja profili trohoidnog ozubljenja se istovremeno kotrljaju i klizaju, jedan u odnosu na drugi. Klizanje profila u tački dodira je posledica razlike u intenzitetu relativnih brzina tačaka na profilima unutrašnjeg, odnosno spoljašnjeg zupčanika.

Iz teorije ozubljenja je poznato da jedino centroide mogu da ostvare kotrljanje bez klizanja. Na osnovu toga proizilazi da je klizanje profila neizbežno pošto su oni obrazovani krivama koje se razlikuju od centroide. U tom slučaju, brzina klizanja spregnutih profila u posmatranoj tački dodira je brzina tačke dodira pri relativnom kretanju profila.

Na slici 2 dat je raspored brzina u tački dodira dva spregnuta profila gde su [2, 5]: \vec{v} je vektor apsolutne brzine

sregnutih profila u tački dodira; \vec{v}_{pt} , \vec{v}_{pa} su vektori prenosnih brzina tačke dodira P_t , P_a ; \vec{v}_{nt} (\vec{v}_{na}) su projekcije prenosne brzine na zajedničku normalu i \vec{v}_{ta} (\vec{v}_{ta}) su projekcije prenosne brzine na tangentu u tački dodira; \vec{v}_{rt} , \vec{v}_{ra} su vektori relativnih brzina tačke dodira P_t , P_a ; $\omega_r = \omega_t - \omega_a$ je ugaona brzina epitrohoide u odnosu na obvojnici; \vec{v}_{ta} je vektor brzine klizanja profila unutrašnjeg u odnosu na spoljašnji zupčanik; \vec{v}_{at} je vektor brzine klizanja profila spoljašnjeg u odnosu na unutrašnji zupčanik.

Intenzitet vektora relativne brzina u tački dodira P_t je:

$$v_{rt} = \left\{ ez \left(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \beta \right)^{\frac{1}{2}} - r_c (1 + \delta') \right\} \omega_r, \quad (3)$$

a u tački P_a jednak je:

$$v_{ra} = r_c \delta' \omega_r. \quad (4)$$

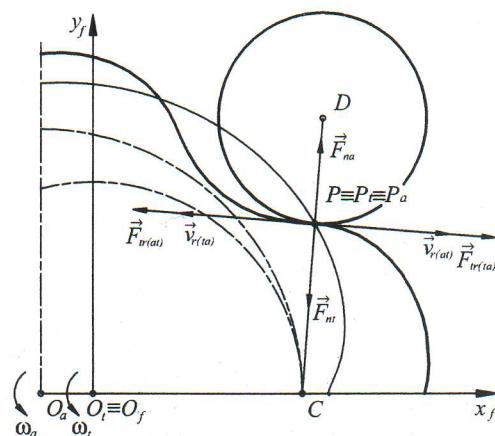
Intenzitet brzine klizanja profila u tački dodira je:

$$v_{kl} = |\vec{v}_{ta}| = \left\{ ez \left(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \beta \right)^{\frac{1}{2}} - r_c \right\} \omega_r. \quad (5)$$

Na osnovu izvedenih jednačina mogu da se definisu izrazi za određivanje specifičnog klizanja spregnutih profila u tački dodira.

3. SPECIFIČNO KLIZANJE PROFILA

Prisustvo klizanja u procesu sprezanja profila dovodi do njihovog habanja, pri čemu brzine klizanja definišu smer i intenzitet sile trenja koje deluju na profilima spregnutih zupčanika. Sila trenja je usmerena suprotno od relativne brzine kretanja u tački dodira. Tako se smer brzine klizanja \vec{v}_{ta} poklapa sa smerom sile trenja koja deluje na profilu spoljašnjeg zupčanika, a smer \vec{v}_{at} sa smerom sile trenja na trohoidnom profilu (slika 3).



Slika 3. Brzine klizanja, sile trenja i normalne sile u tački dodira spregnutih profila

Za analizu klizanja spregnutih profila potrebno je poznavati osim brzine klizanja u tački dodira i tok njene promene u odnosu na odgovarajuću relativnu brzinu tačke dodira. Odnos brzine klizanja i relativne brzine tačke dodira spregnutih profila predstavlja specifično klizanje [8]. Posle zamene odgovarajućih izraza za brzine dobija se

konačni izraz za specifično klizanje na profilu zupca unutrašnjeg zupčanika:

$$\xi_r = \frac{z(1+\lambda^2 + 2\lambda \cos \beta)^{\frac{1}{2}} - c}{z(1+\lambda^2 + 2\lambda \cos \beta)^{\frac{1}{2}} - c(1+\delta')} \quad (6)$$

i analogno, za spoljašnji zupčanik

$$\xi_a = \frac{z(1+\lambda^2 + 2\lambda \cos \beta)^{\frac{1}{2}} - c}{c\delta'} \quad (7)$$

Na delu profila, gde se smerovi brzine klizanja i relativne brzine poklapaju, specifično klizanje ima pozitivnu vrednost, a gde se ne poklapaju – negativnu.

Na osnovu izraza (6) i (7) može se zaključiti da vrednosti specifičnih klizanja postaju beskonačno velike kada su vrednosti relativnih brzina jednake nuli. Te tačke su singularne za raspodelu specifičnog klizanja spregnutih profila. Najpre se analiziraju uslovi pri kojim $\xi_r \rightarrow \infty$, odnosno, kada je $v_{rt} = 0$. Polazeći od izraza (6) i njegovim izjednačavanjem sa nulom dobija se:

$$c = \frac{z(1+\lambda^2 + 2\lambda \cos \beta)^{\frac{3}{2}}}{z + \lambda^2 + \lambda(z+1)\cos \beta} \quad (8)$$

Dobijeni izrazi ukazuju na to da ξ_r nije definisano kada je vrednost poluprečnika ekvidistante jednaka poluprečniku krivine osnovne epitrohoide. Kako se vrednost poluprečnika ekvidistante bira tako da bude manja od minimalne vrednosti poluprečnika krivine epitrohoide, to znači da je pojava singulariteta za ξ_r isključena. Međutim, da bi se izbegle ekstremno velike vrednosti specifičnog klizanja preporučuje se izbor vrednosti poluprečnika ekvidistante znatno manjih od graničnih.

Na profilu spoljašnjeg zupčanika postoji tačka sa beskonačno velikim specifičnim klizanjem. Položaj te singularne tačke je definisan kritičnim uglom β_0 , pri kojem se zajednička normala spregnutih profila u tački dodira poklapa sa tangentom na kinematske krugove [2]. U toj tački dolazi do promene znaka relativne brzine $v_{ra} = 0$, a prema tome i na osnovu izraza (4) i (2) može da se odredi kritična vrednost referentnog ugla, odnosno:

$$\beta_0 = \arccos\left(-\frac{1}{\lambda}\right), \quad (9)$$

što odgovara poslednjoj tački aktivnog dela profila spregnute obvojnici.

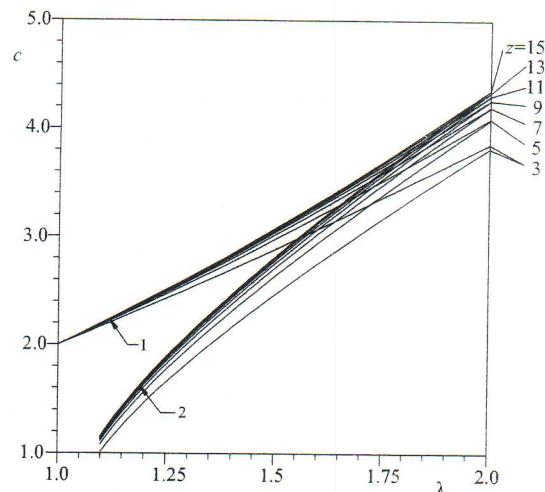
4. DEFINISANJE USLOVA ZA RAVNOMERNO HABANJE ZUBACA

Jedan od glavnih pokazatelja uticaja geometrijskih i kinematskih parametara na veličinu klizanja i intenzitet habanja profila zubaca je specifičnog klizanja profila [8]. Cilj optimalnog izvođenja konstrukcije gerotorske pumpe je da se odgovarajućim izborom geometrijskih parametara ozubljenja ostvari ravnomerne habanje zubaca spregnutih zupčanika u procesu spremanja. Stoga je neophodno da se obezbedi jednakost specifičnih klizanja u tačkama sa najvećom brzinom klizanja, odnosno u tačkama koje su najudaljenije od trenutnog pola relativnih brzina. Polazeći od izraza (6) i (7) proizlazi da se za date vrednosti broja zubaca z i koeficijenta trohoide λ ravnomerne habanje profila zubaca može ostvariti

kada je ispunjen uslov o jednakosti relativnih brzina, odnosno kada je izabrana vrednost koeficijenta poluprečnika ekvidistante jednaka:

$$c = \frac{z(1+\lambda^2 + 2\lambda \cos \beta)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^2 - 1 + 2z(1+\lambda \cos \beta)} \quad (10)$$

Potrebito je napomenuti da su iz razmatranja isključene singularne tačke ($\beta = \pm\beta_0$).



Slika 4. Dijagrami za izbor poluprečnika ekvidistante iz uslova za ravnomerno habanje spregnutih profila:

- 1- u tački sa najvećom brzinom klizanja,
- 2- u tački sa najvećom krivinom trohoidnog profila

Ovaj uslov se za tačke sa najvećom brzinom klizanja, a to su tačke na temenu trohoidnog profila ($\beta=0$), može izraziti u obliku:

$$c = \frac{z(1+\lambda)^2}{2z + \lambda - 1} \quad (11)$$

Geometrijska interpretacija izvedenog izraza data je na slici 4 (dijagram obeležen sa 1), pri čemu su varirane vrednosti broja zubaca z i koeficijenta λ .

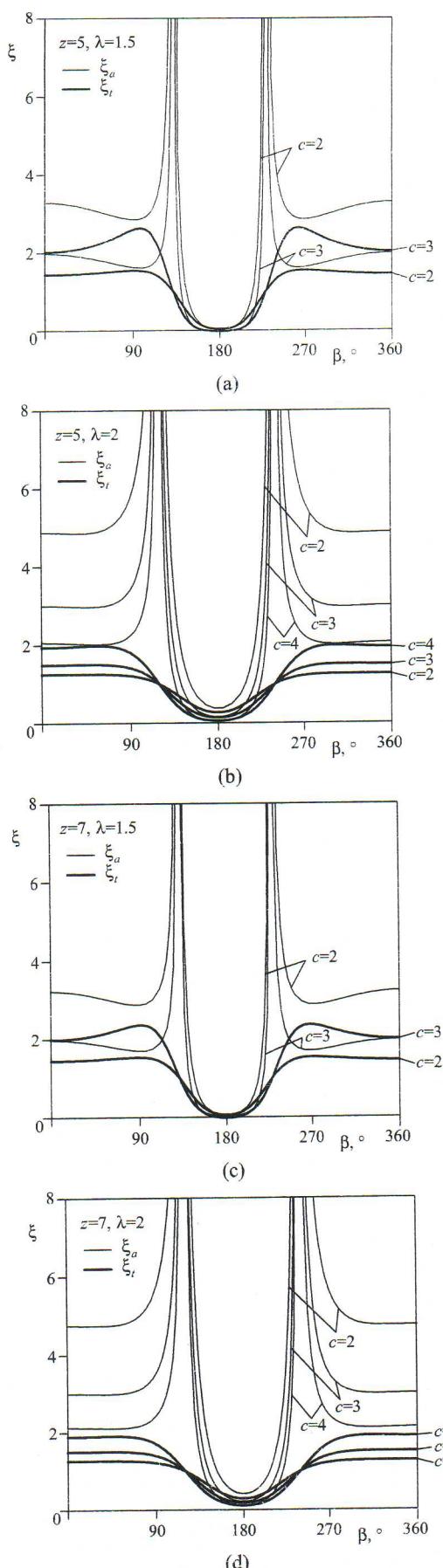
Može se zapaziti da u oblasti preporučenih vrednosti koeficijenta trohoide za pumpe, $\lambda < 2$, broj zubaca ne utiče bitno na uslov za ravnomerno habanje, što je posebno izraženo pri većim brojevima zubaca.

Na sličan način, može da se izvede uslov o jednakosti relativnih brzina u tački sa najmanjim poluprečnikom krivine trohoide. Polazeći od izraza za određivanje ugla koji odgovara tački sa najmanjim poluprečnikom krivine na profilu unutrašnjeg zupčanika, izvedenog u referenci [2], i uslova definisanog izrazom (10) dobija se :

$$c = \frac{z[3(z-1)(\lambda^2 - 1)]^{\frac{3}{2}}}{(z+1)^{\frac{1}{2}}(1-3z+2z^2)(\lambda^2 - 1)} \quad (12)$$

Geometrijska interpretacija izvedenog izraza data je na slici 4 (dijagram obeležen sa 2).

Znači, izborom odgovarajućeg koeficijenta poluprečnika ekvidistante može da se ostvari jednakost specifičnih klizanja u odgovarajućim tačkama trohoidnog zupčastog para sa unutrašnjim ozubljenjem, što je ilustrovano na slici 5. Osim toga, omogućeno je i smanjenje ekstremno velikih vrednosti specifičnog klizanja u okolini tačke sa najvećom krivinom trohoidnog profila.



Slika 5. Uporedni dijagrami absolutnih vrednosti specifičnih klizanja tačke dodira profila trohoidnih zupčastih parova za različite vrednosti broja zubaca, pri različitim vrednostima koeficijenta c i za različite vrednosti koeficijenta trohoide λ :
(a) $z=5, \lambda=1.5$; (b) $z=5, \lambda=2$; (c) $z=7, \lambda=1.5$ i (d) $z=7, \lambda=2$

Na osnovu slika 5 (a) i (c), može se zaključiti da je, sa kinematskog aspekta, obezbedeno ravnomerno habanje spregnutih profila zubaca zupčanika u tačkama profila koje su najudaljenije od trenutnog pola relativnih brzina, zato što su vrednosti specifičnih klizanja u tim tačkama jednake.

Napomena: Na slici 5 su dati dijagrami absolutnih vrednosti specifičnog klizanja tačke dodira profila trohoidnih zupčastih parova radi lakšeg međusobnog poređenja.

5. ZAKLJUČAK

Na osnovu dobijenih izraza može se zaključiti da vrednosti specifičnih klizanja postaju beskonačno velike kada su vrednosti relativnih brzina jednake nuli. Te tačke su singularne za raspodelu specifičnog klizanja spregnutih profila. Na profilu unutrašnjeg zupčanika specifično klizanje nema singularnih tačaka, dok na profilu spoljašnjeg zupčanika postoji tačka sa beskonačno velikim specifičnim klizanjem.

Osim toga, u radu je pokazano da se odgovarajućim izborom geometrijskih parametara može realizovati jednakost specifičnih klizanja u tačkama sa najvećom brzinom klizanja, odnosno da se, sa kinematskog aspekta, obezbedi ravnomerno habanje zubaca spregnutih zupčanika u procesu sprezanja.

6. LITERATURA

- [1] Ansdale R. F., Lockley D. J.: *The Wankel RC Engine*, Iliffe Books Ltd., London, 1970.
- [2] Ivanović L.: *Identifikacija optimalnog oblika trohoidnog profila zupca elemenata rotacionih pumpi*, Doktorska disertacija, Mašinski fakultet u Kragujevcu, Kragujevac, 2007.
- [3] Ivanović L., Josifović D.: *Specific Sliding of Trochoidal Gearing Profile in the Gerotor Pumps*, FME Transactions, Vol. 34, No 3, pp. 121-127, 2006.
- [4] Josifović D., Ivanović L.: *Kinematska analiza trohoidnog ozubljenja kod pumpi za podmazivanje motora SUS*, Monografija, Mobility and Vehicles Mechanics, 119-132, Kragujevac, 2005.
- [5] Литвин Ф. Л.: *Теория зубчатых зацеплений*, Наука, Москва, 1968.
- [6] Maiti R., Sinha G. L.: *Kinematics of active contact in modified epitrochoid generated rotary piston machines*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 23, No 1, 39-45, 1988.
- [7] Manco G., Manco S., Rundo M., Nervegna N.: *Computerized generation of novel gearings for internal combustion engines lubricating pumps*, The International Journal of Fluid Power, vol. 1 – Number 1 - ISBN 1493-9776, pp. 49-58, March 2000.
- [8] Шаников В. М.: *Планетарные редукторы с ванцентроидным зацеплением*, Машиз, Москва, 1948.
- [9] Vecchiato D., Demenego A., Argyris J., Litvin F.: *Geometry of a cycloidal pump*, Computer methods in applied mechanics and engineering, pp. 2309-2330, 2001.

Autori: Dr Lozica Ivanović, Prof. Dr Goran Devedžić, Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet u Kragujevcu, Sestre Janjić 6, 34000 Kragujevac, Srbija, Tel.: +381 34 335-990, Fax: +381 34 333-192

E-mail: lozica@kg.ac.yu
devedzic@kg.ac.yu