

Ненад С. Милинковић*

Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет у Ужицу

Сања М. Маричић*

Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет у Ужицу

ПРИСТУП САДРЖАЈИМА О ЗАВИСНОСТИ РЕЗУЛТАТА ОД ПРОМЕНЕ КОМПОНЕНАТА РАЧУНСКИХ ОПЕРАЦИЈА У УЦБЕНИЦИМА МАТЕМАТИКЕ**

Апстракт: Аутори у раду скрећу пажњу на методички приступ садржајима алгебре који се односе на зависност резултата од промене компонента рачунских операција у млађим разредима основне школе и указују на потребу да приступ овим садржајима има полазиште у реалним ситуацијама које ће бити моделоване и које ће представљати полазиште за извођење генерализација и симболичких алгебарских нотација. У том контексту акценат стављају на контекстуални приступ учењу ових садржаја и разматрају улогу уџбеника математике, као основе за учење и ослонац учитељу у концептирању методичког приступа у раду са ученицима. На узорку уџбеника математике за трећи и четврти разред основне школе организовали су истраживање, засновано на техници анализе садржаја, с циљем да испитају који приступ је доминантнији у увођењу ових садржаја – контекстуални или неконтекстуални. Резултати истраживања показали су значајне разлике у одабиру приступа у увођењу садржаја у уџбеницима математике, везаних за зависност, од искључиве доминације једног приступа до њиховог комбиновања, као и малу заступљеност контекстуално заснованих задатака који су предвиђени за вежбање, утврђивање и примену знања.

Кључне речи: алгебра, зависност резултата рачунских операција, контекстуално учење, математика, уџбеник.

* milinkovic.nenad84@gmail.com

* sanjamaricic10@gmail.com

** Рад је настао у оквиру пројекта ОИ 179026 „Настава и учење: проблеми, циљеви и перспективе”, чији је носилац Педагошки факултет у Ужицу, а финансијски подржава Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

УВОД

Алгебарски садржаји представљају важан део програма наставе математике у млађим разредима основне школе, али и велики изазов за учитеље и ученике. Бројне студије указују на мноштво проблема у овладавању овим садржајима од стране ученика и на потребу за различитим приступима у развијању алгебарских појмова и њиховој трансформацији (Kieran, 1981, 2004; Sfard & Linchevski, 1994a; Herscovics & Linchevski, 1994). Успех у учењу ових садржаја условљен је великим бројем фактора. Он је, пре свега, условљен квалитетом учења у области аритметике, јер „искуство са бројевима и њиховим својствима представља темељ за каснији рад са симболима и алгебарским изразима” (Kieran, 2004: 143). Успех у алгебри, у великој мери, зависи и од „способности математичког размишљања, као што су: генерализација, апстракција, аналитичко размишљање, моделирање и организација” (Lew, 2004: 93). Генерализације и формализације представљају уопштавања и артикулације идеја којима се изражавају важне математичке везе које постоје између елемената рачунске операције и оне леже у срцу алгебарске мисли: аритметичке операције могу бити посматране као функције, а алгебарска симболика подржава такво размишљање (Blanton, Levi, Crites & Dougherty, 2011). То значи да је природан пут ка развоју раноалгебарских идеја управо у добро формираној основи аритметике. Вештачко одвајање аритметике и алгебре „лишава ученике моћне шеме за математичко мишљење у раним разредима и отежава пут учења алгебре у каснијим разредима” (Carpenter & Levi, 2000: 2).

Још један значајан услов развијања алгебарских појмова обухвата и разумевање алгебарских симбола и њихову примену у изражавању алгебарских генерализација. Управо, аутори и скрећу пажњу на њихов значај и истичу да „алгебарски симболи не говоре сами за себе. Оно што се заправо види у њима зависи од захтева проблема на који се оне односе” (Sfard & Linchevski, 1994a: 88).

Циљ коме се тежи у настави алгебре није да ученици само овладају једноставним алгебарским процедурама, усвоје уопштене алгебарске нотације, већ да превасходно развију алгебарско и функционално мишљење. Данас се у наставној пракси, у изучавању алгебарских садржаја и разумевању и изражавању функционалних односа, настава заснива искључиво на индуктивном путу откривања алгебарских истина, које се даље уопштавају симболичким путем. Међутим, истраживања показују да ученици слабо разумеју значења односа и математичких структура (Booth, 1989; Kieran, 1992; Warren, 2005). Према Меири симболизација је динамичан процес, при чему се кроз симболизацију ствара и развија значење симбола. У овом процесу нотациони системи обликују саме активности из којих се појављују, док истовремено исте те активности обликују значења симбола која се појављују (Meira, 1995). Принципи и

стандарди за школску математику указују на то да алгебра треба да укључује низ значајних способности код деце које обухватају: разумевање обрасца, односа и функција; представљање и анализирање математичке ситуације и структуре користећи алгебарске симболе, као и анализирање промена у различитим контекстима (NCTM, 2000: 37).

Важан садржај наставе математике у млађим разредима основне школе, у коме алгебарске нотације долазе до изражаја, представљају садржаји кроз које ученици уочавају зависност резултата од промене компонената рачунских операција. Резултат учења ових садржаја представљају уопштене алгебарске нотације које карактерише симболичко изражавање односа између елемената рачунских операција и ту се јављају кључне потешкоће. Суштинско својство ових садржаја односи се на потребу рационалног извођења рачунских операција у скупу природних бројева, с једне стране, и постављање основе за решавање неједначина, с друге стране. Да би ученик разумео аритметичке операције и релације, потребно је да разуме унутрашњу структуру операција и односа између операција. Коришћење симбола да би се објаснила или изразила функционална зависност између променљивих, подразумева схватање суштинског својства односа који постоји између компонената рачунских операција. На пример, својство сталности збира симболички се изражава на следећи начин:

$$a + b = c$$

$$(a + k) + (b - k) = c, (a, b, c, k \in \mathbb{N})$$

Ученик млађег школског узраста може да савлада ово правило, али је један од услова добро познавање аритметике, да би се могла извршити генерализација и ово правило уопштило за читав скуп природних бројева. Међутим, истраживања показују да „и ученици и учитељи имају проблеме са њиховим разумевањем и приказивањем” (Илић, 2018: 682). Велики проблем у разумевању алгебарских нотација представља разумевање знака једнакости. Ако посматрамо горе наведене формуле, прва формула не захтева посебно широко схватање знака једнакости. У другој формули знак једнакости се мора схватити као знак који нужно изражава еквивалентност два израза (Molina, Castro & Ambrose, 2005). Овако схваћен знак једнакости не служи искључиво као сигнал за „израчунај”, односно „утврди вредност израза са леве стране”, већ изражава облик симетрије леве и десне стране једнакости. Ученик треба да буде свестан суштинске одлике сталности збира, односно, како да то знање примени у конкретним ситуацијама као олакшицу у извођењу рачунских операција. На овај начин то знање постаје функционално, а разумевање суштинске структуре односа између израза у овим једнакостима потпуно. У почетку ученици имају тенденцију да схватају алгебарске изразе на чисто оперативан начин, односно као концизно упутство за извођење рачунских операција. Обично треба много времена да ученик почне размишљати о алгебарским формулама и на структуралан начин (Sfard & Linchevski, 1994b).

Разумевање и усвајање садржаја везаних за зависност резултата од промене компонената рачунских операција, а посебно њихово генерализовање и изражавање симболима, у првом реду зависи од методичког приступа који ће се применити у процесу трансформације ових садржаја ученицима. Кључну улогу у том процесу има начин представљања ситуације која даје повод за постављање израза на основу којих ће се доћи до изражавања зависности. И ту постоје велике разлике. Оне се огледају највише у начину изражавања ситуација које треба да буду основа за извођење закључака о зависности која постоји између резултата од промене компонената рачунске операције. Први начин обухвата једноставно закључивање на основу математичких израза и промена на тим изразима, што упућује на аритметичко манипулисање математичким изразима, како би се изразио однос и функционална зависност компонената рачунске операције. Ученик је тако у прилици да посматра изразе и упоређује резултате како би дошао до закључка о зависности. Други начин је постављање реалне ситуације из свакодневног живота којом би се изразила ова зависност. Дакле, варирањем ситуације којом се изражава функционална зависност ученик је у ситуацији да закључује о односима на основу реалне проблемске ситуације.

У разматрању приступа треба поћи од става Фројдентала према коме математика не би требало да се учи као већ готов производ, већ као активност кроз коју ученици могу активно да конструишу сопствене математичке концепте (Laurens, Batlolona, Batlolona & Leasa, 2018: 576). Приступ учењу мора бити заснован на идеји да деца треба да уче на примерима који на очигледан начин, кроз реалне (животне) ситуације изражавају односе који се касније генерализују кроз алгебарске нотације. На тај начин моделују се проблемске ситуације које стварају основу да ученици посматрају промене, користе рачунске процедуре и разумеју правила и принципе. Ове промене представљају апстракције физичких манипулација које су користили у решавању проблема. Ако су садржаји и контекст у коме су изражени ти садржаји повезани са свакодневним активностима и интересовањима ученика, чак и садржаји алгебре који захтевају виши ниво апстракција, такве садржаје лакше ће савладати и биће им јасни. Такав начин учења обезбеђује контекстуални приступ учењу. Реч је о приступу који је заснован на реалним конкретним ситуацијама, у којима ученик учи у реалном контексту, гради своје знање о стварним животним ситуацијама, кроз решавање реалних проблема, а истовремено развија математички начин размишљања (Маричић и Шпијуновић, 2017). Контекстуални приступ разликује се од других приступа по томе што покушава да превазиђе дихотомију између неформалног и формалног знања, дизајнирајући хипотетичку путању учења на основу које ученици могу поново открити формалну математику (Gravemeijer & Doorman, 1999). Проблеми изражени у контексту

функционишу тако да служе као тачке ослонаца које омогућавају ученицима самостално поновно откривање „математичких истина” на природан и логичан начин. На овакав начин праве се везе између проблема изражених у контексту, кроз моделовање ситуација и решења и симболичких представа тих односа. Контекст „омогућава да се олакша и приближи алгебарски садржај ученицима млађег школског узраста, да створи основу да ученик у конкретној ситуацији види, уочи и искаже природним језиком односе, а потом их пребаци на апстрактни ниво” (Маричић и Милинковић, 2017: 126). Поред тога, остварује се процес хоризонталне математизације која се огледа кроз активност преношења реалног проблема на симболички математички ниво кроз посматрање, експериментисање и индуктивно образложење (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003), односно преношење реалног проблема у симболички математички свет, и обрнуто, као и реорганизацију и (ре)конструкцију садржаја у математици (Jupri & Drijvers 2016). Контекстуално учење и поучавање у настави математике „значајно је и због тога што те активности чини сврсисходним, повезује математичке садржаје са реалним животом, даје им смисао и значај, обезбеђује трансфер теоријских математичких знања у реални или замишљени контекст и обрнуто” (Маричић и Шпијуновић, 2017: 258). На овај начин генерализације и симболичке нотације које настају у процесу извођења закључака долазе као резултат процеса посматрања, уочавања кроз ситуације које су блиске ученику. Оне за ученика имају смисла, јасне су му и разуме их. На овај начин обезбеђује се и постепен и смислен прелазак са конкретног на апстрактни ново мишљења и разумевања.

По својој природи садржаји алгебре представљају генерализације и уопштене математичке истине, тако да и методички приступ њиховом изучавању мора бити такав да омогући ученику да види целину, а не само издвојене делове те целине. Такву целину у осмишљавању у настави алгебре могуће је постићи само ако је ученик у стању да разуме алгебарске истине, и што ће оне бити изражене у контекстуалним ситуацијама и проблемима свакодневног живота. Ако ученици доживљавају процес поновне изградње математичких идеја као процес сталног проширавања знања, онда неће доживети никакву дихотомију између свакодневног искуства и математике. Оба ће бити део исте реалности.

Који приступ ће учитељ применити у увођењу садржаја везаних за зависност резултата од промене компонената рачунских операција, зависи од великог броја фактора. Међу тим факторима велику улогу има уџбеник математике из ког ученик учи. Он представља основни извор садржаја за учење ових садржаја, али и ослонац учитељу за конципирање методичког приступа у настави. Стога смо пажњу у емпиријском делу рада усмерили на уџбеник с циљем да утврдимо на који начин се у уџбеницима математике у млађим разредима основне школе приступа обради садржаја из алгебре који се односе на зависност резултата рачунске операције од промене његових компонената.

Наиме, циљ је био да се испита који приступ је доминантнији у увођењу ових садржаја – приступ који полазиште има у реалним, конкретним ситуацијама које се моделују и на тој бази се врше уочавања и генерализације и изводе апстрактне симболичке нотације или приступ који је лишен везаности за реалне ситуације блиске ученику, већ је заснован на математичком контексту. Пажњу смо усмерили на анализу приступа у увођењу ових садржаја, али и на анализу садржаја који су постављени ученику у циљу вежбања и примене знања везаних за ове садржаје алгебре.

МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

Узорак истраживања одабран је из популације уџбеника математике за трећи и четврти разред основне школе, који су одобрени за употребу у настави математике у основним школама, јер се садржаји који су предмет анализе уче у ова два разреда. Узорак су чинили уџбенички комплети за наставу математике за трећи и четврти разред основне школе издавачких кућа *Логос*, *Klett*, *Биз* и *Креативни центар*.

Циљ истраживања је испитати улогу уџбеника математике у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја који обухватају *зависност резултата од промене компонената рачунских операција*. Циљ је одређен кроз два истраживачка задатка:

1. Утврдити улогу уџбеника математике у стварању услова за контекстуални приступ формирању појмова везаних за зависност резултата од промене компонената рачунских операција;
2. Утврдити улогу уџбеника математике у стварању услова за вежбање и утврђивање садржаја о зависности резултата од промене компонената рачунских операција на садржајима који су контекстуално засновани.

Истраживање је засновано на техници анализе садржаја. Јединицу садржаја анализе чинио је садржај у уџбенику кроз који ученик стиче знања, формира појмове, упознаје се са новим садржајем и чинили су сви задаци који постоје у уџбенику и радној свесци.

Категорије садржаја за анализу су:

- Контекстуални приступ/зadataк – садржај/зadataк који је дат као реална, конкретна ситуација;
- Неконтекстуални приступ/зadataк – садржај/зadataк који је дат у чисто математичком контексту (математичка реченица, математички запис).

Од инструмената у истраживању коришћен је евиденциони лист у који су бележени резултати анализе садржаја, док су резултати изражени кроз фреквенције и проценте. Анализу садржаја обавили су аутори рада.

РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ДИСКУСИЈА

Први задатак истраживања био је да се утврди улога уџбеника математике у стварању услова за контекстуални приступ формирању појмова везаних за зависност резултата од промене компонената рачунских операција. У трећем разреду основне школе наставним програмом предвиђено је да ученици зависност резултата од промене компонената рачунских операција уведу кроз следеће наставне јединице: *Зависност збира од сабирака*, *Сталност збира*, *Зависност разлике од умањеника и умањивоца*, *Сталност разлике*, *Зависност производа од промене чинилаца*, *Зависност количника од дељеника и делиоца*.

Анализа садржаја уџбеника математике показала је да је наведени садржај присутан у свим уџбеницима трећег разреда, осим у уџбенику издавачке куће *Бигз*. У уџбеницима за трећи разред издавачке куће *Klett* сви садржаји који се односе на увођење зависности рачунских операција од промене компонената рачунских операција уводе се контекстуалним приступом, док је за разлику од њих, у уџбеницима издавачке куће *Креативни центар* таквим приступом уведен само један од 5 садржаја (Табела 1). За разлику од ових уџбеника, у уџбенику за трећи разред издавачке куће *Логос* подједнако је заступљен контекстуални и неконтекстуални приступ обради ових садржаја. Два садржаја су уведена контекстуалним, а два кроз математички контекст.

Табела 1. Заступљеност приступа у формирању појмова зависности резултата од промене компонената рачунских операција у уџбеницима математике

Уџбеник	Трећи разред			Четврти разред	
		Контекстуални приступ	Неконтекстуални приступ	Контекстуални приступ	Неконтекстуални приступ
Klett	f	2	0	0	10
	%	100	0	0	100
Бигз	f	0	0	5	0
	%	0	0	100	0
Креативни центар	f	1	4	3	4
	%	9,09	90,91	42,86	57,14
Логос	f	2	2	7	1
	%	50	50	87,50	12,50

У четвртном разреду основне школе наставним програмом предвиђено је да ученици зависност резултата од промене компонената рачунских операција уведу кроз следеће наставне јединице: *Зависност збира од сабирака*, *Сталност збира*, *Зависност разлике од умањеника и умањеоца*, *Сталност разлике*, *Зависност производа од промене чинилаца*, *Сталност производа*, *Зависност количника од дељеника и делиоца*, *Сталност количника*.

Анализа уџбеника математике за четврти разред, такође, указује на разлике у начину на који се уводе ови садржаји. Наиме, сви садржаји који се односе на зависност резултата од промене компонената рачунских операција у уџбеницима издавачке куће *Бигз*, уводе се искључиво приступом заснованим на реалним ситуацијама које одређују контекстуални приступ. С друге стране, у уџбеницима издавачке куће *Klett*, садржаји који се односе на зависност резултата од промене компонената рачунских операција уводе се искључиво неконтекстуалним приступом. Ако се у обзир узму резултати анализе осталих издавача, може се закључити да је у уџбеницима издавачке куће *Логос* такође доминантан контекстуални приступ, где је 7 од 8 садржаја уведено контекстуалним приступом. У уџбеницима издавачке куће *Креативни центар* нешто мање од половине (42,86%) предвиђеног садржаја уведено је на реалним проблемским ситуацијама, које изражавају ове алгебарске садржаје (Табела 1).

На основу добијених резултата можемо рећи да је у анализираним уџбеницима за трећи и четврти разред постоји разлика у приступима обради садржаја који се односе на зависност резултата од промене компонената рачунских операција. Добијени резултати показују да се аутори уџбеника издавачких кућа *Klett* и *Бигз*, конципирајући садржаје лекција, опредељују или за приступ којим се изражавају ситуације засноване на реалном контексту свакодневног живота или на приступ којим се изражавају чисто математичке ситуације. С друге стране, аутори уџбеника издавачке куће *Креативни центар* и *Логос* користе и један и други приступ у увођењу ових садржаја, али и да у том избору нису доследни.

Занимљиво је да се у уџбеницима математике за четврти разред основне школе већи број садржаја везаних за зависност резултата од промене компонената рачунских операција уводи на основу реалне проблемске ситуације у односу на садржаје у уџбеницима трећег разреда. Логично би било да је ситуација обрнута, јер се ови садржаји у четвртном разреду утврђују и проширују, док се алгебарска знања уопштавају, тако да је природно да буду ближе математичком контексту (неконтекстуалном приступу). Добијени резултати слични су резултатима истраживања које је имало за циљ да испита који је приступ доминантнији у увођењу садржаја о једначинама и неједначинама. Они показују да је у увођењу ових садржаја „доминантан приступ који почива на мате-

матичким, апстрактним нотацијама, и који прати уопштеност и истицање правила на бази уочавања односа међу математичким реченицама” (Маричић и Милинковић, 2017: 126).

Други задатак истраживања био је усмерен на испитивање заступљености задатака заснованих на контекстуалном приступу, у садржајима који се односе на утврђивање и вежбање садржаја зависности резултата од промене компонената рачунске операције. Анализом садржаја уџбеника математике желели смо да испитамо кроз какве садржаје ученици вежбају, утврђују и примењују знања везана за садржаје зависности резултата од промене компонената рачунских операција.

Ако се у обзир узму добијени резултати анализе уџбеника математике за трећи разред, можемо рећи да је заступљеност задатака заснованих на реалној проблемској ситуацији из свакодневног живота најмања у уџбеницима издавачке куће *Klett* (7,14%), затим у уџбеницима издавачке куће *Логос* (14%), док је највећа у уџбеницима издавачке куће *Креативни центар* (16,67%).

Табела 2. *Заступљеност задатака контекстуалног и неконтекстуалног типа из зависности резултата од промене компонената рачунских операција у уџбеницима математике*

Уџбеници		Трећи разред		Четврти разред	
		Контексту-ални задатак	Неконтексту-ални задатак	Контексту-ални задатак	Неконтексту-ални задатак
Klett	f	2	26	4	89
	%	7,14	92,86	4,30	95,70
Бигз	f	0	0	6	24
	%	0	0	20	80
Креативни центар	f	11	55	6	29
	%	16,67	83,33	17,14	82,86
Логос	f	7	43	15	82
	%	14	86	15,46	84,54

Слични резултати добјени су и у анализи уџбеника математике за четврти разред основне школе. Анализа садржаја показала је да постоји мала заступљеност задатака контекстуалног типа који се односе на зависност резултата од промене компонената рачунске операције код свих издавача: *Бигз* – 20%, *Креативни центар* – 17,14%, *Логос* – 15,46%, *Klett* – 4,30%. Када се посматра однос који постоји између задатака контекстуалног и неконтекстуалног типа по разредима, можемо рећи да је заступљеност контекстуалних задатака поприлично уједначена у оба разреда код истих издавача. Анализа садржаја показала је разлику од оног што се природно очекује, а то је да у уџбеницима за трећи разред буде већа заступљеност задатака намањених вежбању и

утврђивању који су заснованих на реалним ситуацијама, јер се тада први пут усвајају и природно је да постоји већа веза са конкретним ситуацијама. Сличне резултате добијају и други аутори испитујући заступљеност контекстуално заснованих задатака у учењу садржаја алгебре (Маричић и Фелда, 2017, Маричић и Милинковић, 2017; Милинковић и Ћурчић 2017).

ЗАКЉУЧАК

Развијање функционалног мишљења и разумевање функционалних односа између рачунских операција и зависности које постоје између компонената рачунских операција и резултата представља значајан садржај у развијању алгебарског мишљења ученика млађег школског узраста. Истраживачки радови показују да деца млађег школског узраста могу успешно да усвоје алгебарске садржаје и да разумеју њена синтаксичка правила (Blanton & Karut, 2005; Carpenter & Franke, 2001). Међутим, треба имати у виду да успешно учење алгебре не подразумева учење скупа чињеница и техника, већ то учење треба посматрати као начин размишљања.

Добијени резултати истраживања показују да се садржаји, који се односе, на зависност резултата од промене компонената рачунских операција у уџбеницима различито уводе. У појединим уџбеницима доминира приступ базиран на реалним проблемским ситуацијама, док се у другим ови појмови искључиво уводе помоћу примера заснованих на чисто математичким ситуацијама. Поред тога забрињава чињеница да у појединим уџбеницима не постоје садржаји који су предвиђени програмом, а односе се на зависност резултата. Недостатак ових садржаја може представљати проблем у усвајању других математичких садржаја, посебно алгебарских који обухватају једначине и неједначине. Када је реч о задацима који су предвиђени за вежбање и утврђивање ових садржаја, истраживање је показало да је тек сваки седми задатак базиран на реалној проблемској ситуацији из свакодневног живота. Аутори уџбеника малу пажњу посвећују наглашавању суштине сталности и његове примене као олакшице у рачунању, док је заступљеност задатака овог типа веома мала или занемарљива.

Аутори уџбеника и учитељи морају имати у виду сложеност алгебарских садржаја, самим тим и њихов значај у повезаности и међусобној условљености. Управо из тог разлога и садржаји који природно проистичу из аритметике, имају значајну улогу у потпуном разумевању једначина и неједначина, као и њиховом решавању. Тешкоће које ученици доживљавају у учењу алгебре на овом узрасту укључују и темпо учења и често коришћени формални приступ у својој презентацији и доживљавању алгебарских садржаја. Још важније, чини се да многи учитељи и аутори уџбеника нису

свесни озбиљних когнитивних потешкоћа у учењу алгебре. Као резултат тога, многи ученици немају времена да изграде добре интуитивне основе за алгебарске појмове или повезивање ових појмова са другим преалгебарским појмовима и на тај начин они не успевају да конструишу значење нове симболике, тако да се на неки начин све своди на обављање бесмислених операција и симбола које не разумеју (Herscovics & Linchevski, 1994).

Управо из овог разлога и проистиче значај контекстуалног приступа у обради садржаја ране алгебре, па самим тим и зависности резултата од промене компонената рачунске операције. У првом плану истиче се очигледност као један од принципа у настави математике који омогућава да дете на примерима свакодневног живота, решавајући проблем, дође до нових сазнања. На овај начин стечена знања су дуготрајнија, док се решавањем проблема на овај начин подстиче и развој функционалног мишљења.

Чињеница је да ученик лакше учи оно што му је јасно и природно изражава ситуације свакодневног живота, али се поред тога, такође, мора нагласити значај разумевања симбола као променљиве или непознате којом се развијају способности апстракције. Апстракција као мисаона операција доминира у усвајању садржаја, односно, развијању свих математичких појмова и од посебног је значаја за развој функционалног мишљења детета овог узраста. Када је реч о математичком језику он се сматра не само као носилац претходног постојања значења, већ као дизајнер самих значења математичких појмова (Ferrari, 2006: 73). Из тог разлога развој апстракције и генерализације, као мисаоних операција, представља значајан услов развоја почетних алгебарских идеја – развоја ране алгебре. Ако се у обзир узму сви уочени недостаци, ипак не можемо рећи да у учбеницима ови садржаји нису доступни како учитељу тако и ученику. Учители треба, на првом месту, да разумеју и схвате значај ових садржаја и њихову улогу у постављању основе за даљу изградњу раноалгебарских идеја ученика овог узраста. У том промишљању треба пронаћи пут у коме ће ученик кроз релације између ситуација реалног контекста свакодневног живота уочити и функционалне релације компонената математичких израза и једнакости.

Литература

- Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.
- Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. Reston, VA: NCTM.
- Booth, L. R. (1989). Seeing the Pattern: Approaches to Algebra. *Australian Mathematics Teacher*, 45(3), 12–13

- Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in Mathematics*, 54(1), 9–35.
- Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational studies in mathematics*, 39(1–3), 111–129.
- Илић, С. (2018). Репрезентације правила сталности збира и разлике. У С. Маринковић (ур.), *Језик, култура, образовање*, рад штампан у целини, 2. новембар 2018, Ужице (681–698). Ужице: Педагошки факултет.
- Jupri, A. & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(9), 2481–2502.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, 12(3), 317–326.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (ed.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (390–419). New York: Macmillan.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Laurens, T., Batlolona, F. A., Batlolona, J. R. & Leasa, M. (2018). How Does Realistic Mathematics Education (RME) Improve Students' Mathematics Cognitive Achievement. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 569–578.
- Lew, H. C. (2004). Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Study of Korean Elementary School Mathematics. *The Mathematics Educator*, 8(1), 88–106.
- Маричић, С. и Милинковић, Н. (2017). Уџбеник у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у почетној настави математике. *Зборник радова*, XX(19), 117–130.
- Маричић, С. и Фелда, Д. (2017). Уџбеник у стварању услова за контекстуални приступ учењу геометрије у Србији и Словенији. У Н. Вуловић и А. Михајловић (ур.): *Методички аспекти наставе математике*, четврта међународна конференција (зборник резимеа) (17–18). Јагодина: Факултет педагошких наука.
- Маричић, С. и Шпијуновић, К. (2017). Контекстуални приступ учењу и поучавању у почетној настави математике. У Б. Микановић (ур.): *Изазови васпитања и образовања у теорији и пракси*, Бањалучки новембарски сусрети – Истраживања у психологији (253–266). Бања Лука: Филозофски факултет.
- Милинковић, Д. и Ђурчић, М. (2017). Уџбеник као културно потпорно средство учењу математике у природном и друштвеном контексту. У С. Маринковић (ур.): *Културно-потпорна средства у функцији наставе и учења* (377–394). Ужице: Учитељски факултет.

- Molina, M., Castro, E. & Ambrose, R. (2005). Enriching arithmetic learning by promoting relational thinking. *The international journal of Learning*, 12(5), 265–270.
- Meira, L. (1995). The microevolution of mathematical representations in children's activity. *Cognition and instruction*, 13(2), 269–313.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Virginia: Reston.
- Sfard, A. & Linchevski, L. (1994a). The Gains and the Pitfalls of Reification – The Case of Algebra. In P. Cobb (ed.): *Learning Mathematics* (87–124). Dordrecht: Springer.
- Sfard, A. & Linchevski, L. (1994b). Between arithmetic and algebra: In the search of a missing link the case of equations and inequalities. *Rendiconti Del Seminario Matematico*, 52, 279–307.
- Ferrari, P. L. (2006). From verbal texts to symbolic expressions: A semiotic approach to early algebra. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (eds.): *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (73–80). Prague: PME.
- Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, 27(1), 59–78.
- Carpenter, T. P. & Levi, L. (2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades*. Research Report. Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Carpenter, T. & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (eds.): *Proceedings of the Twelfth ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra*, Vol. 1 (155–162). Melbourne, Australia: University of Melbourne Press.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In H. L. Chick & J. L. Vincent (eds.): *Proceedings of the 29th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (305–312). Melbourne: PME.

Ненад С. Милинковић

Универзитет в Крагуеваце, Педагогически факултет в Ужице

Саня М. Маричић

Универзитет в Крагуеваце, Педагогически факултет в Ужице

ДОСТУП К СОДЕРЖАНИЮ О ЗАВИСИМОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ В УЧЕБНИКАХ МАТЕМАТИКИ

Аннотация

Авторы обращают внимание на методический подход к содержанию алгебры, связанный с зависимостью результатов от изменения компонентов арифметических операций в младших классах начальной школы, и указывают на необходимость доступа к этому содержанию, чтобы он стал отправной точкой в реальных ситуациях, которые будут моделироваться, и которая будет отправной точкой для выполнения обобщений и символических алгебраических обозначений. В этом контексте они делают упор на контекстуальный подход к изучению этого содержания и рассматривают роль учебников по математике в качестве основы для обучения и поддержки учителя в концептуализации методического подхода в работе с учениками. В образце учебников по математике для начальных школ третьего и четвертого классов мы организовали исследование, основанное на технике анализа содержания, с целью изучения того, какой подход является более доминирующим при представлении этого контента – контекстный или неконтекстный. Результаты исследования показали значительные различия в выборе подходов к введению содержания в учебниках математики, связанных с зависимостью, от исключительного доминирования одного подхода к их объединению, а также небольшого представления контекстуальных задач, предназначенных для практики, определения и применения знаний.

Ключевые слова: *алгебра, зависимость результатов арифметических операций, контекстное обучение, математика, учебник.*