Сузана Ђорђевић
Универзитет у Крагујевцу
Факултет педагошких наука у Јагодини

DOI: 10.46793/MANM4.112DJ
УДК: 004:512.563

ПРИМЕНА ИНФОРМАЦИОНИХ ТЕХНОЛОГИЈА У НАСТАВИ БУЛОВЕ АЛГЕБРЕ

Апстракт: Решења многих проблема у разним научним дисциплинама, посебно у математици, информатици, техници, економији, социологији и медицини могу се превести на „да" или „не", односно на „0" и „1". Ова чињеница је, поред осталог, поспешила развој електронике и дигиталне технике, а тиме и Булове алгебре, посебно Булове алгебре на скупу {0, 1}. Рад садржи три поглавља. У првом поглављу се говори о дефиницији Булове алгебре, Буловој алгебри на скупу {0, 1} и Буловим функцијама. У другом поглављу се говори о применама Булове алгебре у информатици, и то кроз логичка кола. У трећем поглављу ће се размотрити примена логичких кола и разних примера из информационе технологије у настави математике, како би ученици лакше разумели Булову алгебру и логичке операције.

Кључне речи: настава Булове алгебре, Булове функције, информационе технологије, логичка кола.

Увод

Информација је нешто што смањује неизвесност.

Клод Шенон (Shannon, 1949) написао је још давне 1948. године и поставио темеље теорије информација. Без те студије данас не би постојале модерна телефонија, телевизија, интернет, модеми, мрежне карте, телефонске централе, сателитски системи, компресија података, дигитална обрада сигнала и много тога другог.

Информација = Неодређеност

Неодређеност = Ентропија

Ентропија (H) неке поруке M, чија дужина је n - бита (врло важно ово *bita*, дакле само два могућа исхода сваког елемента поруке (0 или 1)) би се могла написати овако:

$H(M) = log^2 n$:

captainsuzy@gmail.com

Укратко, то је број покушаја који нам је потребан да бисмо добили тачан садржај поруке (информацију), у идеалном случају.

Све инжењерске дисциплине имају математичку подлогу на основу које даље развијају своје концепте. Дигитални системи укључују и и рачунарске системе, нису различити у том погледу. Технике за формалну анализу и пројектовање дигиталних кола и система имају своје корене у радовима енглеског математичара Џорџа Була (Boole, 1854). Године 1854. он је формулисао алгебарски систем, данас познат као Булова алгебра, за изражавање фундаменталних закона резоновања у симболичком језику математичке логике. Булова алгебра манипулише исказима који могу бити тачни или нетачни и дефинише правила на основу којих је могуће утврдити тачност сложенијих исказа добијених комбиновањем полазних исказа. Све до касних тридесетих година прошлог века, Булова алгебра није наишла на неку значајнију практичну примену. Године 1938. амерички истраживач Клод Е. Шенон (Shannon, 1949) искористио је Булову алгебру за анализу и опис понашања релејних мрежа. У Шеноновој интерпретацији Булове алгебре, која се зове прекидачка алгебра, стање прекидача или релејног контакта, отворено или затворено, представља се променљивом x која може имати једну од две могуће вредности, 0 или 1. Ово је била веома важна примена, с обзиром на то да су у то доба телефонски системи били у наглом развоју, па је било неопходно изнаћи неки погодан математички апарат којим би се описивале жељене комутације и начини успостављања везе.

Од тог тренутка, примена Булове алгебре доживела је велику експанзију, што је поспешило интересовање за увођење дигиталне технике и у многим другим областима. Због важности Булове алгебре за пројектовање не само рачунарских система него и комуникационих система, система управљања и било ког другог система који користи дигиталну технику, веома је важно разумети значај Булове, односно прекидачке алгебре и проучити њене основне концепте.

Клод Елвуд Шенон (Shannon, 1949) је доказао да се применом Булове алгебре на дигитална електрична кола може решити било који логички или нумерички проблем.

Дигитална технологија се развија и мења, и тако утиче на промену схватања дигиталних система, као и ефикасан начин њиховог пројектовања, али принцип да је помоћу електронских склопова базираних на Буловој алгебри могуће решити и најсложенији логички проблем важи и још увек преовлађује у пракси.

На који начин ће информациона технологија бити употребљена у настави Булове алгебре биће објашњено у наредним поглављима.

Булове алгебре

Овде ће се разматрати специјална алгебарска структура, тзв. *Булова алгебра* на непразном скупу са две бинарне и једном унарном операцијом.

Основни појмови и тврђења

Дат је скуп B са најмање два елемента, у ознаци 0 и 1, на коме су дефинисане две *бинарне операције*, у ознаци „∪” и „·” и једна *унарна операција*, у ознаци „ ¯ ”.

Дефиниција 1

На скупу B је дефинисана Булова алгебра ако за све $a, b, c \in B$ важе следеће аксиоме (закони, својства):

B1 *Својства комутативности*

$(i)\ a \cup b = b \cup a \quad (ii)\ a \cdot b = b \cdot a$

B2 *Својства асоцијативности*

$(i)\ (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) \quad (ii)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

B3 *Својства дистрибутивности*

$(i)\ a \cup (b \cdot c) = (a \cup b) \cdot (a \cup c) \quad (ii)\ a \cdot (b \cup c) = a \cdot b \cup a \cdot c$

B4 *Својства елемената 0 и 1*

$(i)\ a \cup 0 = a \quad (ii)\ a \cdot 1 = a$

B5 *Својства комплемента*

$(i)\ a \cup \bar{a} = 1 \quad (ii)\ a \cdot \bar{a} = 0$

Булову алгебру на скупу B са операцијама: , „∪”, „·”, „¯” краће означавамо као четворку $(B, \cup, \cdot, \bar{\ })$. Елемент 0 обично зовемо први елемент, а елемент 1 последњи елемент.

Наводимо списак важнијих теорема Булове алгебре $(B, \cup, \cdot, \bar{\ })$.

Теорема 1

У свакој Буловој алгебри $(B, \cup, \cdot, \bar{\ })$ важе идентитети:

J_1	$(i)\ a \cup a = a$	$(ii)\ a \cdot a = a$
J_2	$(i)\ a \cup 1 = 1$	$(ii)\ a \cdot 0 = 0$
J_3	$(i)\ a \cup (a \cdot b) = a$	$(ii)\ a \cdot (a \cup b) = a$
J_4	$(i)\ a \cup (\bar{a} \cdot b) = a \cup b$	$(ii)\ a \cdot (\bar{a} \cup b) = a \cdot b$

J_5 (*i*) $(a \cup b) \cup (a \cdot \bar{b}) = 1$ (*ii*) $(a \cdot b) \cdot (\bar{a} \cup \bar{b}) = 0$

J_6 (*i*) $(a \cup b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0$ (*ii*) $(a \cdot b) \cup (\bar{a} \cup \bar{b}) = 1$

J_7 (*i*) $\bar{a}= a$

J_8 (*i*) $\bar{0} = 1$ (*ii*) $\bar{1} = 0$

J_9 (*i*) $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ (*ii*) $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

Теорема 2

(i) Ако је $a \cup x = 1$ и $a \cdot x = 0$, онда је $\bar{x} = a$.

(ii) $a \cup b = 0$ ако и само ако $a = b = 0$.

(iii) $a \cdot b = 1$ ако и само ако $a = b = 1$

(*iv*) $a \cdot b = 0$ ако и само ако $a = 0$ или $b = 0$

(*v*) У Буловој алгебри постоји само један први елемент.

(*vi*) У Буловој алгебри постоји само један последњи елемент.

(*vii*) У Буловој алгебри за сваки елемент a постоји само један елемент $\bar{a}$.

Булова алгебра L_2

Дат је скуп $L_2 = \{0, 1\}$. Уведимо на скупу L_2 *бинарне операције* $\cup$ и (зовемо их редом *дисјункција* и *конјункција*) и унарну операцију $^{-}$ (зовемо је *негација*) на следећи начин:

$0 \cup 0 = 0,$ $0 \cup 1 = 1,$ $1 \cup 0 = 1,$ $1 \cup 1 = 1$

$0 \cdot 0 = 0,$ $0 \cdot 1 = 0,$ $1 \cdot 0 = 0,$ $1 \cdot 1 = 1$

$\bar{0} = 1,$ $\bar{1} = 0$

или помоћу табела

a	0	1
$\bar{a}$	1	0

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Разлог за посебно третирање Булове алгебре на скупу L_2 образложићемо следећим: она се највише користи, а апарат који се односи на двовредносне променљиве је још увек најсавршенији. Све теореме наведене у Буловој алгебри $(B, \cup, \cdot, ^{-})$ важе и за Булову алгебру $(L_2, \cup, \cdot, ^{-})$.

Дефиниција 2

(i) Булове константе 0, 1 и Булове променљиве x, y, z, ... су Булови изрази.

(ii) Ако су A и B Булови изрази, тада су $(A \cup B)$, $(A \cdot B)$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ Булови изрази.

(iii) Булови изрази су само они симболи који се добијају коначном применом 1. и 2.

Дефиниција 3

(i) Булови изрази који не садрже дисјункцију зову се *елементарне конјункције*.

(ii) Булови изрази који не садрже конјункцију зову се *елементарне дисјункције*.

Дефиниција 4

(i) Елементарна конјункција C у односу на променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ зове се канонска елементарна конјункција ако свака променљива x_k (или њена негација $\bar{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$) узета једном (и само она) учествује у изградњи конјункције C.

(ii) Елементарна дисјункција D у односу на променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_н$ зове се канонска елементарна дисјункција ако свака променљива x_k (или њена негација $\bar{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$) узета само једном (и само она) учествује у изградњи дисјункције D.

Дефиниција 5

(i) Булов израз облика $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r$, где су $C_1, C_2, \ldots, C_r$ елементарне конјункције зове се дисјунктивна форма (краће DF).

(ii) Булов израз облика $D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_r$, где су $D_1, D_2, \ldots, D_r$ елементарне дисјункције зове се конјуктивна форма (краће KF).

Дефиниција 6

(i) Дисјунктивна форма

$$\bigcup_{i=1}^{m} C_i$$

зове се канонска дисјунктивна нормална форма (краће $KDNF$) у односу на променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ако су $C_a, C_2, \ldots, C_m$ канонске елементарне конјункције у односу на променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(ii) Конјунктивна форма

$$\prod_{i=1}^{m} D_i$$

зове се канонска конјунктивна нормална форма (краће $KKNF$) у односу на променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ако су $D_1, D_2, \ldots, D_m$ канонске елементарне дисјункције у односу на променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Теорема 3 *(о KDNF и KKNF)*

Сваки Булов израз који садржи неке од променљивих $x_1,\ldots,x_n$ може се трансформисати у $KDNF$ (односно $KKNF$) у односу на променљиве $x_1,\ldots,x_n$.

Теорема 4

Булов израз E је $KDNF$ у односу на променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ако и само ако је израз $\bar{E}$ $KKNF$ у односу на променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Булове функције

У овом делу се разматрају функције чији су и оригинали и слике елементи скупа {0, 1}, и зову се Булове функције.

Дефиниција 7

Пресликавање f скупа L_2^n (директни производ $L_2\times L_2\times \ldots \times L_2$) у скуп L_2, у ознаци $f: L_2^n \to L_2$ зовемо Булова функција.

Булове функције најчешће задајемо таблицама или Буловим изразима.

За сваку Булову функцију, дату Буловим изразом, можемо формирати одговарајућу таблицу и обрнуто. Сваку Булову функцију, дату таблицом, можемо представити Буловим изразом.

Теорема 5

Број различитих Булових функција од n променљивих је 2^{2^n}.

Доказ

Како у скупу L_2^n постоји 2^n различитих n-торки, и свакој n-торки можемо придружити само једну вредност 0 или 1, то имамо варијације са понављањем од два елемента класе 2^n. Њихов број је, као што знамо, 2^{2^n}.

Постоји шеснаест различитих Булових функција од две променљиве. Дајемо их у следећој таблици:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Најчешће користимо следеће: $f_2, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{14}$ и f_{15}. Дајемо у следећем списку њихова имена и уобичајено означавање:

$f_2(x, y) = x \cdot y$ функција <u>i</u> (конјунктивна функција)

$f_7(x, y) = x \oplus y$ функција ексклузивно <u>ili</u> (алтернативна функција)

$f_8(x, y) = x \cup y$ функција <u>ili</u> (дисјунктивна функција)

$f_9(x, y) = x \top y$ функција <u>nili</u> (Лукашијевичева функција)

$f_{10}(x, y) = x \Leftrightarrow y$ функција еквивалентности

$f_{14}(x, y) = x \Rightarrow y$ функција импликације

$f_{15}(x, y) = x \perp y$ функција <u>ni</u> (Шеферова функција).

Теорема 6

Скуп Булових функција

$$F = \{f \mid f : L_2^n \rightarrow L\}$$

на коме су уведене бинарне операције „∪” и „·” и унарна операција „‾” на следећи начин:

$$(D_1)\ \ (f_1 \cup f_2) \overset{\text{def}}{\equiv} \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (f_1(\alpha) \cup f_2(\alpha)) x^{\alpha}$$

$$(D_2)\ \ (f_1 \cdot f_2)(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (f_1(\alpha) \cdot f_2(\alpha)) x^{\alpha}$$

$$(D_3)\ \ \bar{f}(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \bigcup_{\alpha \in L_2^n} \overline{f(\alpha)} \cdot x^{\alpha}$$

где је $(x_1, \dots, x_n) = x$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha$, $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$, јесте Булова алгебра.

Више детаља о овој теми може се наћи у додатној математичкој литератури (Gilezan et al., 1977; Огњановић и сар., 2004).

Логичка кола

Пошто смо описали основне елементе логичких кола, у овом делу прескочићемо развој електронике и фокусирати се на математичко објашњење логичких кола у савременој информационој технологији.

Обрада података у дигиталној информационој технологији се реализује помоћу електричних величина (напон, струја), односно електронски склопови информационе технологије обрађују електричне величине којима су представљени подаци. Најпогодније је податке бинарно кодирати, односно представљати их помоћу два дефинисана стања електронских склопова, који се стога називају дигитални склопови, а пошто се ради о електронским колима чешће се користи термин **дигитална кола**.

Два могућа стања дигиталног кола су најчешће два нивоа напона U_1 и U_2. Рецимо, $U_1 = 0V$, а $U_2 = 5V$. Физичким стањима $0V$ и $5V$ одговарају две логичке вредности $\perp$ (лаж) и $\top$ (истина) које се у дигиталној електроници означавају као логичка нула (0) и логичка јединица (1) (види Слику 1).

Слика 1. Логичко и физичко стање дигиталног кола

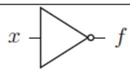
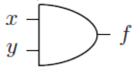
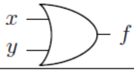
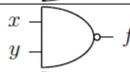
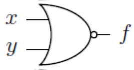
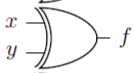
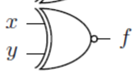
Дата коресподенција између физичких и логичких стања одговара тзв. **позитивној логици**. Могуће је супротно, нижем напону U_1 доделити логичку 1, а вишем напону U_2 логичку 0 и тада се ради о **негативној логици**. Стања и функције дигиталних кола се дакле могу описати помоћу логичких вредности и логичких операција, па се зато уместо термина дигитално коло најчеше користи термин **логичко коло**.

Понашање логичких кола може се описати помоћу **прекидачких** или **Булових функција** које су предмет изучавања **Булове** (или прекидачке) **алгебре**.

Логичко коло је најосновнија јединица неког дигиталног система укључујући како рачунаре тако и осталу информациону технологију.

Свако основно логичко коло је део хардвера или електронског склопа које се може користити за извршавање неких основних логичких израза. Закони Булове алгебре се могу користити у манипулацији бинарних променљивих и поједностављењу логичких израза. Логички закони су заправо имплементирани у дигиталне и информационе системе уз помоћ електронских кола познатих као **логичка кола**.

Логичким операцијама *I*, *ILI* и *NE* одговарају елементарна логичка кола чије су ознаке дате у Табели 1.

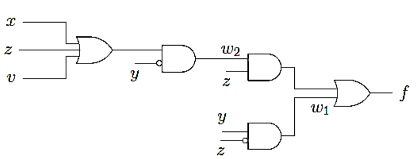
Коло	Ознака	Булова функција
NE (NOT)		$f = \bar{x}$
I (AND)		$f = x \cdot y$
ILI (OR)		$f = x + y$
NI (NAND)		$f = \overline{x \cdot y}$
NILI (NOR)		$f = \overline{x + y}$
EKSILI (EX-OR)		$f = x \oplus y$
NEKSILI (EX-NOR)		$f = \overline{x \oplus y}$

Табела 1.

Сложена логичка кола су састављена из више основних кола. Свако логичко коло се може описати неком Буловом функцијом и обратно, свака Булова функција се може генерисати помоћу неког логичког кола.

Пример 1.

Формирати Булову функцију која описује следеће логичко коло са четири улаза: *x*, *y*, *z* и *w*.



Слика 2.

На слици су уведене ознаке међусигнала: w_1 и w_2. Идући од десног краја шеме (излаз из кола) према улазима, запажамо:

$f = w_1 + zw_2$

$w_1 = y\bar{z},\ w_2 = xzv + \bar{y}$

Сменом израза за w_1 и w_2 у израз за f добијамо коначно:

$f = y\,\bar{z} + z\,(\bar{z} + xzv) = y\bar{z} + \bar{z}y + xzv$

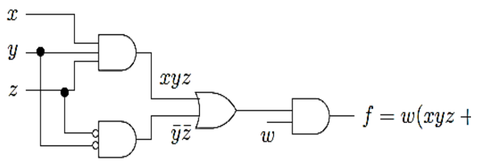
$f = y\bar{z} + z\,(\bar{y} + xv)$

Пример 2.

Формирати логичко коло, које генерише Булову функцију:

$f\,(x, y, z, w) = w(xyz + \bar{y}\bar{z})$

Коло формирамо поступно – слева удесно, поштујући правила о редоследу израчунавања сложеног Буловог израза.



Слика 3.

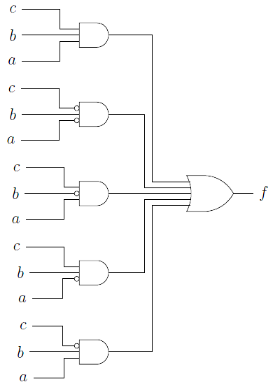
Минимизација логичких кола

Основни задатак алгебре логичких кола је тражење логичких кола, функционално еквивалентних датом логичком колу, да би се из њих издвојило најпростије логичко коло. Универзалног критеријума шта је то најпростије логичко коло, међутим, нема. Као један од критеријума може се узети следећи: логичко коло је најпростије међу свим логичким колима која су му функционално еквивалентна, ако му одговарајући Булов израз садржи најмањи број слова. На тај начин задатак упрошћавања логичког кола своди се на задатак упрошћавања њима одговарајућих Булових израза.

Према томе, трансформација датих логичких кола врши се помоћу основних закона бинарне Булове алгебре.

Пример 3.

Дато је логичко коло (Слика 4).



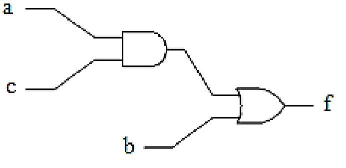
Слика 4.

Упростимо дато логичко коло користећи својства Булове алгебре, тј. одредимо функционално еквивалентно логичко коло са најмање контаката.

Структурна формула датог кола је

$$\begin{aligned} f(a, b, c,) &= abc + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c} + \bar{a}bc \\ &= ab(c + \bar{c}) + \bar{a}b(\bar{c} + c) + ac(b + \bar{b}) \\ &= ab + \bar{a}b + ac \\ &= b(a + \bar{a}) + ac \\ &= b + ac. \end{aligned}$$

Значи, логичко коло које је еквивалентно датом колу, а садржи најмање контаката има структурну формулу $f = ac+b$ (Слика 5).



Слика 5.

Конструкција логичког кола по задатим условима

У предходном одељку разматрали смо задатак: за дато логичко коло написати структурну формулу и обрнуто – за дату структурну формулу конструисати логичко коло. Сада ћемо задатак формулисати овако: конструисати логичко коло по задатим условима рада. Другим речима, ако је дата функција рада једног логичког кола, како га конструисати. Свака функција рада (Булова функција) може се, на основу теореме о *KDNF* и *KKNF*, представити Буловим изразом, који је структурна формула траженог логичког кола. Дакле, цео поступак у решавању овог задатка можемо приказати следећом скицом:

1. Користећи теореме о *KDNF* и *KKNF* напишемо Булов израз за дату функцију рада.

2. Неком од познатих метода минимизирамо добијени Булов израз.

3. Конструишемо логичко коло за добијени минимални Булов израз.

Пример 4.

Конструисати логичко коло са три улаза a, b, c и излазом f који задовољава следеће услове:

1) Ако су улази a, b, c без сигнала, на излазу f постоји сигнал.

2) Ако су улази a и b без сигнала, а на улазу c постоји сигнал, излаз f је без сигнала.

3) Ако су улази a и c без сигнала, а на улазу b постоји сигнал, на излазу f постоји сигнал.

4) Ако је улаз a без сигнала, а на улазима b и c постоји сигнал, на излазу постоји сигнал.

5) Ако су улази b и c без сигнала, а на улазу a постоји сигнал, на излазу f постоји сигнал.

6) Ако је улаз b без сигнала, а на улазима a и c постоји сигнал, на излазу f постоји сигнал.

7) Ако је улаз c без сигнала, а на улазима a и b постоји сигнал, на излазу f постоји сигнал.

8) Ако на сва три улаза a, b и c постоји сигнал, на излазу f постоји сигнал.

Функцију рада траженог логичког кола приказујемо Табелом 2.

Табела 2.

a	b	*c*	*f*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

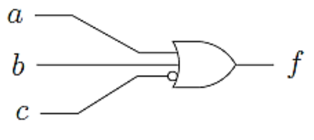
Структурна формула логичког кола је, на основу теореме о *KDNF*:

$f = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$

или, после минимизације,

$f = a + b + \bar{c}$.

Дакле, шема која одговара датим условима рада је (Слика 6):



Слика 6.

Више о логичким колима и њиховој широј употреби може се пронаћи у информатичкој и електротехничкој литератури (Maini, 2007; Bolton, 1990).

Примена у настави

Ученици се са основама Булове алгебре срећу први пут у средњој школи, у области математичке логике, кроз основне логичке законе и исказе без квантификатора, чије променљиве узимају вредности из скупа {0, 1}, односно {⊥, ⊤}.

Проблеми се могу јавити у различитим деловима ове области, али најчешће корен проблема је у схватању и разумевању самих логичких закона и основних операција. На пример, деци је тешко да схвате како један

И нула дају нулу ($1 \wedge 0 = 0$), јер су до сада везник **И** интерпретирали као +.

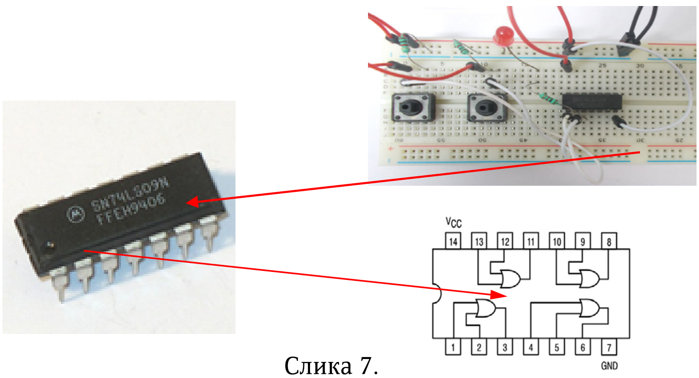
Решење тог и сличних проблема се може наћи у самој основи информационе технологије, тј. логичким колима.

*Конјункција и **I** логичко коло*

I коло је логичко коло које има два или више улаза и један излаз. На излазу ***I*** кола постоји сигнал само у случају када на свим улазима постоји сигнал. У свим осталим случајевима на излазу не постоји сигнал.

Када се интерпретира у позитивној логици ово тврђење значи да излаз ***I*** кола је логичка **1** само ако сви улази узимају вредност логичке **1**. У свим осталим случајевима излаз је логичка **0**.

Сада се такво логичко коло може применити у настави математике, како би се ђацима појаснила конјункција. Када се конструише примитивно ***I*** логичко коло, са једном лед диодом и два прекидача, лако се може показати да заиста важи конјунктивна истинитосна таблица (Табела 3), тј. лед диода ће сијати уколико су оба прекидача укључена. У супротном, лед диода неће сијати. Приказ примитивног ***I*** логичког кола је дат на Слици 7.



Слика 7.

НАПОМЕНА. На Слици 7 је представљено логичко коло, као и неопходно интегрално коло како би ово логичко коло обављало конјунктивну логичку операцију. За ***I*** коло се користи IC-74LS09, а на слици је представљен његов изглед, као и схематски приказ.

Табела 3.

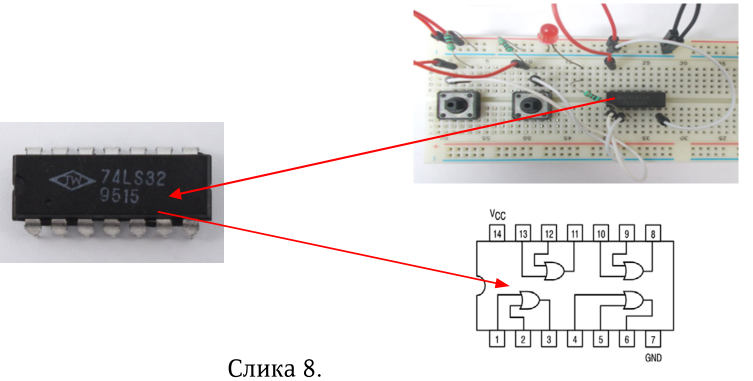
p	q	$p \wedge q$
⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤

*Дисјункција и **ILI** логичко коло*

ILI коло извршава дисјунктивну операцију са две или више логичких промењивих. ***ILI*** коло је логичко коло са два или више улаза и једним излазом. Излаз на ***ILI*** колу је без сигнала једино када су сви улази без сигнала. За све друге комбинације сигнала на улазу, на излазу постоји сигнал. Ово тврђење у позитивној логици се може интерпретирати као:

Излаз на ***ILI*** колу је логичка **0** једино ако су сви улази логичке **0**. За све остале комбинације улазних сигнала, излаз је логичко **1**.

Слично као код ***I*** логичког кола, такво логичко коло се може применити у настави математике, како би се ђацима појаснила дисјункција. Тако конструисано примитивно ***ILI*** логичко коло, са једном лед диодом и два прекидача, примењује се како би се могло показати да заиста важи дисјунктивна истинитосна таблица (Табела 4), тј. лед диода неће сијати само уколико су оба прекидача искључена. У сваком другом случају диода ће сијати. Приказ примитивног ***ILI*** логичког кола је дат на Слици 8.



Слика 8.

НАПОМЕНА. На Слици 8 је представљено логичко коло, као и неопходно интегрално коло како би ово логичко коло обављало дисјунктивну логичку операцију. За ***ILI*** коло користи IC-74LS32, а на слици је представљен његов изглед, као и схематски приказ.

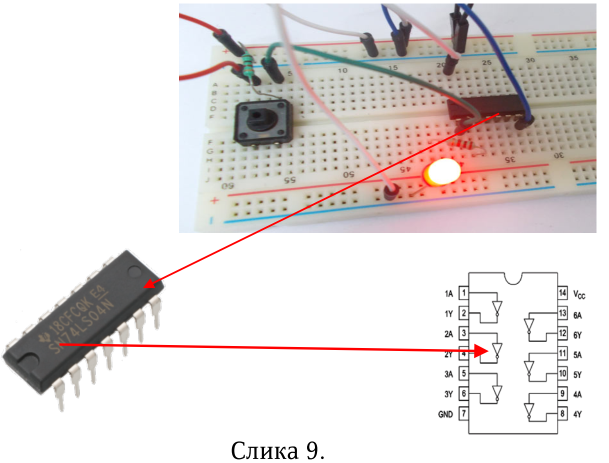
Табела 4.

p	q	$p \vee q$
⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤
⊤	⊤	⊤

*Негација и **NE** логичко коло*

NE коло је логичко коло са једним улазом и једним излазом, чији је излаз увек комплементан улазу и обрнуто, што значи ако на улазу нема сигнала на излазу има сигнала и обрнуто. Када интерпретирамо предходну реченицу у позитивној логици, имамо следеће значење. Логичка **0** на улазу повлачи логичку **1** на излазу, и обрнуто. ***NE*** коло се још назива и комплементно коло или инвертно коло.

Као и код претходних логичких кола, и ***NE*** коло се може искористити у настави математике. Када се конструише примитивно ***NE*** коло, са једном лед диодом и једним прекидачем, лако се може показати да заиста важи истинитосна таблица за негацију (Табела 5), тј. лед диода ће сијати уколико је прекидач искључен. У супротном, лед диода неће сијати. Приказ примитивног ***NE*** логичког кола је дат на Слици 9.



Слика 9.

НАПОМЕНА. На Слици 9 је представљено логичко коло, као и неопходно интегрално коло како би ово логичко коло обављало негацију. За ***NE*** коло користи IC-74LS04, а на слици је представљен његов изглед, као и схематски приказ.

Табела 5.

p	$\neg p$
$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$

Таутологије

Понекада је ученицима тешко да разумеју како је логички израз тачан, када све промењиве тог израза узимају вредности ⊥. Могуће решење овог проблема је конструкција логичког кола које ће представљати модел таутологије. То значи да ће сијалица на таквом логичком колу сијати увек, без обзира у ком положају се налазе прекидачи.

Да би се конструисало логичко коло за дату таутологију потребно је:

- проверити да ли је дати израз заиста таутологија (за проверу користити софтвер Wolfram Alpha (WolframMathematica, 1988));
- сачинити шематски приказ тако задатог логичког кола на основу предходног одељка „Логичка кола" (или помоћу софтвера Wolfram Alpha (WolframMathematica, 1988));
- набавити одговарајуће електронске компоненте и самостално или уз помоћ стручног лица конструисати прототип логичког кола;
- тестирати склоп прототипа,
- уколико је тест прошао, укључити прототип у извођење наставе.

Закључак

Као што се може видети из рада, Булова алгебра има велику примену у информационим технологијама, иако дуго времена није имала примене. Део пажње посвећен је логичким колима, као основним јединицама информационих система, али и као материјализација Булове теорије, што ће у настави математике омогућити лакше схватање појмова Булове алгебре. Применом логичких кола у настави ученици лакше уочавају, разумеју и примењују логичке законе и правила. Поред тога, логичка кола, тј. њихова конструкција може заинтересовати ученике да се баве истраживањем у области електротехнике, физике и информатике, као и математике. То нас доводи до следећег закључка.

Коришћење информационих технологија у настави Булове алгебре подразумева и одређене промене у наставним облицима и методама како би се образовни процес подигао на квалитетнији и савременији ниво.

Литература

Bolton, M. (1990). *Digital systems design with programmable logic*, Workingham: AddisonWesley Publishing Company.

Boole, G. (2007). *An Investigation of the Laws of Thought*, New York: Cosimo, inc.

Гилезан, К., Латиновић, Б. (1997). *БУЛОВА АЛГЕБРА и примене*, Београд: Математички институт.

Maini, A. K. (2007). *Digital Electronics: Principles, Devices and Applications*, John Wiley & Sons, Ltd, West Sussex.

Огњановић, З., Крџавац, Н. (2004). *Увод у теоријско рачунарство*, Београд –Крагујевац: Факултет организационих наука.

Shannon, C. E. (1949). *The Mathematical Theory of Communication*, University of Illinois Press, Illinois.

WolframMathematica (1988) Wolfram|Alpha (2009) Retrieved April 23, 2012 from the World Wide Web http://www.wolframalpha.com/.

Suzana Đorđević
University of Kragujevac
Faculty of Education in Jagodina

APPLICATION OF INFORMATION TECHNOLOGY IN TEACHING OF BOOLEAN ALGEBRA

Summary: In various scientific disciplines, especially in mathematics, computer science, technology, economy, sociology and medicine, solutions to many problems can be transformed in the form of "yes" or "no" or "0" or "1". This fact, among other things, accelerated the development of electronics and digital technology, and thus Boolean algebra, especially two-valued Boolean algebra. The paper contains three chapters. The first chapter discusses the definition of Boolean algebra, two-valued Boolean algebra and Boolean functions. The second chapter deals with the application of Boolean algebra in computer science through logic gates. The third chapter considers the application of logic gates and various examples from information technology in teaching mathematics, so that students can more easily understand Boolean algebra and logical operations.

Keywords: Boolean algebra, Boolean functions, information technology, logic gates.