

# On the determination of natural frequencies of a cantilever beam in free bending vibration: a rigid multibody approach

Slaviša Šalinić · Aleksandar Nikolić

Received: 8 September 2013 / Published online: 8 October 2013  
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

**Abstract** A new approximate method for the determination of natural frequencies of a cantilever beam in free bending vibration by a rigid multibody system is proposed. Uniform Euler-Bernoulli cantilever beams with and without a lumped mass at the tips are considered. The modelling method consists of two steps. In the first step, the cantilever beam is replaced by lumped masses interconnected by massless flexible beams. In the second step, the massless flexible beams are replaced by massless rigid beams connected through revolute and prismatic joints with corresponding springs in them. Elastic properties of the massless flexible beams are modelled by the springs introduced. The method proposed is compared with similar ones in the literature.

## Über die Bestimmung der natürlichen Frequenz von Konsolen bei freien Schwingungen: rigides Mehrkörpersystem

**Zusammenfassung** Es wird eine neue Methode angezeigt, für die approximative Bestimmung der Kreisfrequenz der elastischen, transversal schwingenden Konsole. Diese Methode stützt sich auf die Theorie des Mehrkörpersystems. Es wird eine homogene Konsole betrachtet, mit und ohne konzentrierte Masse auf ihrer freien Ende. Diese Methode besteht aus zwei Schritten. In erstem Schritt wird die Traverse durch ein System von konzentrierten Massen, die gegenseitig mit elastischen, leichten Kolben verbunden sind, ersetzt. Im zweiten Schritt werden die elastischen Kolben durch leichte, steife Kolben ersetzt, die gegenseitig mit rotierenden und prismenförmigen Gelenken mit entsprechen-

den Federn verbunden sind. Durch diese Federn werden die elastischen Merkmale der leichten, flexiblen Kolben modelliert. Diese Methode wurde auch mit verwandten Methoden in der Literatur verglichen.

### List of symbols

$x, y, z$	Axes of the inertial coordinate frame
$F$	Force [N]
$M$	Torque of a couple [Nm]
$u$	Deflection [m]
$L$	Length [m]
$E$	Young's modulus of elasticity [N/m <sup>2</sup> ]
$I_z$	Axial moment of inertia for the principal axis $z$ [m <sup>4</sup> ]
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Unit vectors of axes $x$ , $y$ , and $z$ , respectively
$\mathbf{u}, \mathbf{u}_P$	Displacement vectors of points $B$ and $P$ , respectively
$\mathbf{p}_i$	Local vector of the $i$ th massless beam
$\mathbf{K}_B, \mathbf{K}_P$	Stiffness matrices corresponding to points $B$ and $P$
$q_i$	Displacement in the $i$ th joint
$c_i$	Stiffness of the spring in the $i$ th joint
$m$	Mass of the beam [kg]
$m_i$	Mass of the particle $M_i$ [kg]
$m_T$	Lumped mass at the tip of the cantilever beam
$n$	Number of equal parts
$\mathbf{e}_i$	Unit vector of the axis of the $i$ th joint
$T$	Kinetic energy [J]
$\mathbf{V}_{M_\alpha}$	Velocity of the particle $M_\alpha$
$\mathbf{r}_{M_\alpha}$	Position vector of the particle $M_\alpha$
$\mathbf{q}$	Vector of generalized coordinates
$\mathbf{q}_0$	Vector of zero values of generalized coordinates
$\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$	First and second time derivatives of the vector $\mathbf{q}$

S. Šalinić (✉) · A. Nikolić  
University of Kragujevac, Faculty of Mechanical and Civil  
Engineering in Kraljevo, Dositejeva 19, 36000 Kraljevo, Serbia  
e-mail: salinic.s@ptt.rs