XXII

Jugoslovensko savetovanje
za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku

zbornik radova

naučni skup
sa međunarodnim učešćem

24.-26. 9. 2004.
Beograd

Nacrtna geometrija 2004

XXII
Jugoslovensko savetovanje
za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku
– *Zbornik radova* –
naučni skup sa međunarodnim učešćem

Recenzenti:	dr Aleksandar Čučaković dr Jelena Maksić dr Branislav Popkonstantinović
Za izdavača:	dekan, dr Momčilo Miljuš
Glavni i odgovorni urednik:	dr Snežana Pejčić-Tarle
Urednik publikacije:	dr Branislav Popkonstantinović
Tehnički urednik:	Gordana Marjanović
Obrada teksta i korice:	dr Branislav Popkonstantinović
Izdavač:	Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu, Vojvode Stepe 305, telefon: 3096–207 fax: 3096–704 http://www.sf.bg.ac.yu
Štampa:	Izdavačka delatnost Saobraćajnog fakulteta, Beograd telefon: 3091–344; 3091–329 e-mail: izdavacka_delatnost@sf.bg.ac.yu
Tiraž:	100 primeraka

ISBN 86–7395–169–0

CIP – КАТАЛОГИЗАЦИЈА У ПУБЛИКАЦИЈИ
Народна библиотека Србије, Београд

514.18 (082)
004.92 (082)

Југословенско саветовање за нацртну геометрију и инжењерску графику (22 ; 2004 ; Београд)

Zbornik radova : naučni skup sa međunarodnim učešćem / XXII Jugoslovensko savetovanje za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku moNGeometrija 2004, Beograd, 24. - 26. 9. 2004. ; (urednik Branislav Popkonstantinović). - Beograd : Saobraćajni fakultet Univerziteta, 2004 (Beograd : Izdavačka delatnost Saobraćajnog fakulteta). - 282 str. : ilustr. ; 24 cm

Tekst na srp. i engl. jeziku. - Tiraž 100. - Str. 3-4: Predgovor / uredništvo. - Napomene uz tekst. - Bibliografija uz svaki rad. - Rezimei na engleskom jeziku: str. 255-281.

ISBN 86-7395-169-0

а) Нацртна геометрија – Зборници б) Рачунарска графика – Зборници

COBISS.SR–ID 116117260

MODELIRANJE I SIMULACIJA TROHOIDNOG OZUBLJENJA

Lozica Ivanović[1]
Danica Josifović[2]

Rezime

U radu je koncipiran teorijski model generisanja ozubljenja sa trohoidnim profilom, koji se bazira na teoremi o dvostrukoj realizaciji trohoida. Pokazano je kako se u parametarskom obliku može opisati trohoidni profil, koji odgovarajućim izborom parametara dobija različite oblike. Spregnuti profil je odgovarajuća unutrašnja ili spoljašnja obvojnica. Dobijeni izrazi za proračun koordinata profila u kombinaciji sa ograničavajućim faktorima, omogućili su razvoj algoritma i odgovarajućeg programa za automatsko crtanje trohoidnog ozubljenja. Na bazi matematičkog modela kreiran je kompjuterski program TIA, u standardnom programskom jeziku AutoLISP, za proračun koordinata navedenih krivih i za njihovo automatsko generisanje. Razmatrane su i mogućnosti njihove primene kod rotacionih mašina.

Ključne reči: trohoida, obvojnica, modeliranje

1. UVOD

Trohoidne mašine pripadaju grupi planetnih rotacionih mašina, čija je kinematika zasnovana na principu planetnog mehanizma sa

[1] Lozica Ivanović, magistar, asistent, Mašinski fakultet u Kragujevcu
[2] Danica Josifović, doktor nauka, redovni profesor, Mašinski fakultet u Kragujevcu

unutrašnjim ozubljenjem. Kod ove vrste ozubljenja, pokretni krug se kotrlja bez klizanja po drugom nepokretnom krugu i pri tome, izabrana tačka opisuje profil zupca, odnosno trohoidu [3]. Nepokretni krug je, uslovno uzeto, kinematski krug zupčanika. Spregnuti profil se može predstaviti kao obvojnica uzastopnih položaja osnovnog profila pri njegovom relativnom kretanju. Prema tome spregnuti profili predstavljaju uzajamno obvojne krive, čija geometrija zadovoljava osnovni zakon sprezanja zupčanika.

2. DEFINISANJE OBLIKA PROFILA OZUBLJENJA

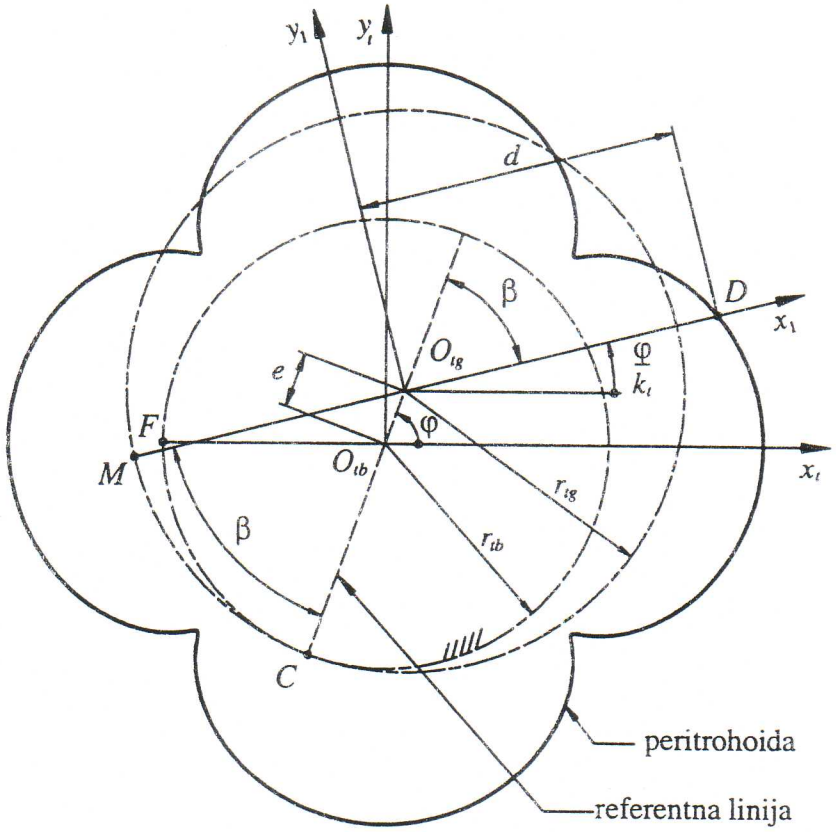
2.1. Generisanje trohoide

Da bi se u analitičkom obliku predstavile trohoide uvodi se koordinatni sistem trohoide $O_{tb}x_ty_t$, a njegov početak postavlja u središte nepokretnog kruga, pri čemu apscisa prolazi kroz početnu tačku dodira datih kinematskih krugova.

Na slici 2.1 su prikazani osnovni geometrijski odnosi pri generisanju jedne od trohoida, peritrohoide. Sa O_{tg} i r_{tg} su obeleženi središte i poluprečnik pokretnog (generišućeg) kruga, a sa O_{tb} i r_{tb} nepokretnog (osnovnog) kruga. Ekscentricitet trohoide e predstavlja rastojanje između dva središta kruga. Generišući koordinatni sistem $O_{tg}x_1y_1$ se vezuje za središte pokretnog kruga. Generišuća tačka D je tačka koja opisuje trohoidu i nalazi se na osi x_1 na udaljenju d od O_{tg} i predstavlja veličinu poluprečnika trohoide. Referentnu liniju određuje linija koja spaja središta O_{tb} i O_{tg} i prolazi kroz tačku dodira dva kruga, odnosno kinematski pol C. Pri relativnom kretanju kinematskih krugova, dok referentna linija rotira za ugao φ u odnosu na osu x_t, generišući sistem rotira za ugao φ/k_t u odnosu na istu osu, a generišuća tačka opisuje deo trohoide. Prenosni odnos trohoide predstavlja veličina k_t. Koordinate tačke D peritrohoide izvode se na osnovu geometrijskih odnosa datih na slici 2.1 i iz uslova kotrljanja bez klizanja $(\ell_{FC} = \ell_{MC})$:

$$x_t = e\left(\cos\varphi + \lambda k_t \cos\frac{\varphi}{k_t}\right), \quad y_t = e\left(\sin\varphi + \lambda k_t \sin\frac{\varphi}{k_t}\right), \qquad (2.1)$$

gde je λ koeficijent trohoide kojim se definiše odnos između veličina poluprečnika trohoide i poluprečnika pokretnog kruga $\lambda = d/ek_t$.

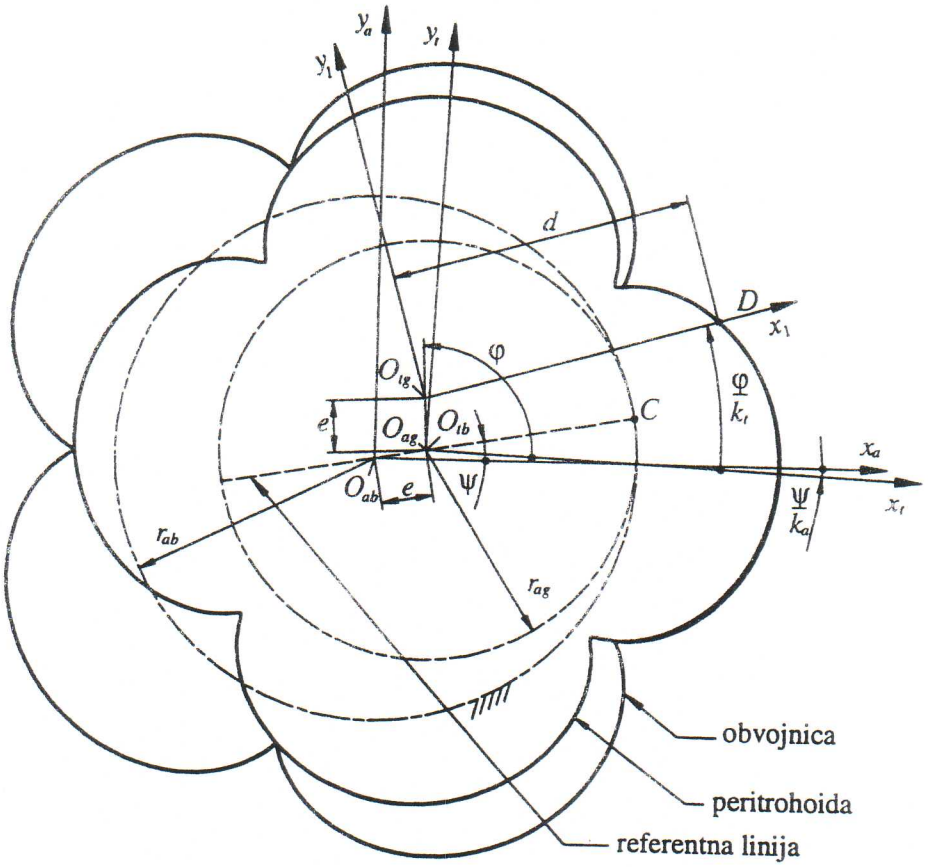


Slika 2.1. *Generisanje peritrohoide*

Jednačine (2.1) opisuju različite trohoide zavisno od vrednosti k_t. Kako se trohoide mogu opisati jedinstvenim jednačinama, a ako se uzmu u obzir i njihove druge zajedničke osobine, kroz dalja razmatranja obe vrste krivih (peritrohoide i hipotrohoide) biće posmatrane istovremeno, pri čemu se uzimaju odgovarajuće vrednosti koeficijenta k_t.

2.2. Generisanje obvojnice

Kroz prethodno poglavlje je prikazano da se trohoida može izabrati kao geometrijski oblik osnovnog profila zupca sa parametrima koji zadovoljavaju određene uslove. Pri relativnom kotrljanju bez klizanja kinematskih krugova dobija se spregnuti profil kao obvojnica osnovnog profila. Na slici 2.2 su ilustrovani osnovni geometrijski odnosi pri generisanju spregnute obvojnice. Kod definisanja oblika obvojnice uvode se pojmovi i oznake analogno sa trohoidom, ali se umesto indeksa *t* uvodi indeks *a*.



Slika 2.2. *Generisanje obvojnice*

Pri relativnom kretanju kinematskih krugova, kada referentna linija rotira za ugao ψ u odnosu na osu x_a, generišući sistem rotira za ugao ψ/k_a u odnosu na istu osu, a veličina k_a je prenosni odnos obvojnice. U slučaju da k_a ima negativnu vrednost, tada koordinatni sistem trohoide rotira u suprotnom smeru od referentne linije. Kod izvođenja jednačina koje opisuju obvojnicu smatra se da se tačka D trohoide kreće u odnosu na nepokretni koordinatni sistem obvojnice.

Tada, parametarske jednačine te tačke glase:

$$\begin{aligned} x_a &= e\left\{\cos\psi + \cos\left(\varphi + \frac{\psi}{k_a}\right) + \lambda k_t \cos\left(\frac{\varphi}{k_t} + \frac{\psi}{k_a}\right)\right\} \\ y_a &= e\left\{\sin\psi + \sin\left(\varphi + \frac{\psi}{k_a}\right) + \lambda k_t \sin\left(\frac{\varphi}{k_t} + \frac{\psi}{k_a}\right)\right\}, \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Ovaj rad će detaljno razmatrati samo obvojnice kod kojih je broj grana za jedan veći ili manji od broja grana trohoide. Na osnovu vrednosti k_a data je podela obvojnica u dve grupe [4]: obvojnice tipa 1, kada je k_a=1-k_t, i obvojnice tipa 2, kada je $k_a = k_t$-1.

U cilju dobijanja jednostavnijih izraza u daljem razmatranju se uvode ugaoni parametri od kojih je jedan označen sa ξ i definiše polovinu zbira uglova rotacije referentnih linija trohoide i obvojnice, a drugi je označen sa η i predstavlja polovinu njihove razlike [4]. Parametri ξ i η se mogu dati u sledećem obliku:

$$\xi = \frac{1}{2}\left[\left(\varphi + \frac{\psi}{k_a}\right) + \psi\right], \quad \eta = \frac{1}{2}\left[\left(\varphi + \frac{\psi}{k_a}\right) - \psi\right]. \tag{2.3}$$

Kod određivanja tačke obvojnice polazi se od uslova pri kome je izabrana vrednost y_a=const. Variranjem vrednosti ugaonih parametara, u tom slučaju, određuju se vrednosti za x_a, gde minimalna vrednost definiše tačku unutrašnje, a maksimalna vrednost tačku spoljašnje obvojnice. Da bi se odredile ove ekstremne vrednosti uvodi se Lagranžova metoda neodređenih multiplikatora [2] i definiše funkcija Z preko izraza:

$$Z = x_a + \Lambda\left(f_{y_a} - y_a\right), \tag{2.4}$$

pri čemu je Λ Lagranžov multiplikator. Na osnovu jednačina (2.3) mogu da se izraze uglovi φ i ψ u funkciji parametara ξ i η, a zatim smenom ovih izraza u jednačine (2.2) i sređivanjem istih dobijaju se jednačine na osnovu kojih mogu da se odrede koordinate tačke trohoide koja generiše obvojnicu. Zatim se dobijene jednačine uvrste u (2.4) i nalaženjem parcijalnih izvoda funkcije Z po ξ i η i njihovim izjednačavanjem sa nulom dobijaju se jednačine iz kojih se može eliminisati Lagranžov multiplikator Λ. Ovim putem dobija se izraz kojim su definisana potrebna ograničenja za ξ i η, čime su se ostvarili uslovi za izvođenje jednačina koje opisuju obvojnicu osnovnog profila trohoide.

Kod izvođenja jednačina obvojnice tipa 1 polazi se od uslova $k_a = 1 - k_t$. Zamenom ovog uslova u jednačine (2.3) i (2.4) i na osnovu određenih matematičkih operacija i uvođenjem smena za pojedine izraze dobija se konačna jednačina koja daje vezu između uglova ξ i η. Pomoću ove jednačine može da se izrazi sinξ i cosξ [4]. Uzimajući u

obzir prethodno razmatranje mogu se napisati opšte jednačine za obvojnicu tipa 1:

$$x_a = e\left(2\cos\xi\cos\eta + \lambda k_t \cos\frac{2\eta}{k_t}\right)$$
$$y_a = e\left(2\sin\xi\cos\eta + \lambda k_t \sin\frac{2\eta}{k_t}\right) \qquad (2.5)$$

Na osnovu ovog uslova i korišćenjem određenih matematičkih operacija i uvedenih smena za pojedine izraze dobijaju se jednačine obvojnice tipa 1 u konačnom obliku:

$$x_a = e\left\{\lambda k_t \cos\frac{2\eta}{k_t} - \frac{1}{\lambda}\sin 2\eta \sin\frac{2\eta}{k_t} \pm 2\left[\cos^2\eta - \left(\frac{\sin 2\eta}{2\lambda}\right)^2\right]^{1/2} \cos\frac{2\eta}{k_t}\right\}$$
$$y_a = e\left\{\lambda k_t \sin\frac{2\eta}{k_t} + \frac{1}{\lambda}\sin 2\eta \cos\frac{2\eta}{k_t} \pm 2\left[\cos^2\eta - \left(\frac{\sin 2\eta}{2\lambda}\right)^2\right]^{1/2} \sin\frac{2\eta}{k_t}\right\} \qquad (2.6)$$

Kod jednačina (2.6) znak "+" se odnosi na spoljašnju, a znak "–" na unutrašnju obvojnicu.

Pri izvođenju jednačina za obvojnicu tipa 2 važi sledeći uslov $k_a = k_t - 1$. Ako se ovaj uslov uvrsti u jednačine (2.3) i (2.4) i primenom određenih matematičkih operacija i uvedenih smena za pojedine izraze mogu se napisati opšte jednačine za obvojnicu tipa 2 u obliku:

$$x_a = e\left(2\cos\xi\cos\eta + \lambda k_t \cos\frac{2}{k_t}\xi\right)$$
$$y_a = e\left(2\sin\xi\cos\eta + \lambda k_t \sin\frac{2}{k_t}\xi\right) \qquad (2.7)$$

Primenom određenih transformacija dobija se veza između uglova ξ i η:

$$\cos\eta = -\lambda\cos\left(1-\frac{2}{k_t}\xi\right). \tag{2.8}$$

Ako se izraz (2.8) zameni u jednačine (2.7) dobijaju se konačne jednačine za obvojnicu tipa 2:

$$\begin{aligned} x_a &= e\lambda\left[-2\cos\xi\cos\left(1-\frac{2}{k_t}\right)\xi + k_t\cos\frac{2}{k_t}\xi\right] \\ y_a &= e\lambda\left[-2\sin\xi\cos\left(1-\frac{2}{k_t}\right)\xi + k_t\sin\frac{2}{k_t}\xi\right] \end{aligned}. \tag{2.9}$$

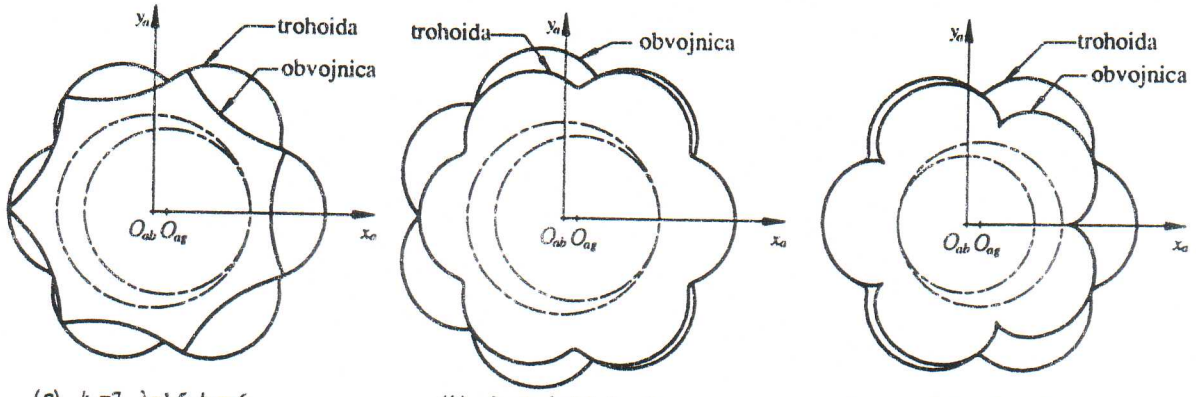
Na osnovu prethodnog izlaganja sledi da se za datu trohoidu mogu odrediti tri obvojnice i to: spoljašnja obvojnica tipa $(1)_s$, unutrašnja obvojnica tipa $(1)_u$, spoljašnja obvojnica tipa $(2)_s$ za hipotrohoidu i unutrašnja obvojnica tipa $(2)_u$ za peritrohoidu. Na slikama 3.1 – 3.4 dati su primeri različitih trohoida i njihovih spregnutih obvojnica i biće detaljno analizirani u sledećem poglavlju.

3. KOMPJUTERSKO GENERISANJE TROHOIDNOG OZUBLJENJA I ANALIZA DOBIJENIH REZULTATA

U prethodnom poglavlju su određene parametarske jednačine trohoida i njihovih spregnutih obvojnica, kao i ograničavajući uslovi za dobijanje para spregnutih profila koji se potencijalno mogu primeniti u praksi. Na bazi matematičkog modela kreiran je kompjuterski program TIA, u standardnom programskom jeziku AutoLISP, za proračun koordinata navedenih krivih i za njihovo automatsko generisanje [1]. Program je testiran, a rezultati su dati u obliku spregnutih zupčastih parova (slike 3.1-3.4).

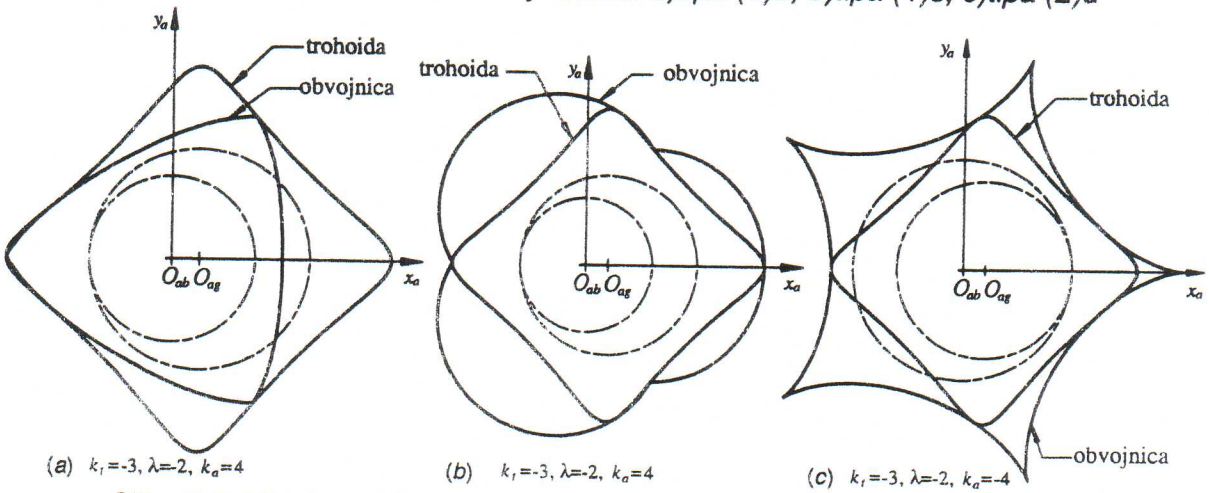
Na slici 3.1 su prikazane tri obvojnice jedne iste peritrohoide, a na slici 3.2 su date obvojnice za hipotrohoidu. Očigledno je da spregnute obvojnice tipa 1 za peritrohoidu imaju jednu granu više od trohoide, a za hipotrohoidu jednu granu manje, dok je za obvojnice tipa 2 obrnut slučaj. Generalno, sve obvojnice imaju vrhove, koji su u neprekidnom kontaktu sa trohoidom.

Slika 3.3 ilustruje kako povećanje koeficijenta trohoide λ utiče na njen oblik i karakteristike sprezanja.



(a) k_t=7, λ=1.5, k_a=-6 (b) k_t=7, λ=1.5, k_a=-6 (c) k_t=7, λ=1.5, k_a=6

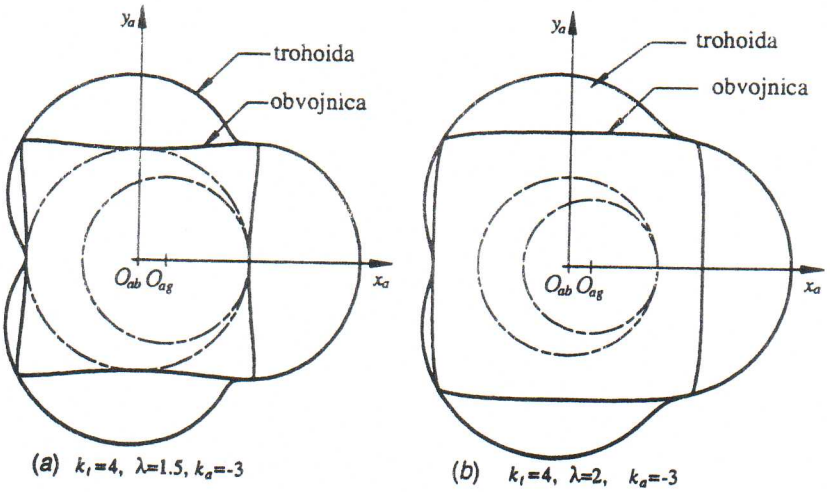
Slika 3.1. Peritrohoida sa obvojnicama: a)tipa (1)u, b)tipa (1)s, c)tipa (2)u



(a) k_t=-3, λ=-2, k_a=4 (b) k_t=-3, λ=-2, k_a=4 (c) k_t=-3, λ=-2, k_a=-4

Slika 3.2. Hipotrohoida sa obvojnicama: a)tipa (1)u, b)tipa (1)s, c)tipa (2)s

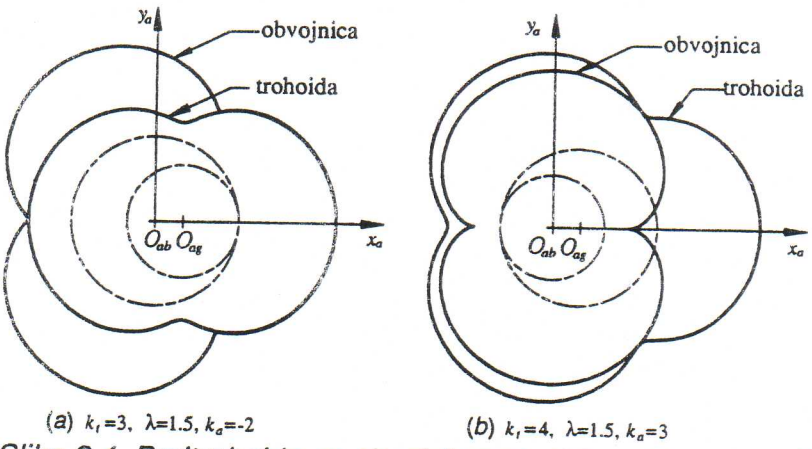
Stepen kompresije primenjene radne mašine, koji se definiše kao odnos maksimalne i minimalne radne zapremine, je veći pri većim vrednostima koeficijenta trohoide. Međutim, sa njegovim rastom dolazi do povećanja brzine klizanja, što dovodi do intenzivnog habanja.



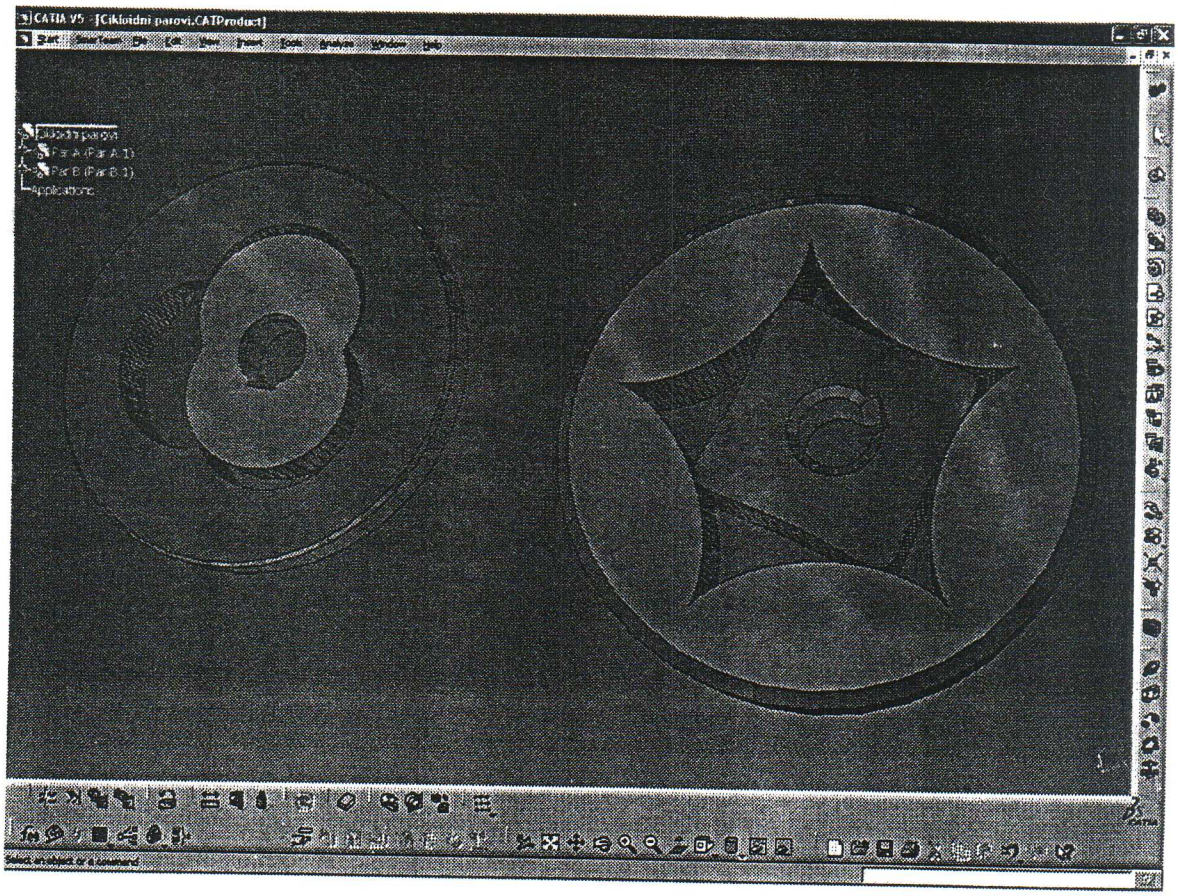
(a) k_t=4, λ=1.5, k_a=-3 (b) k_t=4, λ=2, k_a=-3

Slika 3.3. Peritrohoida sa obvojnicama tipa (1)u

Međusobnim poređenjem trohoida i spregnutih obvojnica prikazanih na slikama 3.3,*a* i 3.2,*b* može se zaključiti da svakoj peritrohoidi sa spregnutom obvojnicom tipa $(1)_u$ odgovara slična hipotrohoida sa spregnutom obvojnicom tipa $(1)_s$, i obrnuto, samo je njihov relativni položaj promenjen. Na slici 3.4 je pokazano da svakoj peritrohoidi sa spregnutom obvojnicom tipa $(1)_s$ odgovara slična peritrohoida sa spregnutom obvojnicom tipa $(2)_u$, i obrnuto.



Slika 3.4. Peritrohoide sa obvojnicama: a)tipa (1)s, b)tipa (2)u



Slika 3.5. Primeri 3D geometrijskih modela zupčastih parova

Za prikazane unutrašnje zupčaste parove moguće je uraditi simulaciju sprezanja primenom modula DMU Kinematics kompjuterskog programa CATIA. Pre toga potrebno je da se razvije 3D geometrijski model primenom modula Part Design navedenog programskog paketa. Rezultati 3D modela spregnutih unutrašnjih zupčastih parova prikazani su na slici 3.5.

4. ZAKLJUČAK

U radu je pokazano da se različite trohoide mogu opisati jedinstvenim parametarskim jednačinama. Zahvaljujući tome razvijen je jednostavan matematički model i odgovarajući program za automatsko crtanje trohoida i spregnutih obvojnica. To dalje pruža mogućnost za modeliranje i simulaciju kretanja spregnutih zupčastih parova. Na taj način može da se prati i analizira međusobni položaj elemenata zupčastih parova u različitim fazama sprezanja.

Sa gledišta inženjerskog konstruisanja negativna karakteristika razmatranih krivih je pojava vrhova na spregnutim obvojnicama. To se može izbeći primenom ekvidistantne modifikacije osnovnih profila, čime se dobija glatka kriva, a sprezanje je povoljnije s obzirom na rast poluprečnika krivine profila.

5. LITERATURA

1. Ivanović L.: Analiza geometrijskih parametara neevolventnog oblika profila cilindričnih zupčanika, Magistarski rad, Mašinski fakultet, Kragujevac, 1995.
2. Mamuzić Z., Đerasimović B.: Osnovi matematičke analize, Naučna knjiga, Beograd, 1988.
3. Savelov A.A.: Ploskie krivie, Fizmatgiz, Moskva, 1960.
4. Shung J.B., Pennock G. R.: Geometry for trochoidal-type machines with conjugate envelopes, Mech. Mach. Theory, 1994.,Vol. 29. No. 1. str. 25-42.