

 **Mobility & Vehicles Mechanics**
International Journal for Mechanics, Engines and Transportation Systems



**MONOGRAFIJA
POVODOM 30 GODINA
1975. - 2005.**

Mašinski fakultet u Kragujevcu, 2005.



Mobility & **V**ehicles **M**echanics

International Journal for Mechanics, Engines and Transportation Systems

MONOGRAFIJA
POVODOM **30** GODINA
1975. - 2005.



Mašinski fakultet u Kragujevcu, marta 2005.

Izdavač: Mašinski fakultet u Kragujevcu
Sestre Janjić 6, 34000 Kragujevac

Urednik: Prof. dr Aleksandra Janković, Mašinski fakultet u Kragujevcu

Recenzenti: Prof. dr Miroslav Demić, akademik, Mašinski fakultet u Kragujevcu
Dr Ing. Dimitrije Obradović, Viši naučni saradnik IA,
Grupa Zastava vozila A.D.

ISSN 1450-5304

Štampa: GRUPA ZASTAVA VOZILA A.D.
Trg Topolivaca 4
34000 Kragujevac

Tiraž: 200

CIP- Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

629.3(082)
621.43(082)

MONOGRAFIJA : [zbornim radova] povodom
30 godina [izlaženja časopisa MVM] : 1975. -
2005. / [urednik Aleksandra Janković]. -
Kragujevac : Mašinski fakultet, 2005
(Kragujevac : Skver). - 234 str. : graf.
prikazi, tabele ; 24 cm

Radovi na srp. i engl. jeziku. - Tiraž
200. - Bibliografija uz svaki rad. -
Rezimeji; Summaries.

ISBN 86-80581-76-3

1. Јанковић Александра
а) Моторна возила - Зборници б) Мотори са
унутрашњим сагоревањем - Зборници

COBISS.SR-ID 121872396

KINEMATSKA ANALIZA TROHOIDNOG OZUBLJENJA KOD PUMPI ZA PODMAZIVANJE MOTORA SUS

1. UVOD

U ovom radu se razmatra generisanje i analiza sprežanja profila zupčastog para sa unutrašnjim trohoidnim ozubljenjem. Primena trohoida i njihovih spregnutih obvojnica u svojstvu profila radnih elemenata rotacionih mašina, kao što su: gerotorske pumpe i hidromotori, prisutna je u poslednjih 100 godina. Gerotori imaju široku primenu u industriji, proizvode se u različitim oblicima i veličinama, pri čemu se koriste različite metode. Najpoznatije primene trohoidnih (gerotorskih) pumpi su sledeće: pumpe za ulje za podmazivanje motora sa unutrašnjim sagorevanjem, u sistemima upravljanja mnogih tipova motornih vozila, kao što su traktori i građevinske mašine, a poznata je i primena gerotora kao komponente agregata u sklopu mehanizma za podizanje krova na automobilu YUGO kabriolet. Ime gerotor je izvedeno iz fraze GEnenerated ROTOR, i opisuje matematičku proceduru za generisanje peritrohoidnog profila unutrašnjeg zupčanika kružnim lukom spoljašnjeg profila. Zahvaljujući tome što spoljašnji zupčanik ima jedan zubac više, ostvaruje se efekat potiskivanja fluida u toku rotacije.

Prema načinu kretanja radnih elemenata izvršena je podela rotacionih mašina u dve osnovne grupe: prvu, sa nepokretnim osama radnih elemenata i drugu, sa planetarnim (epicikličnim) kretanjem unutrašnjeg elementa. Radni princip ove druge vrste je identičan principu generisanja spregnutih profila. Kinematska analiza se može izvršiti u uslovima koji važe za jednu vrstu mašina, a kasnije sve kinematske veze mogu biti uspostavljene uz pomoć koncepta ekvivalentnog sistema [5]. Pod ekvivalentnim sistemom se podrazumeva sistem koji je nastao kinematskom inverzijom posmatranog mehanizma.

Za kinematsku analizu spregnutih profila razmatra se kretanje tačke dodira spregnutih profila. Kretanje ove tačke je složeno i to: apsolutno, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem i pri tome je putanja tačke dodira dodirnica profila, relativno, u odnosu na pokretni koordinatni sistem i to je kretanje tačke po profilu, prenosno kretanje, a to je kretanje pokretnog koordinatnog sistema u odnosu na nepokretni. Jednačine za određivanje brzina tačaka profila su izvedene u matričnom obliku, a zatim je data njihova grafička interpretacija. Na osnovu grafičke interpretacije kinematskih parametara spregnutih profila trohoidnog zupčastog para mogu se izvesti zaključci o uticaju geometrijskih parametara na veličinu klizanja i, prema tome, na intenzitet habanja profila zubaca.

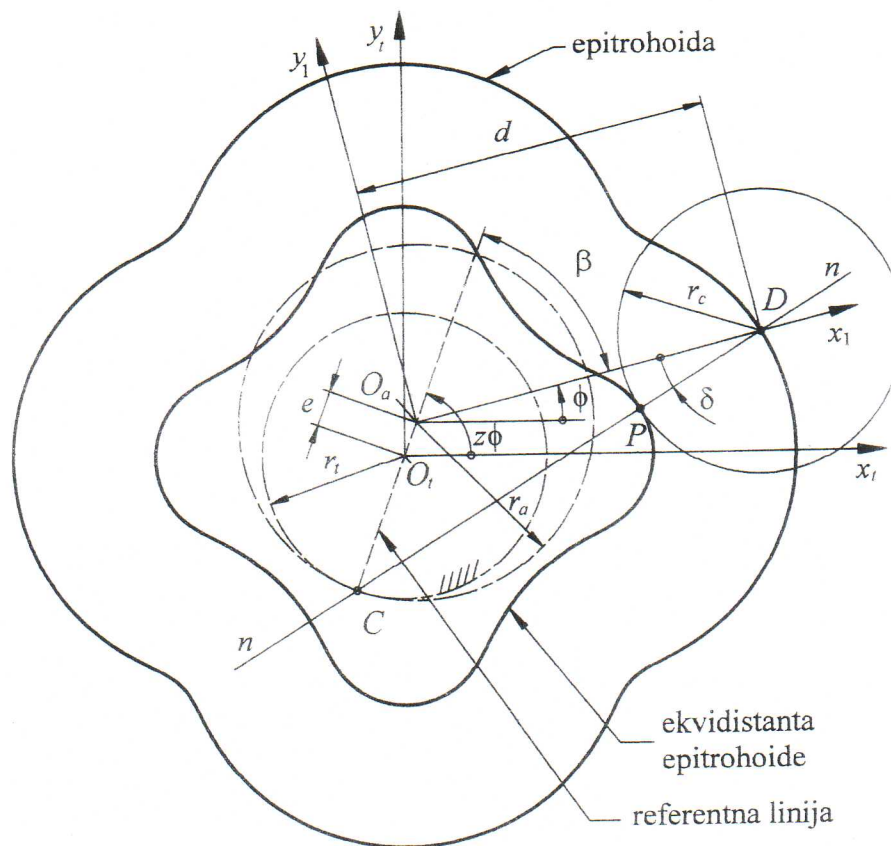
2. GEOMETRIJA OZUBLJENJA

Trohoidne pumpe pripadaju grupi planetarnih rotacionih mašina, čija je kinematika zasnovana na principu planetarnog mehanizma sa unutrašnjim ozubljenjem. Kod ove vrste ozubljenja, pokretni krug se kotrlja bez klizanja po drugom nepokretnom krugu i pri tome, izabrana tačka opisuje profil zupca, odnosno trohoidu [8]. Nepokretni krug je, uslovno uzeto, kinematski krug zupčanika. Spregnuti profil se može predstaviti kao obvojnica uzastopnih položaja osnovnog profila pri njegovom relativnom kretanju. Prema tome spregnuti profili predstavljaju uzajamno obvojne krive, čija geometrija zadovoljava osnovni zakon sprežanja zupčanika. U opštem slučaju spregnuta obvojnica ima vrhove, koji su nepoželjna pojava zato što dovode do intenzivnog habanja, a da bi se izbegla njihova pojava uvodi se modifikacija osnovne trohoide. Trohoidne krive se modifikuju uz pomoć priraštaja konstantne vrednosti r_c , koji se nanosi duž normale date krive. Na taj način se dobija kriva koja je paralelna datoj, a pošto njihov razmak, meren duž zajedničke normale ostaje konstantan, dobijena kriva se zove i ekvidistanta, a konstantni priraštaj r_c se može definisati kao poluprečnik ekvidistante.

Pre proučavanja kinematike kontakta trohoidnih profila biće navedeni primenjeni koordinatni sistemi i određeni prenosni odnos posmatranog zupčastog para, kao i geometrijske veze između uglova rotacije u različitim koordinatnim sistemima.

Na slici 1 su prikazani osnovni geometrijski odnosi pri generisanju jedne od trohoida, epitrohoide, koja je usvojena za definisanje osnovnog profila kod razmatrane zupčaste pumpe. Sa O_a i r_a su obeleženi središte i poluprečnik pokretnog (generišućeg) kruga, a sa O_t i r_t nepokretnog (osnovnog) kruga. Ekscentricitet trohoide e predstavlja rastojanje između dva središta kruga. Generišući koordinatni sistem $O_a x_1 y_1$ se vezuje za središte pokretnog kruga. Generišuća tačka D je tačka koja opisuje trohoidu i nalazi se na osi x_1 na udaljenju d od O_a i predstavlja veličinu poluprečnika trohoide. Referentnu liniju određuje linija koja spaja središta O_t i O_a i prolazi kroz tačku dodira dva kruga, odnosno kinematski pol C . Da bi se u analitičkom obliku predstavio trohoidni profil uvodi se koordinatni sistem trohoide $O_t x_t y_t$, a njegov početak postavlja u središte nepokretnog kruga, pri čemu apscisa prolazi kroz početnu tačku dodira datih kinematskih krugova. Koordinatni sistem obvojnice $O_a x_a y_a$ se vezuje za središte pokretnog kruga. Svi koordinatni sistemi su desne orijentacije.

Jednačine ekvidistante epitrohoide se izvode u koordinatnom sistemu trohoide, prema slici 1. Na slici 1 je pokazano da u toku relativnog kretanja kinematskih krugova, dok tačka D generiše epitrohoidu, tačka P generiše ekvidistantu. Ugao označen sa δ predstavlja ugao između normale $n-n$ i radijus vektora tačke D , a može se definisati kao ugao zahvata. Tačka dodira P modifikovanog profila leži na normali osnovnog profila i u toku kretanja zupčanika biće u kontaktu sa tačkama spregnutog profila, koje su raspoređene sa leve i desne strane zajedničke normale. Prema tome, kontakt se ostvaruje sa jednim delom spregnutog profila koji je ograničen maksimalnim vrednostima ugla zahvata δ_{\max} .



Slika 1. Generisanje nemodifikovane i modifikovane epitrohoide

Koordinate tačke dodira P u koordinatnom sistemu epitrohoide mogu se napisati kao:

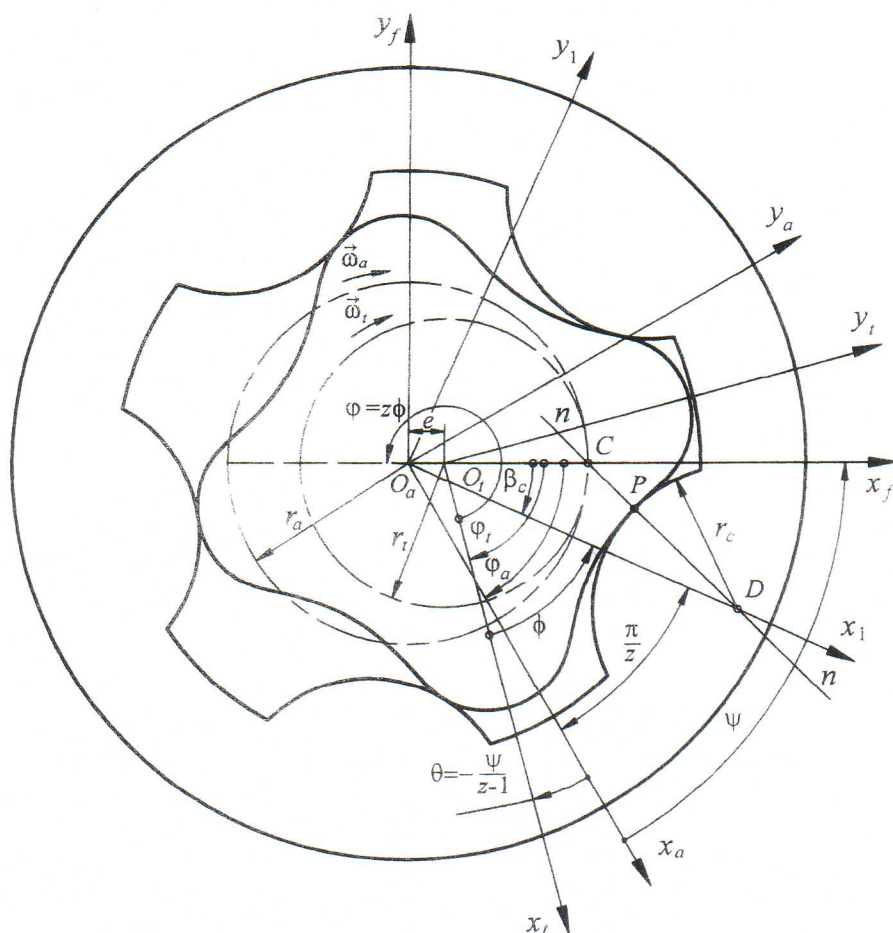
$$\begin{aligned} x_t &= e(\cos z\phi + \lambda z \cos \phi) - r_c \cos(\phi + \delta) \\ y_t &= e(\sin z\phi + \lambda z \sin \phi) - r_c \sin(\phi + \delta) \end{aligned} \quad (1)$$

gde je λ koeficijent trohoide kojim se definiše odnos između veličina poluprečnika trohoide i poluprečnika pokretnog kruga $\lambda = d/ek_t$.

Na osnovu geometrijskih odnosa sa slike 1 može se dobiti izraz za određivanje ugla δ :

$$\delta = \arctan \frac{\sin(z-1)\phi}{\lambda + \cos(z-1)\phi} \quad (2)$$

Uobičajeno je da se kod modela kinematskog para epitrohoidea-obvojnica spoljašnji element posmatra kao nepokretan, dok unutrašnji izvodi planetarno kretanje. Radi jednostavnije kinematske analize razmatraće se ekvivalentni sistem sa nepokretnim osama elemenata zupčastog para. U tom cilju, svim elementima planetarnog kinematskog para se saopštava ugaona brzina ω_a , koja je jednakog intenziteta ali je suprotnog smera od brzine $\omega'_a = \frac{d\psi}{dt}$. Na taj način unutrašnji element gubi planetarno kretanje i rotira samo oko svoje ose ugaonom brzinom $\omega_t = -\frac{d\phi}{dt}$ (znak "-" ukazuje na različite smerove ugaone brzine i očitavanja ugla ϕ), dok spoljašnji rotira oko svoje ose, u istom smeru kao i unutrašnji, ugaonom brzinom ω_a .



Slika 2. Šematski prikaz zupčastog para trohoidne pumpe i osnovnih geometrijskih veličina za kinematski model zupčastog para sa nepokretnim osama

Sada se uvodi nepokretni koordinatni sistem $O_f x_f y_f$ sa početkom u središtu kinematskog kruga trohoide, odnosno $O_f \equiv O_t$. U početnom položaju važe sledeći uslovi:

- ugao $\varphi = \pi$,
- ose $O_t x_t$, $O_a x_a$, $O_f x_f$ su poklopljene i prolaze kroz trenutni kinematski pol C i teme posmatranog profila trohoide,
- osa $O_a x_a$ prolazi kroz središte spregnutog kružnog profila i u toku kretanja zadžava ugao od $\frac{\pi}{z}$ u odnosu na osu $O_a x_a$.

Ako se ugao rotacije unutrašnjeg zupčanika i koordinatnog sistema $O_t x_t y_t$ označi sa φ_t , a ugao rotacije spoljašnjeg zupčanika i koordinatnog sistema $O_a x_a y_a$ označi sa φ_a , kao što je dato na slici 2, mogu se napisati sledeće relacije:

$$u_{at} = \frac{\varphi_a}{\varphi_t} = \frac{d\varphi_a}{d\varphi_t} = \frac{\omega_a}{\omega_t} = \frac{r_t}{r_a} = \frac{z-1}{z}, \quad (3)$$

$$\varphi_a = (z-1)\theta = -\psi, \quad (4)$$

$$\varphi_t = \pi - \varphi = \pi - z\phi = z\theta = -\frac{\psi}{u_{at}}, \quad (5)$$

$$\phi = \frac{\varphi}{z} = \frac{\pi}{z} - \theta,$$

$$\varphi_t - \varphi_a = \theta = -\frac{\psi}{z-1}, \quad (6)$$

$$\beta_c = \pi - \beta = \pi - (z-1)\phi = \frac{\pi}{z} + (z-1)\theta = \frac{\pi}{z} - \psi. \quad (7)$$

Imajući u vidu činjenicu da su navedene relacije invarijantne u odnosu na smer rotacije kinematskog para, da bi se izbegao rad sa negativnim uglovima, kako je dato na slici 2, usvaja se rotacija zupčanika u pozitivnom matematičkom smeru. Za taj model geometrijski i kinematski odnosi su dati na slici 3.

Kretanje tačaka profila se posmatra u odnosu na različite koordinatne sisteme, što znači da je neophodna primena transformacije koordinata, čije se jednačine najjednostavnije opisuju matricnim oblikom. U opštem slučaju, prelaz iz S_i koordinatnog sistema u sledeći S_n određen je jednačinom transformacije kordinata u obliku:

$$\vec{r}_n = M_{ni} \vec{r}_i \quad (8)$$

gde su:

\vec{r}_i -vektor položaja tačke dodira profila u koordinatnom sistemu S_i

\vec{r}_n -vektor položaja iste tačke u koordinatnom sistemu S_n

M_{ni} -matrica transformacije koordinata pri prelazu iz koordinatnog sistema S_i u koordinatni sistem S_n .

Za transformaciju koordinata definisane su sledeće kvadratne matrice trećeg reda:

$$M_{fi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{tf} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$M_{fa} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_a & -\sin \varphi_a & -e \\ \sin \varphi_a & \cos \varphi_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{af} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_a & \sin \varphi_a & e \cos \varphi_a \\ -\sin \varphi_a & \cos \varphi_a & -e \sin \varphi_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$M_{ia} = M_{if} \cdot M_{fa} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_i - \varphi_a) & \sin(\varphi_i - \varphi_a) & -e \cos \varphi_i \\ -\sin(\varphi_i - \varphi_a) & \cos(\varphi_i - \varphi_a) & e \sin \varphi_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -e \cos z\theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & e \sin z\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{ai} = M_{af} \cdot M_{fi} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_i - \varphi_a) & -\sin(\varphi_i - \varphi_a) & e \cos \varphi_a \\ -\sin(\varphi_i - \varphi_a) & \cos(\varphi_i - \varphi_a) & -e \sin \varphi_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & e \cos(z-1)\theta \\ \sin \theta & \cos \theta & -e \sin(z-1)\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

3. ANALIZA SPREZANJA

U ovoj analizi pretpostavlja se da su poznati profili spregnutog zupčastog para, a potrebno je da se odredi njihova dodirnica. Vektor položaja tačke dodira P u koordinatnom sistemu trohoide može da se definiše u matricnom obliku sledećom relacijom:

$$\vec{r}_i^{(i)} = \begin{bmatrix} x_i^{(i)} \\ y_i^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(\cos z\phi + \lambda z \cos \phi) - r_c \cos(\phi + \delta) \\ e(\sin z\phi + \lambda z \sin \phi) - r_c \sin(\phi + \delta) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

pri čemu donji indeks označava pripadnost posmatrane tačke profilu, a gornji indeks ukazuje na koordinatni sistem u odnosu na koji se tačka posmatra. Jasno je da je vektorska jednačina (12) ekvivalentna skalarnim jednačinama (1), tako da će u ovom radu biti ravnopravno korišćeni i parametarski i vektorski sistem označavanja koordinata tačaka.

Dodirnica profila, kao geometrijsko mesto tačaka dodira u nepokretnom koordinatnom sistemu, dobija se transformacijom koordinata koja se opisuje matricnom jednačinom:

$$\vec{r}_i^{(f)} = M_{fi} \cdot \vec{r}_i^{(i)}. \quad (13)$$

Prema tome, parametarske jednačine koordinata dodirnice se mogu napisati u obliku:

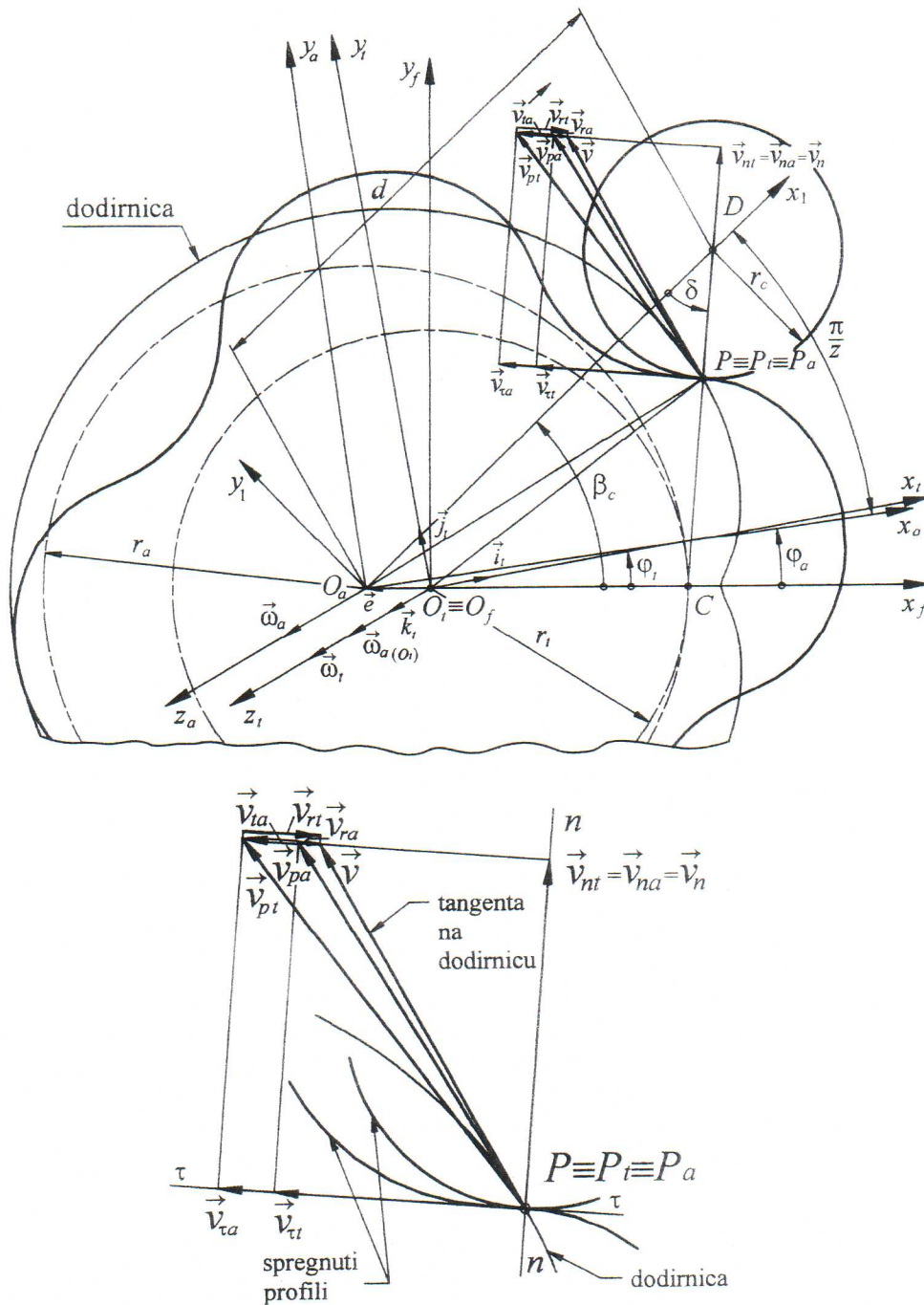
$$\begin{aligned} x^{(f)} &= -e(1 + \lambda z \cos \beta) + r_c \cos(\beta - \delta) & \text{ili} & & x^{(f)} &= -e(1 - \lambda z \cos \beta_c) - r_c \cos(\beta_c + \delta) \\ y^{(f)} &= e\lambda z \sin \beta - r_c \sin(\beta - \delta) & & & y^{(f)} &= e\lambda z \sin \beta_c - r_c \sin(\beta_c + \delta) \end{aligned} \quad (14)$$

Na osnovu dobijenih jednačina napravljeni su kompjuterski programi u standardnom programskom jeziku AutoLISP za automatsko generisanje trohoidnih profila ozubljenja i dodirnice kinematskog para modifikovana epitrohoida-obvojnica.

Za kinematsku analizu spregnutih profila razmatra se kretanje tačke P_i na profilu unutrašnjeg zupčanika i tačke P_a na profilu spoljašnjeg zupčanika. Kretanje ovih tačaka je složeno i to:

- apsolutno, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem i pri tome je putanja tačke dodira dodirnica

- relativno, u odnosu na pokretni koordinatni sistem i to je kretanje tačke po profilu,
- prenosno kretanje je kretanje pokretnog koordinatnog sistema u odnosu na nepokretni i to je rotacija oko središta zupčanika.



Slika 3. Kinematski parametri trohoidnog zupčastog para

Apsolutna brzina je jednaka zbiru prenosne i relativne brzine, tako da se mogu napisati sledeće vektorske jednačine:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \vec{v}_{pt} + \vec{v}_{rt} \\ \vec{v}_a &= \vec{v}_{pa} + \vec{v}_{ra} \end{aligned} \quad (15)$$

pri čemu indeks p odgovara prenosnoj, a indeks r relativnoj brzini. Osim toga, prenosna brzina \vec{v}_{pt} (odnosno \vec{v}_{pa}) može da se predstavi kao vektorski zbir projekcije \vec{v}_{nt} (\vec{v}_{na}) na zajedničku normalu i $\vec{v}_{\tau t}$ ($\vec{v}_{\tau a}$) na tangentu u tački dodira (slika 3).

Pretpostavlja se da se u nekom trenutku tačke P_t i P_a dodiruju u tački P na dodirnici, kao što je prikazano na slici 3. Da bi sprezanje bilo ispravno, kao i da bi se očuvala njegova kontinualnost potrebno je da bude ispunjen uslov o jednakosti apsolutnih brzina spregnutih profila u tački dodira, kao i njihovih komponenti u pravcu zajedničke normale, odnosno

$$\vec{v}_t = \vec{v}_a = \vec{v} \quad (16)$$

i

$$\vec{v}_{nt} = \vec{v}_{na} = \vec{v}_n \quad (17)$$

Iz kinematike je poznato da jedino centroide mogu da ostvare kotrljanje bez klizanja. Prema tome, klizanje profila je neizbežno, jer su oni obrazovani krivama koje se razlikuju od centroida. Dakle, brzina klizanja spregnutih profila u posmatranoj tački dodira je brzina tačke dodira pri relativnom kretanju profila, a određena je razlikom vektora prenosnih brzina, odnosno

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\tau a} &= \vec{v}_{pt} - \vec{v}_{pa} \\ \vec{v}_{\tau t} &= \vec{v}_{pa} - \vec{v}_{pt} \end{aligned} \quad (18)$$

pri čemu je:

$\vec{v}_{\tau a}$ - vektor brzine klizanja profila unutrašnjeg u odnosu na spoljašnji zupčanik

$\vec{v}_{\tau t}$ - vektor brzine klizanja profila spoljašnjeg u odnosu na unutrašnji zupčanik.

Analiza sprezanja se može sprovesti u bilo kom od referentnih sistema. Usvojeno je da se parametri kretanja tačke dodira razmatraju u koordinatnom sistemu trohoide $O_t x_t y_t z_t$, pri čemu je pozitivna osa z_t usmerena spolja i upravna je na ravan crteža.

3.1. Određivanje brzine klizanja posredstvom prenosnih brzina

Ugaone brzine obrtanja unutrašnjeg i spoljašnjeg zupčanika određene su vektorima $\vec{\omega}_t$ i $\vec{\omega}_a$. Za određivanje brzine relativnog kretanja $\vec{v}_{\tau a}$ vektor $\vec{\omega}_a$ se paralelnim pomeranjem dovodi u tačku O_t . Kao rezultat redukcije dobija se vektor $\vec{\omega}_{a(O_t)}$, sa napadnom tačkom koja se poklapa sa O_t , i vektorski moment definisan sledećom vektorskom jednačinom

$$\vec{m}_a^{(t)} = \vec{e} \times \vec{\omega}_a, \quad (19)$$

pri čemu je \vec{e} radijus vektor napadne tačke vektora $\vec{\omega}_a$ u koordinatnom sistemu $O_t x_t y_t z_t$ (slika 3), koji se može napisati u obliku izraza:

$$\vec{e} = -e \cos \varphi_t \vec{i}_t + e \sin \varphi_t \vec{j}_t \quad (20)$$

Vektor prenosne brzine tačke P_t može se prikazati u obliku relacije:

$$\vec{v}_{pt} = \vec{\omega}_t \times \vec{r}_t = \begin{vmatrix} \vec{i}_t & \vec{j}_t & \vec{k}_t \\ 0 & 0 & \omega_t \\ x_t & y_t & 0 \end{vmatrix} = -y_t \omega_t \vec{i}_t + x_t \omega_t \vec{j}_t, \quad (21)$$

pri čemu su $\vec{i}_t, \vec{j}_t, \vec{k}_t$ - jedinični vektori koordinatnog sistema trohoide $O_t x_t y_t z_t$.

Vektor prenosne brzine tačke P_a može se prikazati u obliku relacije:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{pa}^{(t)} &= \vec{\omega}_{a(O_t)} \times \vec{r}_t + \vec{e} \times \vec{\omega}_a = \begin{vmatrix} \vec{i}_t & \vec{j}_t & \vec{k}_t \\ 0 & 0 & \omega_a \\ x_t & y_t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i}_t & \vec{j}_t & \vec{k}_t \\ -e \cos \varphi_t & e \sin \varphi_t & 0 \\ 0 & 0 & \omega_a \end{vmatrix} = \\ &= (-y_t + e \sin \varphi_t) \omega_a \vec{i}_t + (x_t + e \cos \varphi_t) \omega_a \vec{j}_t \end{aligned} \quad (22)$$

Prema tome, vektor brzine klizanja profila unutrašnjeg u odnosu na spoljašnji zupčanik, prema jednačini (18), u koordinatnom sistemu trohoide se može predstaviti vektorskom jednačinom u obliku:

$$\vec{v}_{ia}^{(t)} = \left\{ -e(\sin z\phi + \lambda \sin \phi) + \frac{r_c}{z} \sin(\phi + \delta) \right\} \omega_r \vec{i}_t + \left\{ e(\cos z\phi + \lambda \cos \phi) - \frac{r_c}{z} \cos(\phi + \delta) \right\} \omega_r \vec{j}_t. \quad (23)$$

3.2. Određivanje brzine klizanja posredstvom relativnih brzina

U toku sprezanja, profili se istovremeno kotrljaju i klizaju, jedan u odnosu na drugi. Kotrljanje profila može da se predstavi kao njegovo obrtanje oko tačke dodira P . Pri tome, brzina kotrljanja je jednaka relativnoj brzini tačke dodira \vec{v}_{rt} , odnosno \vec{v}_{ra} . Klizanje profila, u tački dodira P , je posledica razlike u intenzitetu relativnih brzina tačaka P_t i P_a , na profilima unutrašnjeg, odnosno spoljašnjeg zupčanika.

Relativna brzina je vektorski izvod vektora položaja tačke u odnosu na pokretni koordinatni sistem. Dekartove koordinate brzine tačke jednake su skalarnim izvodima Dekartovih koordinata te tačke po vremenu. Prema tome, relativna brzina tačke P_t u koordinatnom sistemu trohoide može da se predstavi u vektorskom obliku

$$\vec{v}_{rt} = v_{xt} \vec{i}_t + v_{yt} \vec{j}_t. \quad (24)$$

Algebarska vrednost projekcije ove brzine na osu x_t je:

$$v_{xt} = \frac{dx_t}{dt} = \frac{dx_t}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{dx_t}{d\phi} \omega_r, \quad (25)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \frac{dx_t}{d\phi} &= -ez(\sin z\phi + \lambda \sin \phi) + r_c(1 + \delta') \sin(\phi + \delta), \\ \delta' &= \frac{d\delta}{d\phi} = \frac{(z-1)[1 + \lambda \cos(z-1)\phi]}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos(z-1)\phi}, \end{aligned} \quad (26)$$

a $\omega_r = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}$ je ugaona brzina epitrohoide, oko svoje ose, u odnosu na obvojniciu.

Na sličan način dobija se i druga koordinata relativne brzine tačke na profilu trohoide:

$$v_{yt} = \frac{dy_t}{dt} = \frac{dy_t}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{dy_t}{d\phi} \omega_r, \quad (27)$$

$$\frac{dy_t}{d\phi} = ez(\cos z\phi + \lambda \cos \phi) - r_c(1 + \delta') \cos(\phi + \delta).$$

Zamenom dobijenih izraza za projekcije vektora relativne brzine trohoide na ose koordinatnog sistema trohoide u izraz (24) dobija se vektorska jednačina

$$\vec{v}_{rt} = \left\{ -ez(\sin z\phi + \lambda \sin \phi) + r_c(1 + \delta') \sin(\phi + \delta) \right\} \omega_r \vec{i}_t + \left\{ ez(\cos z\phi + \lambda \cos \phi) - r_c(1 + \delta') \cos(\phi + \delta) \right\} \omega_r \vec{j}_t, \quad (28)$$

odnosno, njen intenzitet

$$v_{rt} = \left\{ ez(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \beta)^{\frac{1}{2}} - r_c(1 + \delta') \right\} \omega_r. \quad (29)$$

Vektor položaja tačke dodira P_a u koordinatnom sistemu obvojnice može da se napiše u obliku sledeće matrice relacije:

$$\bar{r}_a = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ez\lambda \cos \frac{\pi}{z} - r_c \cos \left(\frac{\pi}{z} + \delta \right) \\ ez\lambda \sin \frac{\pi}{z} - r_c \sin \left(\frac{\pi}{z} + \delta \right) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

a zatim i vektor relativne brzine posmatrane tačke

$$\bar{v}_{ra} = \begin{bmatrix} v_{xa} \\ v_{ya} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Primenom istog postupka, koji je primenjen na vektor \bar{r}_t za dobijanje relativne brzine, na vektor \bar{r}_a dobijaju se sledeće jednačine:

$$\bar{v}_{ra} = \begin{bmatrix} r_c \delta' \sin \left(\frac{\pi}{z} + \delta \right) \omega_r \\ -r_c \delta' \cos \left(\frac{\pi}{z} + \delta \right) \omega_r \end{bmatrix}, \quad (32)$$

dok je intenzitet ove brzine jednak

$$v_{ra} = r_c \delta' \omega_r. \quad (33)$$

Vektor relativne brzine tačke P_a profila obvojnice se u koordinatnom sistemu trohoide može dobiti sledećom matrice transformacijom:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ra}^{(t)} = L_{ta} \bar{v}_{ra}^{(a)} &= \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{z} - \phi \right) & \sin \left(\frac{\pi}{z} - \phi \right) \\ -\sin \left(\frac{\pi}{z} - \phi \right) & \cos \left(\frac{\pi}{z} - \phi \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_c \delta' \sin \left(\frac{\pi}{z} + \delta \right) \omega_r \\ -r_c \delta' \cos \left(\frac{\pi}{z} + \delta \right) \omega_r \end{bmatrix} = \\ &= r_c \delta' \sin(\phi + \delta) \omega_r \bar{i}_t - r_c \delta' \cos(\phi + \delta) \omega_r \bar{j}_t \end{aligned} \quad (34)$$

pri čemu je L_{ta} podmatrica matrice M_{ta} , kod koje su izostavljeni četvrta kolona i vrsta.

Polazeći od jednačina (15), (16) i (18) mogu se napisati jednačine za određivanje brzina relativnog kretanja profila unutrašnjeg zupčanika u odnosu na spoljašnji:

$$\bar{v}_{ta} = \bar{v}_{ra} - \bar{v}_{rt}$$

i obrnuto

$$\bar{v}_{at} = \bar{v}_{rt} - \bar{v}_{ra}.$$

Dakle, brzina relativnog kretanja profila trohoide u odnosu na obvojnici je definisana jednačinom:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ta}^{(t)} &= \{ ez(\sin z\phi + \lambda \sin \phi) - r_c \sin(\phi + \delta) \} \omega_r \bar{i}_t + \\ &\quad \{ -ez(\cos z\phi + \lambda \cos \phi) + r_c \cos(\phi + \delta) \} \omega_r \bar{j}_t \end{aligned} \quad (36)$$

Pri upoređivanju jednačina (23) i (36) vidi se da su one identične, uz

$$\omega_t = \frac{d\varphi_t}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi - z\phi) = -z \frac{d\phi}{dt} = -z\omega_r. \quad (37)$$

Na osnovu geometrijskih odnosa sa slike 1 može se pokazati da je udaljenje tačke D od trenutnog kinematskog pola C jednako:

$$\overline{CD} = ez(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos\beta)^{\frac{1}{2}}, \quad (38)$$

a takođe važi jednakost

$$ez(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos\beta)^{\frac{1}{2}} = ez[\cos(\beta - \delta) + \lambda \cos\delta]. \quad (39)$$

Konačno, može se napisati izraz za određivanje brzine klizanja, kao algebarske vrednosti vektora relativne brzine spregnutih profila, tj.:

$$v_{kl} = |\vec{v}_{ta}| = \left\{ ez(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos\beta)^{\frac{1}{2}} - r_c \right\} \omega_r. \quad (40)$$

Kod zupčastih parova sa unutrašnjim ozubljenjem relativna ugaona brzina je jednaka razlici apsolutnih ugaonih brzina zupčanika:

$$\omega_{ta} = |\omega_t - \omega_a| = \left| \omega_t - \frac{z-1}{z} \omega_t \right| = \left| \frac{\omega_t}{z} \right| = |\omega_r|. \quad (41)$$

Ako se udaljenje tačke dodira od kinematskog pola predstavi u obliku:

$$\overline{CP} = ez(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos\beta)^{\frac{1}{2}} - r_c, \quad (42)$$

na osnovu navedenog može da se napiše opšti izraz za određivanje brzine klizanja spregnutih profila sa unutrašnjim ozubljenjem:

$$v_{kl} = \overline{CP} |\omega_t - \omega_a|. \quad (43)$$

Prema tome, brzina klizanja linearno raste sa povećanjem rastojanja tačke dodira od kinematskog pola, što je u skladu sa poznatim odnosom koji važi za uzajamno obvojne krive [4]. Zbog toga je, sa gledišta praktične primene, poželjno da se tačke dodira nalaze u okolini odgovarajućih kinematskih kružnica.

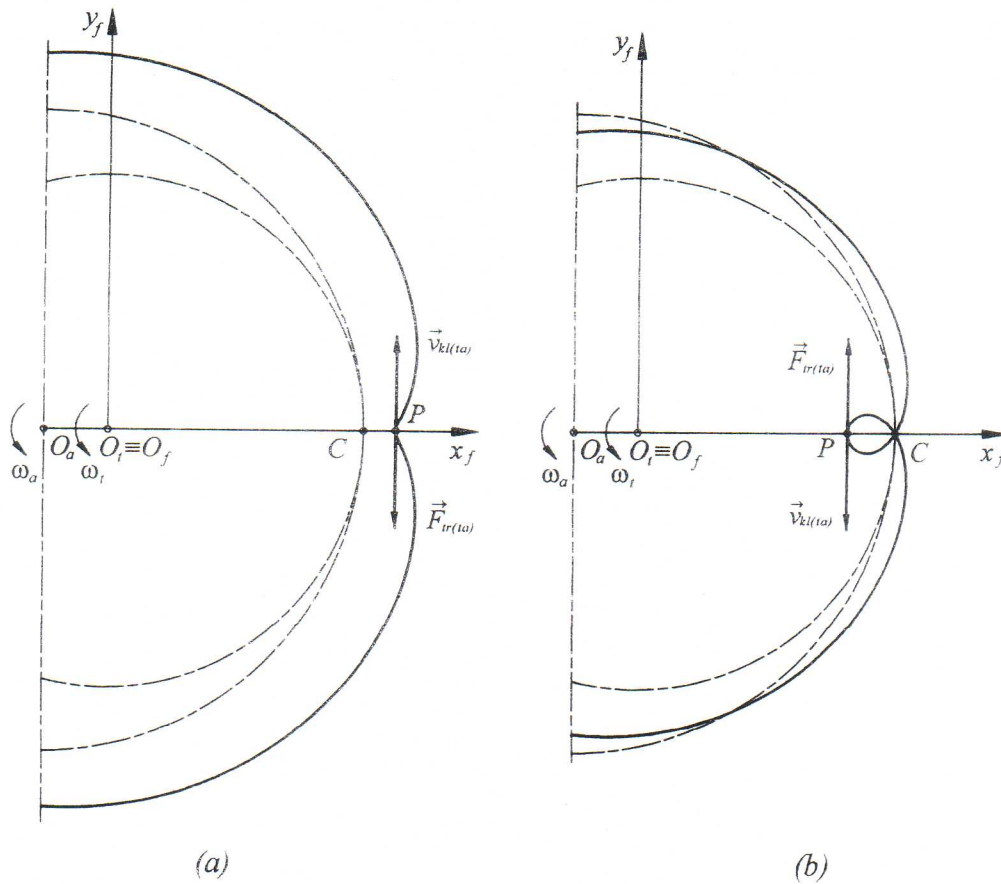
Brzina klizanja je jednaka nuli samo onda kada se profili dodiruju u kinematskom polu i pri tome dolazi do promene znaka. Kod trohoidnog ozubljenja dodirnica profila ne prolazi uvek kroz kinematski pol. Na slici 4 su prikazana dva različita oblika dodirnice: (a) dodirnica je glatka kriva i ne prolazi kroz kinematski pol, (b) dodirnica prolazi kroz kinematski pol i ima petlju. Polazeći od jednačine (42) može da se utvrdi pri kojim kombinacijama geometrijskih parametara dolazi do pojave petlje na dodirnici i promene znaka brzine klizanja. Udaljenje tačke dodira od kinematskog pola je jednako nuli kada je:

$$r_c = ez(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos\beta)^{\frac{1}{2}}. \quad (44)$$

U tom trenutku tački dodira trohoidnog profila odgovara ugao $\beta = \pi$ (podnožje profila), tako da se dobija uslov za pojavu petlje na dodirnici profila:

$$r_c > ez(\lambda - 1). \quad (45)$$

Dobijeni izraz je značajan za utvrđivanje eventualne promene smera momenta sile trenja klizanja pri određivanju mehaničkih gubitaka snage (slika 4).



Slika 4. Smer brzine klizanja i sile trenja u tački dodira P na referentnoj liniji $O_i O_a$ kod različitih oblika dodirnice trohoidnog zupčastog para

3.3. Određivanje zbirne brzine kotrljanja

Za analizu pojave habanja osim brzine klizanja značajna je veličina zbirne brzine kotrljanja. Zbirna brzina kotrljanja predstavlja vektorski zbir relativnih brzina u tački dodira spregnutih profila:

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_{rt} + \vec{v}_{ra}, \quad (46)$$

što se u koordinatnom sistemu trohoide može predstaviti u obliku

$$\vec{v}_\Sigma = \left\{ -ez(\sin z\phi + \lambda \sin \phi) + r_c(1 + 2\delta')\sin(\phi + \delta) \right\} \omega_r \vec{i}_t + \left\{ ez(\cos z\phi + \lambda \cos \phi) - r_c(1 + 2\delta')\cos(\phi + \delta) \right\} \omega_r \vec{j}_t \quad (47)$$

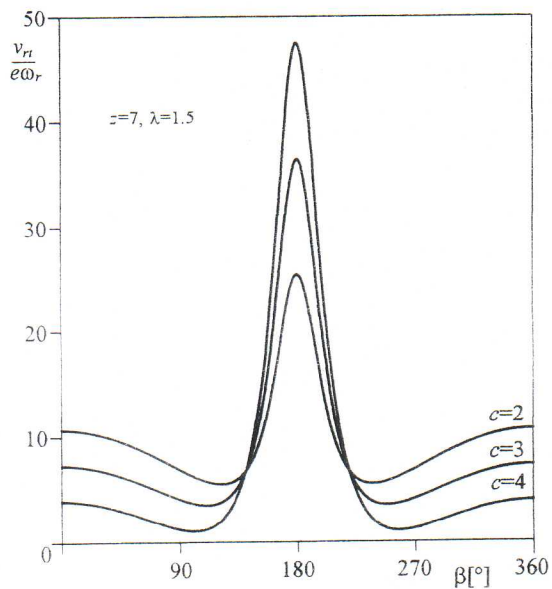
Intenzitet zbirne brzine kotrljanja, uz primenu jednačine (39), može se izraziti kao

$$v_\Sigma = \left\{ ez(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \beta)^{\frac{1}{2}} - r_c(1 + 2\delta') \right\} \omega_r \quad (48)$$

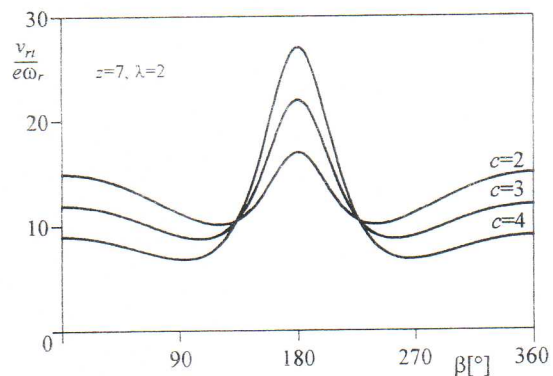
Polazeći od izvedenih izraza za brzine tačke dodira profila može se zaključiti da je za njihovu grafičku interpretaciju, a u cilju dobijanja bezdimenzijske veličine, pogodno uvođenje koeficijenta poluprečnika ekvidistante

$$c = \frac{r_c}{e} \quad (49)$$

Na slikama 5 – 7 su dati dijagrami promene razmatranih kinematskih parametara u funkciji ugla β , za različite brojeve zubaca z , a varirane su i vrednosti koeficijenta trohoide λ i koeficijenta poluprečnika ekvidistante c .

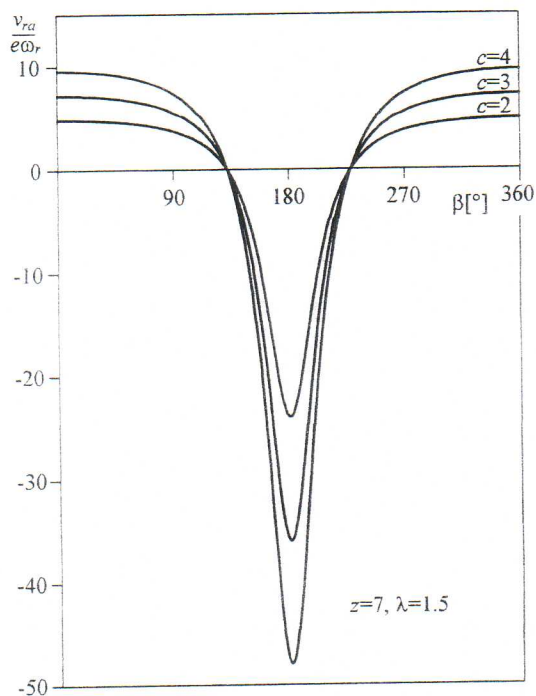


(a)

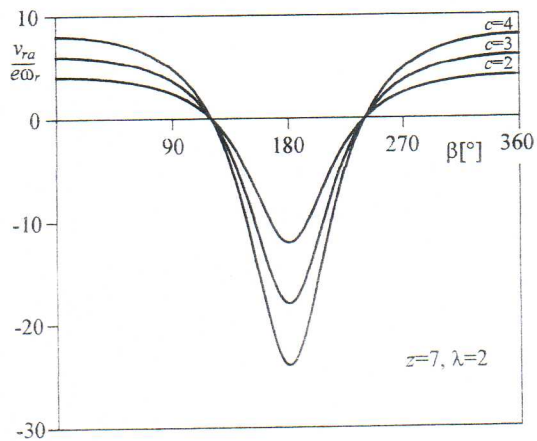


(b)

Slika 5. Brzina kotrljanja tačke dodira modifikovanog trohoidnog profila za broj zubaca $z=7$, pri različitim vrednostima koeficijenta poluprečnika ekvidistante c i koeficijentima trohoide: (a) $\lambda=1.5$ i (b) $\lambda=2$



(a)

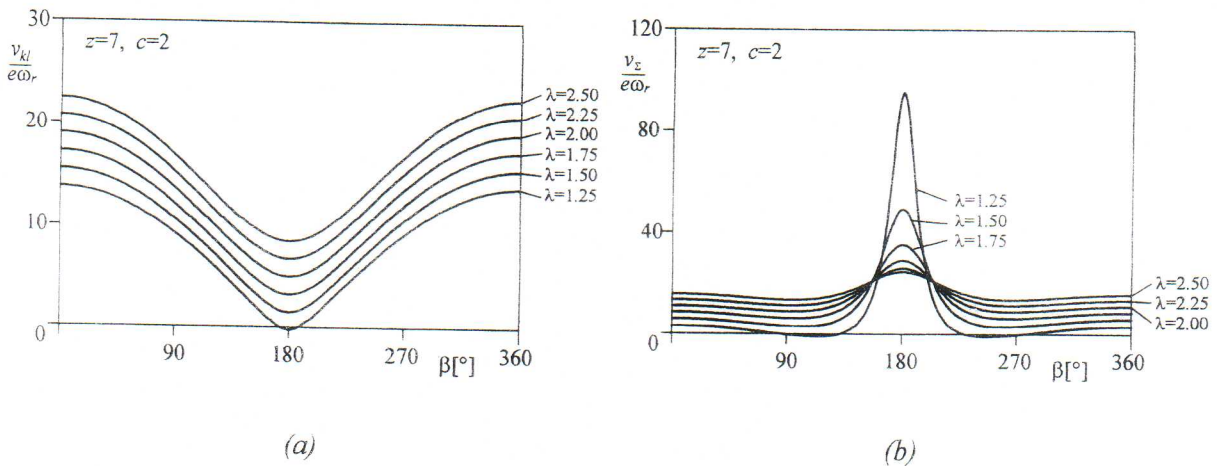


(b)

Slika 6. Brzina kotrljanja tačke dodira kružnog profila za broj zubaca $z=7$, pri različitim vrednostima koeficijenta poluprečnika ekvidistante c i koeficijentima trohoide: (a) $\lambda=1.5$ i (b) $\lambda=2$

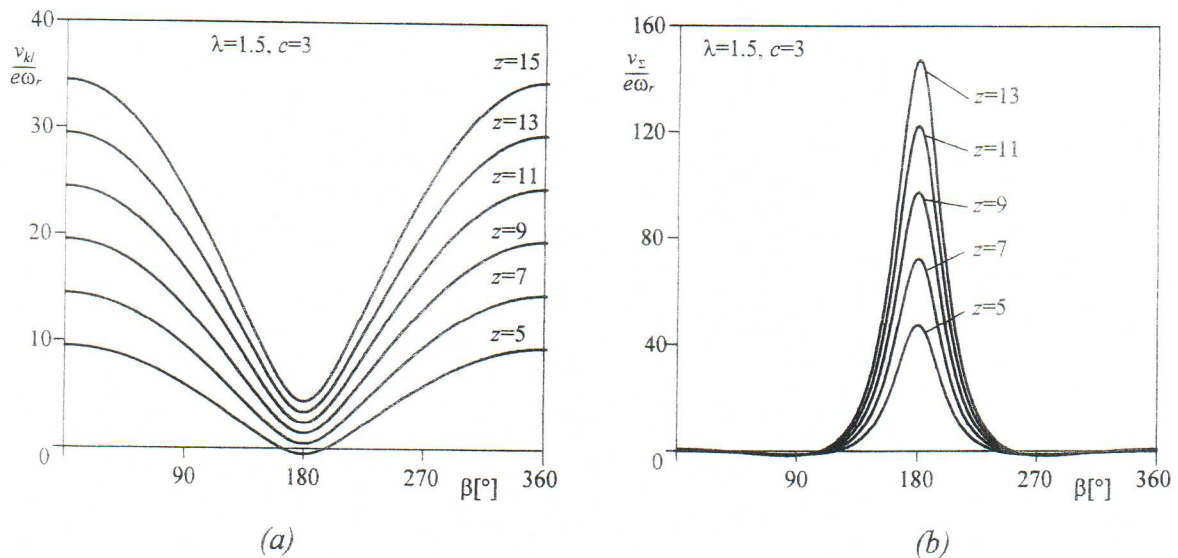
Na osnovu slike 5 proizilazi da pri istom broju zubaca, rast koeficijenta λ dovodi do povećanja brzine kotrljanja v_{r1} na konveksnom delu profila, dok na konkavnom delu profila dolazi do njenog smanjenja. Povećanje vrednosti poluprečnika ekvidistante ima suprotan efekat.

Na osnovu slike 6 proizilazi da pri istom broju zubaca, rast koeficijenta λ dovodi do povećanja brzine kotrljanja v_{ra} , dok povećanje vrednosti poluprečnika ekvidistante ima suprotan efekat.



Slika 7. (a) Brzina klizanja v_{kl} tačke dodira modifikovanog trohoidnog profila i (b) zbirna brzina kotrljanja v_z za broj zubaca $z=7$, koeficijent poluprečnika ekvidistante $c=2$ i pri različitim vrednostima koeficijenta trohoide λ .

Slika 7 ilustruje uticaj koeficijenta trohoide na tok promene brzine klizanja v_{kl} i zbirne brzine kotrljanja v_z , pri istom broju zubaca i poluprečniku ekvidistante. Na osnovu slike 7(a) proizilazi da pri istom broju zubaca, rast koeficijenta λ dovodi do povećanja brzine klizanja v_{kl} . Na osnovu slike 7(b) proizilazi da pri istom broju zubaca, rast koeficijenta λ dovodi do povećanja zbirne brzine kotrljanja v_z na konveksnom delu profila, dok na konkavnom delu profila dolazi do njenog smanjenja.



Slika 8. (a) Brzina klizanja v_{kl} tačke dodira modifikovanog trohoidnog profila i (b) zbirna brzina kotrljanja v_z za različite brojeve zubaca z , pri koeficijentu trohoide $\lambda=1.5$ i pri koeficijentu poluprečnika ekvidistante $c=3$.

Na osnovu slike 8(a) proizilazi da pri istim vrednostima koeficijenata λ i c rast broja zubaca značajno utiče na povećanje brzine klizanja na temenom delu profila, dok je taj uticaj u podnožnom delu mali. Slika 8(b) pokazuje da pri istim vrednostima koeficijenata λ i c rast broja zubaca ne utiče na promenu zbirne brzine kotrljanja na temenom delu profila, dok u podnožnom delu dolazi do njenog naglog povećanja.

4. ZAKJUČAK

U radu je data detaljna analiza kinematskih parametara trohoidnog ozubljenja primenjenog kod gerotorske pumpe. Najpre je definisana dodirnica, a zatim su određeni izrazi za izračunavanje brzine klizanja i kotrljanja u tačkama dodira spregnutih profila. Na osnovu datog matematičkog modela i odgovarajuće grafičke interpretacije mogu se, sa aspekta kinematike, definisati uslovi za optimalno projektovanje razmatranih zupčastih parova. Generalno, može se zaključiti da se pri izboru geometrijskih parametara trohoidnog zupčastog para, a u cilju smanjenja brzine klizanja, preporučuje manji broj zubaca, manje vrednosti koeficijenta trohoide i veće vrednosti poluprečnika ekvidistante.

5. LITERATURA

- [1] Demenego A., Vecchiato D., Litvin F. L., Nervegna N., Manco S.: Design and simulation of meshing of a cycloidal pump, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, p.p. 311–332, 2002.
- [2] Fabiani M., Mancò S., Nervegna N., Rundo M., Armenio G., Pachetti C., Trichilo R.: Modelling and Simulation of Gerotor Gearing in Lubricating Oil Pumps, SAE paper 99P-464.
- [3] Litvin F. L., Feng P.: Computerized design and generation of cycloidal gearings, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 7, 891-911, 1996.
- [4] Литвин Ф. Л.: Теория зубчатых зацеплений, Наука, Москва, 1968.
- [5] Maiti R., Sinha G. L.: Kinematics of active contact in modified epitrochoid generated rotary piston machines, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 23, No 1, 39-45, 1988.
- [6] Manco G., Manco S., Rundo M., Nervegna N.: Computerized generation of novel gearings for internal combustion engines lubricating pumps, *The International Journal of Fluid Power*, vol. 1 – Number 1 - ISBN 1493-9776, 49-58, March 2000.
- [7] Vecchiato D., Demenego A., Argyris J., Litvin F.: Geometry of a cycloidal pump, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, p.p. 2309-2330, 2001.
- [8] Савелов А. А.: Плоские кривые, Физматгиз, Москва, 1960.

Summary

KINEMATICAL ANALYSIS OF TROCHOIDAL GEARING BY IC ENGINES LUBRICATING PUMPS

Josifovic D., Ivanovic L.

In this paper is considered the generating and kinematical analysis of the gear pair profiles in contact with internal trochoidal gearing. Trochoidal gearing is applicated by working elements of the rotational machines as for an example: gerotor pumps and hydro motors. Based on the way of moving of working elements is made classification of rotational machines in two main groups: 1. with fixed axis of the working elements, and 2. with planetary (epicyclical) moving of the internal elements.