# ZBORNIK RADOVA

SA NAUČNO-STRUČNOG SKUPA

# IRMES '04

ISTRAŽIVANJE I RAZVOJ
MAŠINSKIH ELEMENATA I SISTEMA

# PROCEEDINGS

*OF THE CONFERENCE*

# IRMES '04

*RESEARCH AND DEVELOPMENT OF MACHINE ELEMENTS AND SYSTEMS*

Kragujevac (SCG), 16 i 17. septembar 2004. godine

MAŠINSKI FAKULTET U KRAGUJEVCU
*JUGOSLOVENSKO DRUŠTVO ZA MAŠINSKE ELEMENTE I KONSTRUKCIJE*
Naučno-stručni skup
IRMES '04 ISTRAŽIVANJE I RAZVOJ MAŠINSKIH ELEMENATA I SISTEMA
Kragujevac, *16. i 17. septembar 2004. god.* Hotel *"Šumarice"*

# GEOMETRIJSKI PARAMETRI TROHOIDNIH PROFILA I NJIHOVA PRIMENA KOD UNUTRAŠNJEG OZUBLJENJA

**Lozica Ivanović, Danica Josifović**

*U radu su predstavljeni osnovni principi generisanja trohoidnih profila, kao i mogućnosti njihove primene na elementima rotacionih mašina. Primena trohoida za oblikovanje profila radnih elemenata rotacionih mašina omogućava da se variranjem geometrijskih parametara realizuje veliki broj različitih kombinacija zupčastih parova. Za analizu uticaja geometrijskih parametara na oblik i karakteristike trohoidnih profila izvedene su jedinstvene jednačine, koje odgovarajućim izborom parametara opisuju različite trohoidne oblike i spregnute obvojnice.*

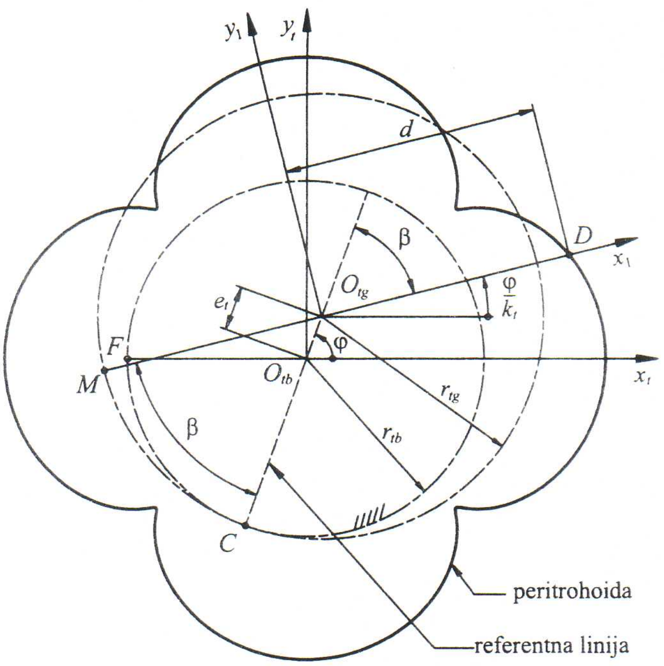
## 1. Uvod

Za geometrijski oblik profila ozubljenja, prema osnovnom zakonu o sprezanju zupčanika, pogodno je koristiti ciklične krive – rulete. Posebnu grupu krivih linija iz porodice ruleta predstavljaju trohoide, koje nastaju kao putanje tačke fiksirane u ravni kruga koji se kotrlja bez klizanja po drugom nepokretnom krugu [1]. Primena trohoide u svojstvu geometrijskog oblika osnovnog profila prisutna je kod specijalnih unutrašnjih ozubljenja. Spregnuti profil se može predstaviti kao obvojnica uzastopnih položaja osnovnog profila pri njegovom relativnom kretanju. Prema tome spregnuti profili predstavljaju uzajamno obvojne krive, čija geometrija zadovoljava osnovni zakon sprezanja.

## 2. Definisanje oblika profila ozubljenja

### 2.1. Geometrija trohoide

U cilju predstavljanja trohoide u analitičkom obliku uvodi se koordinatni sistem trohoide $O_{tb}x_ty_t$ čiji se početak postavlja u središte nepokretnog kruga, a apscisa kroz početnu tačku dodira datih kinematskih krugova. Osnovni geometrijski odnosi pri generisanju jedne od trohoida, peritrohoide, ilustrovani su na slici 2.1. Središte i poluprečnik pokretnog (generišućeg) kruga su označeni kao $O_{tg}$ i $r_{tg}$, a nepokretnog (osnovnog) kao $O_{tb}$ i $r_{tb}$. Rastojanje između dva središta je ekscentricitet trohoide $e_t$.




***Slika 2.1.*** *Generisanje peritrohoide*

Za središte pokretnog kruga vezuje se generišući koordinatni sistem $O_{tg}x_1y_1$. Tačka koja opisuje trohoidu je generišuća tačka $D$, nalazi se na osi $x_1$ na udaljenju $d$ od $O_{tg}$ i ta veličina predstavlja poluprečnik trohoide. Linija koja spaja središta $O_{tb}$ i $O_{tg}$ i prolazi kroz tačku dodira dva kruga, tj. kinematski pol $C$, predstavlja referentnu liniju. U toku relativnog kretanja kinematskih krugova, dok referentna linija rotira za ugao $\varphi$ u odnosu na osu $x_t$, generišući sistem rotira za ugao $\phi = \varphi / k_t$ u odnosu na istu osu, a generišuća tačka opisuje deo trohoide. Prema tome, veličina $k_t$ predstavlja prenosni odnos trohoide. Na osnovu geometrijskih odnosa sa slike 2.1 i iz uslova kotrljanja bez klizanja izvode se jednačine koje definišu koordinate tačke $D$ peritrohoide:

$$x_t = e_t\left(\cos\varphi + \lambda k_t \cos\frac{\varphi}{k_t}\right), \quad y_t = e_t\left(\sin\varphi + \lambda k_t \sin\frac{\varphi}{k_t}\right), \tag{2.1}$$

pri čemu je $\lambda$ koeficijent trohoide, koji definiše odnos između veličina poluprečnika trohoide i poluprečnika pokretnog kruga $\lambda = d/e_t k_t$. U zavisnosti od vrednosti $k_t$ jednačine (2.1) opisuju različite trohoide. S obzirom na to da se trohoide mogu opisati jedinstvenim jednačinama, kao i na njihove druge zajedničke osobine, u daljim razmatranjima obe vrste krivih (peritrohoide i hipotrohoide) posmatraće se istovremeno, uz odgovarajući izbor vrednosti koeficijenta $k_t$.

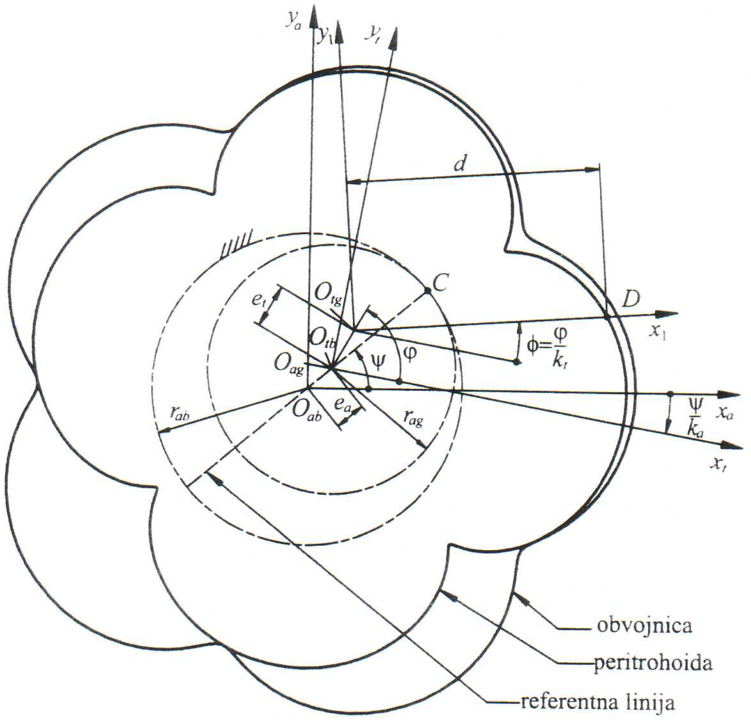
## 2.2. Geometrija obvojnice

U prethodnom poglavlju je pokazano da se kao geometrijski oblik osnovnog profila zupca može izabrati trohoida, sa parametrima koji zadovoljavaju određene uslove. Spregnuti profil se dobija kao obvojnica osnovnog profila pri relativnom kotrljanju bez klizanja kinematskih krugova. Osnovni geometrijski odnosi pri generisanju spregnute obvojnice ilustrovani su na slici 2.2. Za definisanje njenog oblika uvode se pojmovi i oznake analogno sa trohoidom, samo se umesto indeksa $t$ uvodi indeks $a$.

U toku relativnog kretanja kinematskih krugova, dok referentna linija rotira za ugao $\psi$ u odnosu na osu $x_a$, generišući sistem rotira za ugao $\psi / k_a$ u odnosu na istu osu, pri čemu veličina $k_a$ predstavlja prenosni odnos obvojnice. Kada $k_a$ ima negativnu vrednost tada koordinatni sistem trohoide rotira u suprotnom smeru od referentne linije. Pri izvođenju jednačina koje opisuju obvojnicu posmatra se kretanje tačke $D$ trohoide u odnosu na nepokretni koordinatni sistem obvojnice.

Prema tome, parametarske jednačine te tačke su:

$$
\begin{aligned}
x_a &= e_a \cos\psi + e_t \left\{ \cos\left(\varphi + \frac{\psi}{k_a}\right) + \lambda k_t \cos\left(\frac{\varphi}{k_t} + \frac{\psi}{k_a}\right) \right\} \\
y_a &= e_a \sin\psi + e_t \left\{ \sin\left(\varphi + \frac{\psi}{k_a}\right) + \lambda k_t \sin\left(\frac{\varphi}{k_t} + \frac{\psi}{k_a}\right) \right\}
\end{aligned}
\quad . \qquad (2.2)
$$




***Slika 2.3.*** *Generisanje obvojnice (opšti slučaj)*

Prema veličini ekscentriciteta izvršena je podela obvojnica u dve grupe: obvojnice tipa *a*, kada je $e_a < e_t$, i obvojnice tipa *b*, kada je $e_a = e_t$ [2]. U slučaju kada je $e_a > e_t$ dolazi do pojave petlji na obvojnici ili diskontinuiteta kontakta i tada one nisu pogodne za praktičnu primenu. Za dalju analizu, u cilju dobijanja jednostavnijih izraza, uvode se ugaoni parametri od kojih jedan, označen kao $\xi$, definiše polovinu zbira uglova rotacije referentnih linija trohoide i obvojnice, a drugi, označen kao $\eta$, polovinu njihove razlike [2]. Ovi parametri se mogu izraziti u sledećem obliku:

$$
\xi = \frac{1}{2}\left[\left(\varphi + \frac{\psi}{k_a}\right) + \psi\right], \quad \eta = \frac{1}{2}\left[\left(\varphi + \frac{\psi}{k_a}\right) - \psi\right] . \qquad (2.3)
$$

Pri određivanju tačke obvojnice polazi se od uslova da je izabrana vrednost $y_a$ = const. Tada se variranjem vrednosti ugaonih parametara određuju vrednosti za $x_a$, pri čemu minimalna vrednost definiše tačku unutrašnje, a maksimalna vrednost tačku spoljašnje obvojnice. Za određivanje tih ekstremnih vrednosti uvodi se Lagranžova metoda neodređenih multiplikatora [3] i definiše se funkcija $Z$ na sledeći način:

$$
Z = x_a + \Lambda\left(f_{y_a} - y_a\right) \qquad (2.4)
$$

gde je $\Lambda$ Lagranžov multiplikator. Iz jednačina (2.3) mogu da se izraze uglovi $\varphi$ i $\psi$ u funkciji parametara $\xi$ i $\eta$, a posle zamene ovih izraza u jednačine (2.2) i njihovim sređivanjem dobijaju se jednačine koje definišu koordinate tačke trohoide koja generiše obvojnicu. Sada se dobijene jednačine uvrste u ( 2.4), a zatim se nalaženjem parcijalnih izvoda funkcije $Z$ po $\xi$ i $\eta$ i njihovim izjednačavanjem sa nulom dobijaju jednačine iz kojih se može eliminisati Lagranžov multiplikator $\Lambda$. Na taj način se dobija izraz kojim su definisana potrebna ograničenja za $\xi$ i $\eta$, tako da se može pristupiti izvođenju jednačina koje opisuju obvojnicu osnovnog profila trohoide. Pri izvođenju jednačina obvojnice polazi se od uslova $k_a = 1 - k_t$. Posle zamene ovog uslova u jednačine (2.3) i (2.4), kao i na osnovu određenih matematičkih operacija i uvedenih smena za pojedine izraze dobija se konačna jednačina kojom se uspostavlja veza između uglova $\xi$ i $\eta$. Iz ove jednačine može da se izrazi sin $\xi$ i cos$\xi$ [2]. Na osnovu prethodnog razmatranja mogu se napisati opšte jednačine za obvojnicu tipa ($a$), kada je $e_a < e_t$:

$$\begin{aligned} x_a &= e_t\left[(1+k_e)\cos\xi\cos\eta - (1-k_e)\sin\xi\sin\eta + \lambda k_t \cos\frac{2\eta}{k_t}\right] \\ y_a &= e_t\left[(1-k_e)\cos\xi\sin\eta + (1+k_e)\sin\xi\cos\eta + \lambda k_t \sin\frac{2\eta}{k_t}\right] \end{aligned}, \tag{2.5}$$

gde je $k_e = e_a / e_t$ - koeficijent ekscentriciteta.

Kao što je već rečeno za obvojnicu tipa ($b$) ekscentricitet obvojnice je jednak ekscentricitetu trohoide, odnosno $k_e = 1$ ili $e_a = e_t = e$. Polazeći od ovog uslova, kao i na osnovu određenih matematičkih operacija i uvedenih smena za pojedine izraze dobijaju se jednačine obvojnice tipa ($b$) u konačnom obliku:

$$\begin{aligned} x_a &= e\left\{\lambda k_t \cos\frac{2\eta}{k_t} - \frac{1}{\lambda}\sin 2\eta \sin\frac{2\eta}{k_t} \pm 2\left[\cos^2\eta - \left(\frac{\sin 2\eta}{2\lambda}\right)^2\right]^{1/2} \cos\frac{2\eta}{k_t}\right\} \\ y_a &= e\left\{\lambda k_t \sin\frac{2\eta}{k_t} + \frac{1}{\lambda}\sin 2\eta \cos\frac{2\eta}{k_t} \pm 2\left[\cos^2\eta - \left(\frac{\sin 2\eta}{2\lambda}\right)^2\right]^{1/2} \sin\frac{2\eta}{k_t}\right\} \end{aligned}. \tag{2.6}$$

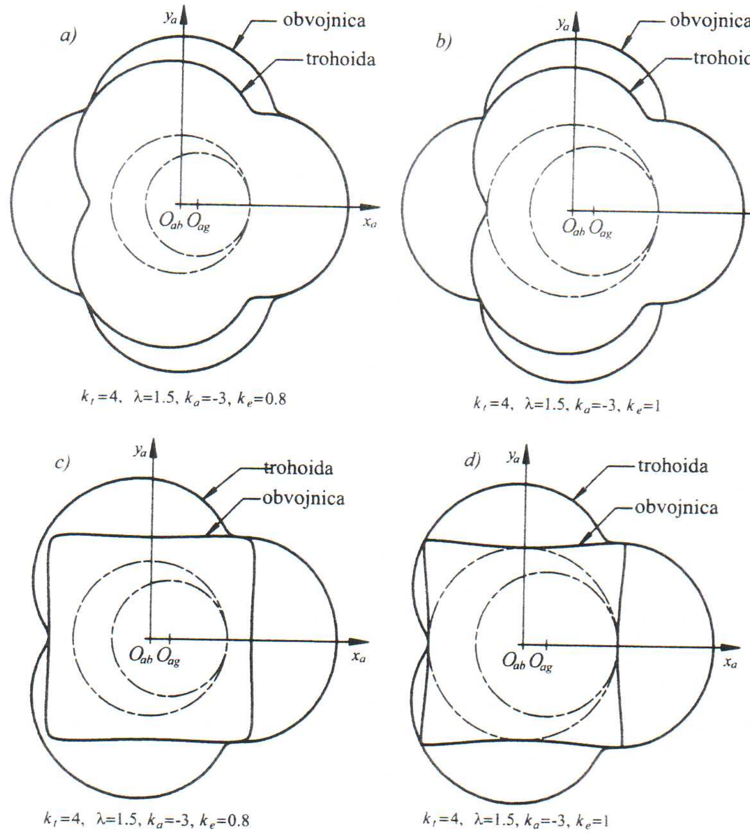
U jednačini (2.6) znak "+" se odnosi na spoljašnju, a znak "−" na unutrašnju obvojnicu.

Iz prethodnog izlaganja sledi da se za datu trohoidu mogu odrediti četiri obvojnice i to: spoljašnja obvojnica tipa $(a)_s$, unutrašnja obvojnica tipa $(a)_u$, spoljašnja obvojnica tipa $(b)_s$ i unutrašnja obvojnica tipa $(b)_u$. Primeri različitih trohoida i njihovih spregnutih obvojnica dati su na slikama 3.1 – 3.4 i biće detaljno analizirani u sledećem poglavlju.

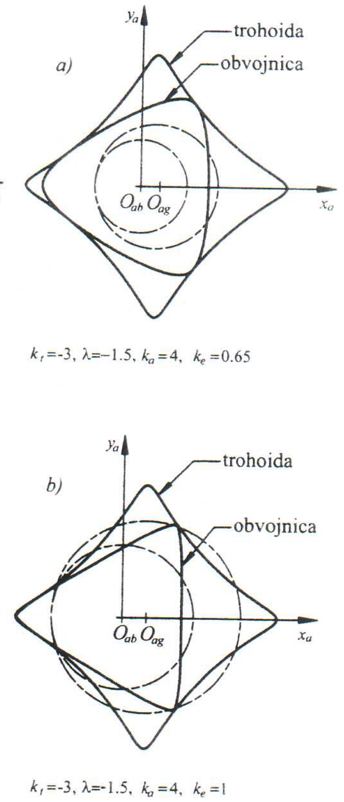
## 3. Modeliranje trohoidnog ozubljenja i analiza dobijenih rezultata

U prethodnom poglavlju su određene parametarske jednačine trohoida i njihovih spregnutih obvojnica, kao i ograničavajući uslovi za dobijanje para spregnutih profila koji se potencijalno mogu primeniti u praksi. Na bazi matematičkog modela kreiran je kompjuterski program CITRO, u standardnom programskom jeziku AutoLISP, za proračun koordinata navedenih krivi i za njihovo automatsko generisanje [4]. Program je testiran, a rezultati su dati u obliku spregnutih zupčastih parova (slike 3.1-3.4).

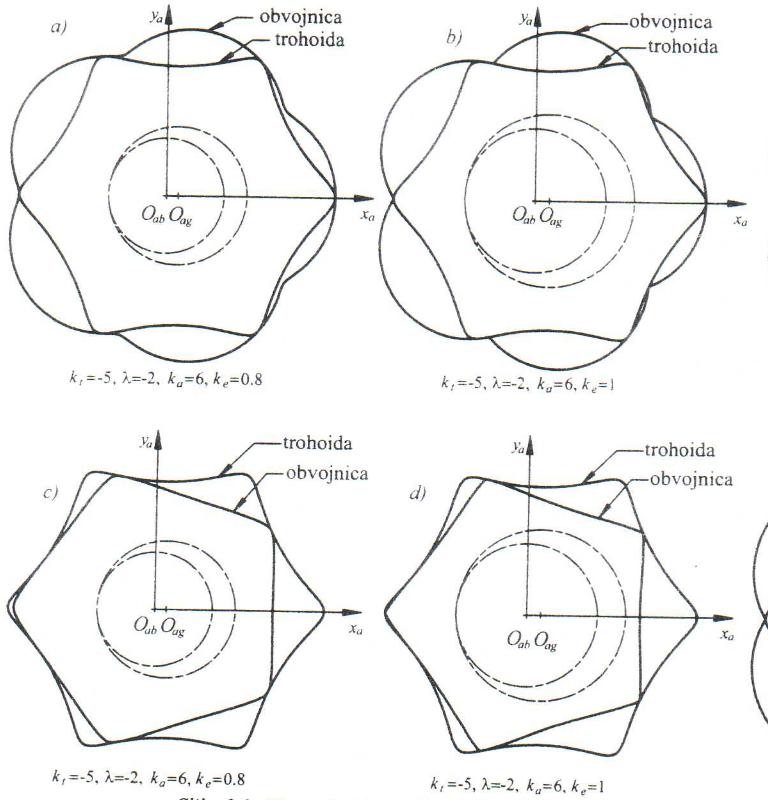
Na slici 3.1 su prikazane četiri obvojnice jedne iste peritrohoide, a na slici 3.2 su date obvojnice za hipotrohoidu. Očigledno je da spregnute obvojnice za peritrohoidu imaju jednu granu više od trohoide, a za hipotrohoidu jednu granu manje. Generalno, sve obvojnice tipa ($b$) imaju vrhove, koji su u neprekidnom kontaktu sa trohoidom. Osim toga, kontakt se ostvaruje i sa granama obvojnice naizmenično, tako da se broj tačaka dodira povećava. Slike 3.1-3.3 ilustruju kako smanjenje ekscentriciteta obvojnice utiče na njen oblik i karakteristike sprezanja.Može se zaključiti da sve obvojnice tipa (*a*) imaju glatku krivu, što znači da vrhovi nestaju i sprezanje je povoljnije s obzirom na rast poluprečnika krivine.



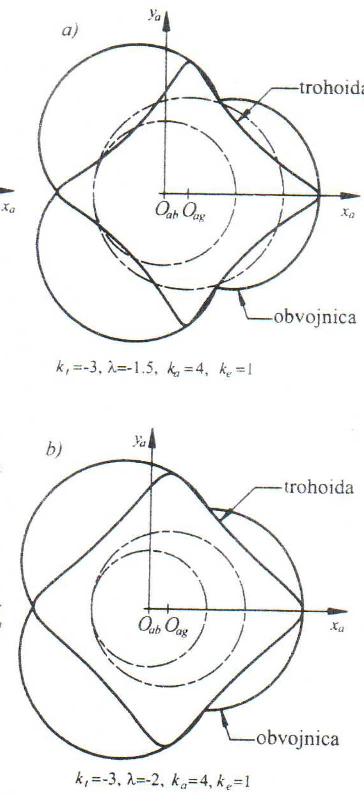

*Slika 3.1. Peritrohoida sa obvojnicama:*
*a)tipa (a)s b)tipa (b)s c)tipa (a)u d)tipa (b)u*




*Slika 3.3. Hipotrohoida sa obvojnicama:*
*a)tipa (a)u b)tipa (b)u*




*Slika 3.2. Hipotrohoida sa obvojnicama:*
*a)tipa (a)s b)tipa (b)s c)tipa (a)u d)tipa (b)u*




*Slika 3.4. Hipotrohoide sa obvojnicama:*
*a)tipa (b)s b)tipa (b)s*

Međutim, broj tačaka dodira se smanjuje i jednak je broju grana trohoide, a smanjuje se i stepen kompresije primenjene radne mašine, koji se definiše kao odnos maksimalne i minimalne radne zapremine. Može se zapaziti da se veće vrednosti stepena kompresije ostvaruju kod obvojnica tipa (*b*), kao što se može videti na slici 3.4. Slika 3.4 takođe ilustruje kako povećanje koeficijenta trohoide utiče na njen oblik i karakteristike sprezanja. Stepen kompresije je veći pri većim vrednostima koeficijenta trohoide. Međutim, sa njegovim rastom dolazi do povećanja brzine klizanja, što dovodi do intenzivnog habanja. Međusobnim poređenjem trohoida i spregnutih obvojnica prikazanih na slikama 3.1,*d* i 3.4,*a* može se zaključiti da svakoj peritrohoidi sa spregnutom obvojnicom tipa $(b)_u$ odgovara slična hipotrohoida sa spregnutom obvojnicom tipa $(b)_s$ , i obrnuto, samo je njihov relativni položaj promenjen.

## 4. Zaključak

Analizom karakteristika različitih varijanti trohoidnih parova dolazi se do zaključka da je najbolje primeniti parove kod kojih unutrašnji element ima jednu granu manje od spoljašnjeg, a to znači: hipotrohoidni profil sa unutrašnjom obvojnicom ili peritrohoidni profil sa spoljašnjom obvojnicom. Iako je pokazano da obvojnice tipa (*a*) imaju glatku krivu, čiji je oblik povoljniji od oblika obvojnica tipa (*b*), smanjenjem ekscentriciteta smanjuju se i poluprečnici kinematskih krugova, što za posledicu ima povećanje klizanja u tačkama dodira. Prema tome, sa gledišta inženjerskog konstruisanja, preporučuje se izbor obvojnica tipa (*b*), uz primenu modifikacije osnovnog profila.

## Literatura


[1] Savelov A.A.: Ploskie krivie, Fizmatgiz, Moskva, 1960.

[2] Shung J.B., Pennock G. R.: Geometry for trochoidal-type machines with conjugate envelopes, Mech. Mach. Theory, 1994., Vol. 29. No. 1. str. 25-42.

[3] Mamuzić Z., Đerasimović B.: Osnovi matematičke analize, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

[4] Ivanović L.: Analiza geometrijslih parametara neevolventnog oblika profila cilindričnih zupčanika, Magistarski rad, Mašinski fakultet, Kragujevac, 1995.


# GEOMETRICAL PARAMETERS OF TROCHOIDAL PROFILE AND THEIR APPLICATION AT THE INTERNAL GEARING


*In this paper the basic principles of generating trochoidal profile is presented as also the possibilities their application on the elements of rotated machines. Application of trochoides to designing of the profile working elements of rotated machines give the possibility that with various geometrical parameters realize numerous different combinations of the gear pairs. To analyses of the influence of geometrical parameters on the form and characteristics of trochoidal profile are derived the singular equations, which trough the chouse of parameters describe the different trochoidal forms. Also the corresponding envelopes are presented in the analytical form.*



Mr Lozica Ivanović, asistent, dr Danica Josifović, redovni profesor
Mašinski fakultet, Sestre Janjić 6, 34000 Kragujevac