

Univerzitet u Kragujevcu
MAŠINSKI FAKULTET U KRAGUJEVCU
KATEDRA ZA PROIZVODNO MAŠINSTVO
Kragujevac, Srbija



**31. SAVETOVANJE PROIZVODNOG
MAŠINSTVA SRBIJE I CRNE GORE
SA MEĐUNARODNIM UČEŠĆEM**

**31. CONFERENCE ON PRODUCTION
ENGINEERING OF SERBIA AND
MONTENEGRO
WITH FOREIGN PARTICIPANTS**

**ZBORNİK RADOVA
PROCEEDINGS**

Kragujevac, 19. - 21. septembar 2006.

OGRANIČENJA PRI IZBORU GEOMETRIJE ALATA ZA PROFILISANJE TROHOIDNOG OZUBLJENJA

L. Ivanović¹⁾, D. Josifović²⁾, G. Devedžić³⁾

Rezime: U ovom radu se razmatra generisanje i analiza sprezanja profila zupčastog para sa unutrašnjim trohoidnim ozubljenjem. Konstrukciono izvođenje ovog ozubljenja zahteva ispunjenje brojnih geometrijskih ograničenja, od kojih će biti analizirana sledeća: podsecanje, interferenca susednih zubaca, interferenca spregnutih zubaca i granična vrednost temene debljine zupca. Ograničenja su definisana u analitičkom obliku, a na osnovu grafičke interpretacije dobijenih rezultata može da se odredi domen praktične primene razmatranih geometrijskih parametara za unutrašnji zupčasti par sa modifikovanim epitrohoidnim ozubljenjem.

Ključne reči: trohoidno ozubljenje, podsecanje, interferenca

LIMITS BY THE CHOICE OF THE TOOL GEOMETRY TO PROFILING OF TROCHOIDAL GEARING

Abstract: In this paper are considered the generation and analysis of profile meshing of the gear pair with internal gearing. Constructive realization of this gearing demands the compliance of the numerous geometrical limits of them will be analyzed the following: undercutting, interference of neighboring teeth, interference of meshing teeth and limited value of the addendum tooth thickness. The limits are defined in analytic form and based on graphical interpretation of the obtained results can be determined the domain of the practical application of the considered geometrical parameters for the internal gear pair with modified epitrochoidal gearing.

Keywords: trochoidal gearing, undercutting, interference

1. UVOD

Poznata je primena trohoida i njihovih spregnutih obvojnica u svojstvu profila radnih elemenata kod gerotorskih pumpi i hidromotora. Trohoidne pumpe pripadaju grupi planetarnih rotacionih mašina, čija je kinematika zasnovana na principu planetarnog mehanizma sa unutrašnjim ozubljenjem. U ovom radu je usvojen koncept po kojem se pretpostavlja da je poznat profil unutrašnjeg zupčanika, epitrohoida, a potrebno je da se odredi spregnuti profil. Kod ove vrste ozubljenja, pokretni krug se

¹⁾ Mr Ivanović Lozica, Mašinski fakultet, Kragujevac, livanovic@kg.sbb.co.yu

²⁾ Prof. dr Josifović Danica, Mašinski fakultet, Kragujevac

³⁾ Prof. dr Devedžić Goran, Mašinski fakultet, Kragujevac

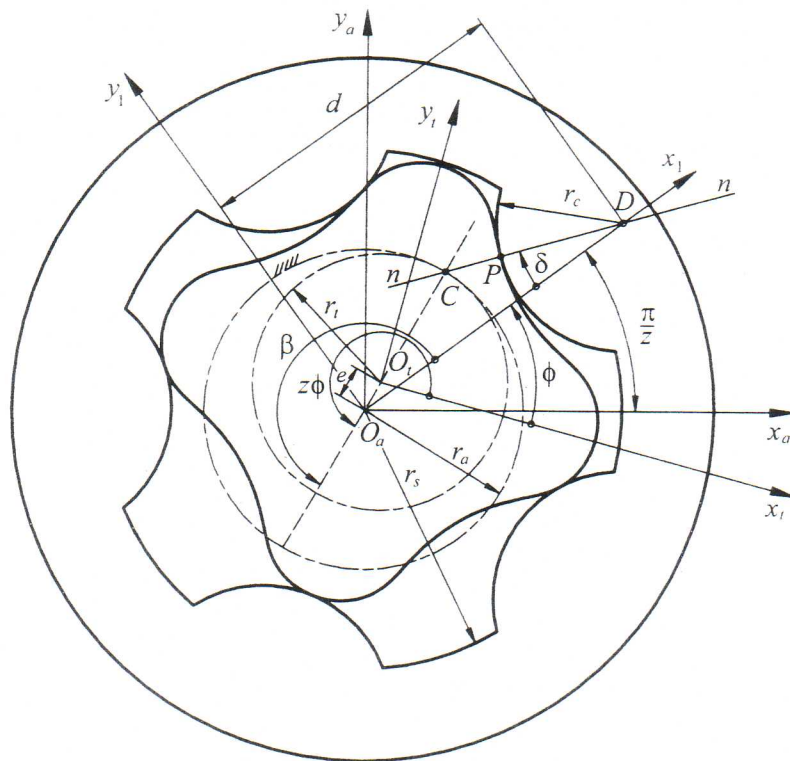
kotrlja bez klizanja po drugom nepokretnom krugu i pri tome, izabrana tačka opisuje profil zupca, odnosno trohoidu [1]. Spregnuti profil se može predstaviti kao obvojnica uzastopnih položaja osnovnog profila pri njegovom relativnom kretanju. U opštem slučaju spregnuta obvojnica ima vrhove, koji su nepoželjna pojava zato što dovode do intenzivnog habanja, a da bi se izbegla njihova pojava uvodi se ekvidistantna modifikacija osnovnih profila [2]. Kod krivih koje imaju vrhove ekvidistantna modifikacija se u oblasti vrhova realizuje pomoću kružnog luka, čiji poluprečnik odgovara izabranom poluprečniku ekvidistantne epitrohoide r_c . Veličina ovog poluprečnika, a time i poluprečnika alata za profilisanje ozubljenja, ograničena je minimalnim vrednostima poluprečnika krivine osnovne epitrohoide. Prema tome, pre modifikacije potrebno je da se odrede stacionarne tačke funkcije poluprečnika krivine epitrohoide.

2. ODREĐIVANE STACIONARNIH TAČAKA FUNKCIJE POLUPREČNIKA KRIVINE EPITROHOIDE

Stacionarne tačke date funkcije su sve tačke u kojima funkcija postiže lokalne ekstreme, globalni ekstremum i prevojne tačke. Na osnovu geometrijskih odnosa prikazanih na slici 1 jednačine tačke D epitrohoide mogu se napisati u obliku:

$$\begin{aligned} x_t &= e(\cos z\phi + \lambda z \cos \phi) \\ y_t &= e(\sin z\phi + \lambda z \sin \phi) \end{aligned} \quad (1)$$

pri čemu je $\lambda = d/ez$ - koeficijent epitrohoide.



Slika 1: Šematski prikaz zupčastog para trohoidne pumpe i osnovnih geometrijskih veličina

Polazeći od jednačina (1) i poznatih formula iz analitičke geometrije, može da se napiše izraz za određivanje poluprečnika krivine u tački epitrohoide, čiji je položaj definisan referentnim uglom $\beta = (z - 1)\phi$, u sledećem obliku:

$$\rho_t = \frac{ez[1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \beta]^{3/2}}{z + \lambda^2 + \lambda(z+1)\cos \beta} \quad (2)$$

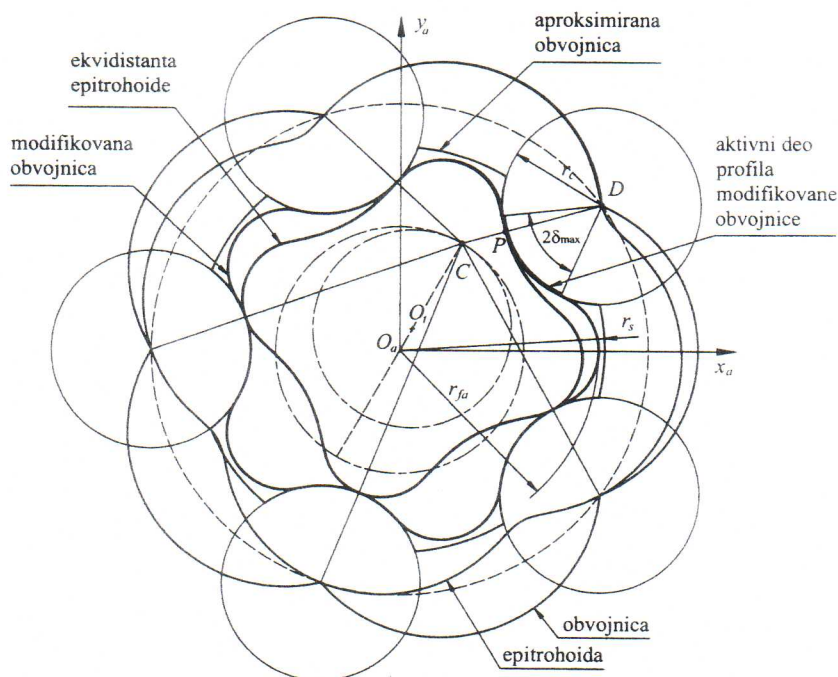
Potrebno je odrediti vrednosti ugla β za koje poluprečnik krivine ima najmanju vrednost. U tom cilju, jednačina (2) se diferencira po promenljivoj β , a zatim izjednačava sa nulom [3]. Na taj način, definisani su uslovi za egzistenciju stacionarnih tačaka poluprečnika krivine epitrohoide i dati su u Tabeli 1.

Tabela 1. Stacionarne tačke poluprečnika krivine epitrohoide

Prvi lokalni ekstremum (teme zupca)	Drugi lokalni ekstremum (podnožje zupca)	Treći lokalni ekstremum	Prevojna tačka
$\beta = 0$	$\beta = \pi$	$\cos \beta = \frac{1 - 2z + \lambda^2(z-2)}{\lambda(z+1)}$	$\cos \beta = -\frac{\lambda^2 + z}{\lambda(z+1)}$
$\rho_{t1} = \frac{ez(\lambda+1)^2}{\lambda+z}$	$\rho_{t2} = \frac{ez(\lambda-1)^2}{\lambda-z}$	$\rho_{t3} = ez\sqrt{\left(\frac{3}{z+1}\right)^3(\lambda^2-1)(z-1)}$	$\rho_t \rightarrow \infty$

3. GENERISANJE MODIFIKOVANE OBVOJNICE

Posle ekvidistantne modifikacije nova tačka dodira P nalazi se na udaljenju r_c od tačke D i uvek leži na zajedničkoj normalnoj koja povezuje središte kružnog profila sa trenutnim kinematskim polom C . Prema tome, položaj tačke P je na kružnom luku poluprečnika r_c koji obuhvata ugao $2\delta_{max}$ sa središtem u tački D (slika 2).



Slika 2: Definisavanje modifikovanih spregnutih profila epitrohidnog zupčastog para

To je aktivni deo profila modifikovane obvojnice, a preostali deo profila, koji ne učestvuje u sprezanju, može biti aproksimiran kružnim lukom ili kombinacijom kružnih

lukova koji leže izvan ili na datoj obvojnici [4]. Mogućnost da se izvede ova aproksimacija je jedna od glavnih prednosti epitrohidnih profila, zato što je time omogućena lakša izrada, kontrola dimenzija, a dobija se i jednostavniji oblik izvedenih jednačina.

Koordinate tačke dodira P u koordinatnom sistemu epitrohoide mogu se napisati kao:

$$\begin{aligned} x_t &= e(\cos z\phi + \lambda z \cos \phi) - r_c \cos(\phi + \delta) \\ y_t &= e(\sin z\phi + \lambda z \sin \phi) - r_c \sin(\phi + \delta) \end{aligned} \quad (3)$$

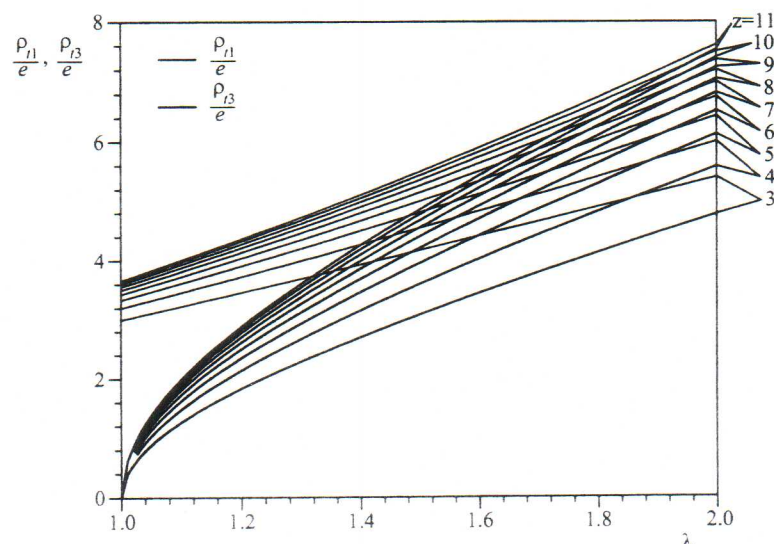
pri čemu je ugao zahvata δ određen sledećim izrazom

$$\delta = \arctan \frac{\sin(z-1)\phi}{\lambda + \cos(z-1)\phi} \quad (4)$$

Da bi se ostvarilo pravilno sprezanje zupčanika epitrohidnih zupčastih parova sa modifikovanim profilima potrebno je da budu ispunjeni brojni geometrijski i kinematski uslovi, koji će biti razmatrani u sledećem poglavlju.

4. GEOMETRIJSKA OGRANIČENJA PRI GENERISANJU MODIFIKOVANIH PROFILA

Pri projektovanju pumpi obično su konstruktivno dati parametri: ekscentricitet e , broj zuba spoljašnjeg zupčanika z i poluprečnik podnožnog kruga spoljašnjeg zupčanika, izražen parametrom r_{fa} spregnute obvojnice (slika 2). Potrebno je da se odredi granična vrednost poluprečnika r_c , odnosno maksimalna vrednost $r_{c\max}$ koja, pri datoj vrednosti koeficijenta λ , ne dovodi do podsecanja profila i interference [2, 5]. Ova analiza biće sprovedena na osnovu geometrijskih odnosa datih na slici 1.



Slika 3: Uporedni dijagrami ekstremnih vrednosti poluprečnika krivine epitrohoide

Podsecanje. Pod podsecanjem zupca modifikovanog trohidnog profila podrazumeva se geometrijski presek krive koja opisuje profil. Provera profila na podsecanje se vrši analizom minimalne vrednosti poluprečnika krivine na konveksnom delu realnog profila opisanog unutrašnjom ekvidistantom epitrohoide. U Tabeli 1 su date jednačine koje omogućavaju da se analitičkom metodom odredi minimalna vrednost poluprečnika krivine na konveksnom delu osnovnog profila.

Na osnovu grafičke interpretacije date na slici 3 može da se zaključi da je u oblasti preporučenih vrednosti kod pumpi, $1 < \lambda < 2$, veličina minimalnog poluprečnika krivine ρ_{t1} uvek manja od ρ_{t3} i, prema tome, kao kriterijum za izbor gornje granične vrednosti poluprečnika ekvidistante $(r_{cmax})_1$ važi uslov:

$$r_c < ez \sqrt{\left(\frac{3}{z+1}\right)^3 (\lambda^2 - 1)(z - 1)}. \quad (5)$$

Interferenca (preklapanje) susednih zubaca. Drugo geometrijsko ograničenje za poluprečnik ekvidistantne modifikacije $(r_{cmax})_2$ proizilazi iz uslova da se izbegne interferenca između dva susedna kružna profila obvojnice, odnosno:

$$r_c \leq ez \lambda \sin \frac{\pi}{z}. \quad (6)$$

Interferenca spregnutih zubaca. Da bi se izbeglo zaglavljivanje temena konveksnog dela profila modifikovane epitrohoide u podnožnoj oblasti spregnute obvojnice, koja je aproksimirana kružnim lukom, potrebno je da bude ispunjen uslov za $(r_{cmin})_1$:

$$r_s > r_{fa}, \quad (7)$$

pri čemu je

$$r_{fa} = e(\lambda z + 2) - r_c. \quad (8)$$

Uvođenjem koeficijenta $S_{fa} = r_{fa}/e$ iz jednačine (8) može da se izrazi poluprečnik ekvidistante u obliku:

$$r_c = e(\lambda z + 2 - S_{fa}). \quad (9)$$

Granična vrednost temene debljine. Veća širina zupca i manja širina međuzublja su povoljne karakteristike za zupčanike reduktora, međutim kod hidrauličnih mašina to se ne preporučuje zato što dovodi do povećanja dimenzija pri istom zapreminskom protoku. Osim toga, u slučaju kada su zupci spoljašnjeg zupčanika konstruktivno izvedeni u vidu valjčića, da bi se obezbedila pravilna montaža potrebno je da r_s bude manje od $d = e\lambda z$, što se u kombinaciji sa jednačinama (7) i (8) može izraziti sledećim uslovom za $(r_{cmin})_2$:

$$r_c > 2e. \quad (10)$$

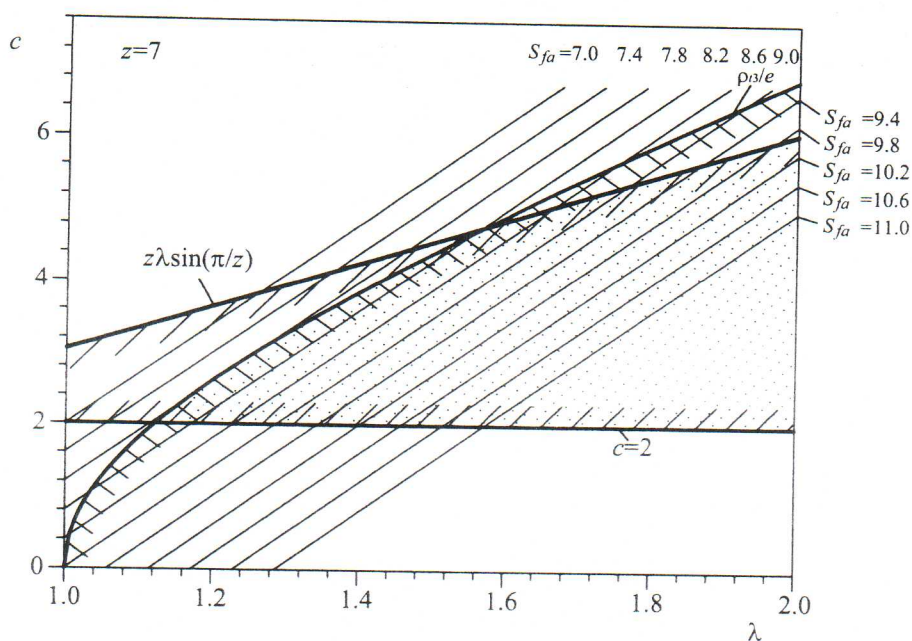
Veličina poluprečnika ekvidistante se, za date konstruktivne parametre, bira iz intervala

$$r_{cmin} < r_c < r_{cmax}, \quad (11)$$

pri čemu se za r_{cmin} uzima veća od vrednosti dobijenih prema izrazima (9) i (10), a za r_{cmax} se uzima manja od vrednosti dobijenih prema izrazima (5) i (6).

Polazeći od analitičkih zavisnosti izvedenih za postavljena geometrijska ograničenja data je njihova grafička interpretacija na slici 4, pri čemu je uveden koeficijent $c = r_c/e$.

Na osnovu grafičke interpretacije dobijenih rezultata može da se odredi domen praktične primene razmatranih geometrijskih parametara za unutrašnji zupčasti par sa modifikovanim epitrohidnim ozubljenjem.



Slika 4: Dijagram za izbor geometrijskih parametara trohoidne pumpe

5. ZAKLJUČAK

Osnovni cilj ovog rada bio je određivanje ograničenja pri definisanju profila kako bi se utvrdili domeni praktične primene geometrijskih parametara zupčastog para. U tom cilju razmatrani su uslovi koji dovode do pojave podsecanja i interference profila, kako pri njihovoj izradi tako i u procesu sprezanja. Dobijene analitičke zavisnosti su grafički predstavljene u vidu dijagrama za izbor parametara profila.

ZAHVALNOST

Ovaj rad sadrži rezultate istraživanja izvedenih u okviru projekta (TR-6218A) koga finansira Ministarstvo nauke i zaštite životne sredine Republike Srbije.

LITERATURA

- [1] Savelov A.A., Ploskie krivie, Fizmatgiz, Moskva, 1960.
- [2] Robinson F. J., Lyon J. R., An Analysis of Epitrochoidal Profiles With Constant difference Modification Suitable for Rotary Expanders and Pumps, Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, pp. 161-165, Feb. 1976.
- [3] Beard J. E., Yannitell D. W., Pennock G. R., The effects of the generating pin size and placement on the curvature and displacement of epitrochoidal gerotors, Mechanism and Machine Theory 27 (4), pp. 373-389, 1992.
- [4] Maiti R., Sinha G. L., Limits on modification of epitrochoid used in rotary piston machines and the effects of modification on geometric volume displacement and ripple, Ingenieur-Archiv 60, pp. 183-194, 1990.
- [5] Rosić B., Planetarni prenosnici, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2003.