

UNIVERZITET U KRAGUJEVCU
MAŠINSKI FAKULTET
KRAGUJEVAC - JUGOSLAVIJA

35 GODINA STUDIJA MAŠINSTVA U KRAGUJEVCU

- MONOGRAFIJA -





UNIVERZITET U KRAGUJEVCU
MAŠINSKI FAKULTET
Sestre Janjić 6, 34000 KRAGUJEVAC
JUGOSLAVIJA

35 GODINA STUDIJA MAŠINSTVA

UDK: 535.65:621

O NEKIM SPECIJALNIM OBLICIMA CIKLOIDNOG OZUBLJENJA I NJIHOVOJ PRIMENI U KONSTRUKCIJAMA

*Dr Danica Josifović, vanredni profesor,
Lozica Ivanović, asistent pripravnik,
Mašinski fakultet, Kragujevac*

Rezime

U radu se analizira cikloidno ozubljenje i njegovi specijalni oblici, nastali različitim kombinacijama kotrljajućih i osnovnih kružnica spregnutog kinematskog para. Karakterističan oblik profila zupca se sastoji od: hipocikloide u podnožnom delu i epicikloide kod temenog dela profila. Takođe su razmatrani i oblici profila koji se sastoje od produženih i skraćenih cikloida. Zatim je dat prikaz zupčastih parova cikloidnog ozubljenja sa malim brojem zubaca koji se koriste kod: prenosnika, ekscentar pumpi, duvaljki i rotacionih klipnih motora.

Ključne reči: cikloidno ozubljenje (specijalni oblici)

ON SOME SPECIAL FORMS OF THE CYCLOIDAL GEARING AND THEIR APPLICATION IN CONSTRUCTIONS

Abstract

In this paper is analyzed the cycloidal gearing and their special forms generated by the different combinations of the rolling and base circles of the kinematic pair in contact. Characteristic form of the gear-tooth profiles is cycloid, where the addendum of the tooth is an epicycloid and the dedendum is a hypocycloid. Further, there are described the teeth pairs of the cycloidal gearing with the small teeth numbers which are used for: transmission of power, excentric pumps, impellers or rotors of pressure blowers, rotary piston motors (Wankel engine) and for other special applications.

Key words: cycloidal gearing (their special forms)

1. UVOD

Dve osnovne vrste zupčastih prenosnika, čije osobine bitno utiču na njihovu oblast i karakteristike primene, su evolventni i cikloidni. Danas se najčešće primenjuju zupčasti prenosnici sa evolventnim ozubljenjem. Njih odlikuje, pre svega, tehnološkičnost, zahvaljujući

primeni standardnih alata i pribora pri izradi i kontroli ozubljenja, zatim detaljno razvijena geometrija, standardom utvrđeni pojmovi, karakteristike i tolerancije. Pored toga, njihova prednost u odnosu na cikloidne prenosnike ogleda se i u tome što se ograničena promena osnog rastojanja ne odražava na funkciju, kao i u mogućnosti korišćenja istog standardnog alata za postizanje određenih promena u obliku i dimenzijama zubaca.

U današnje vreme, razvoj proizvodnog mašinstva i primena savremene tehnologije obezbeđuje visoku tačnost pri izradi ozubljenja. Stoga, navedene tehnološke karakteristike evolventnog ozubljenja ne predstavljaju više presudan faktor koji im daje prioritet u odnosu na cikloidno.

Malo je poznato da je jedan od prvih oblika profila zupca zupčanika bio cikloidni. Cikloidno ozubljenje predstavlja klasičan primer ozubljenja i u kinematskom smislu ima brojne prednosti. Međutim, zbog složenosti oblika profila zupca alata troškovi izrade su bili veći, a tačnost manja. Ove praktične poteškoće su, u velikoj meri, uticale da se ono šire komercijalno ne koristi. Korišćenje cikloidnih krivih, za razliku od evolventnih, omogućava da se variranjem geometrijskih parametara realizuje veliki broj različitih kombinacija zupčastih parova. Praktična primena cikloidnih profila u nekim specijalnim zadacima pokazala je njihove prednosti u odnosu na evolventni profil. Osim toga, neki od mogućih parova zupčanika sa cikloidnim profilom, čija primena do sada nije bila poznata, mogu biti upotrebljeni za rešavanje različitih problema prenosa snage i kretanja. Jedan od osnovnih ciljeva ovog rada je da, u tom pogledu, da doprinos boljem sagledavanju mogućnosti primene elemenata cikloidnog oblika.

2. CIKLOIDNE KRIVE

Cikloida je putanja tačke vezane za kružnicu koja se kotrlja po nepokretnoj kružnici. U slučaju kada se tačka, koja opisuje cikloidu, nalazi na kružnici koja se kotrlja sa spoljašne strane nepokretne kružnice, njena putanja se zove epicikloida, dok se pri kotrljanju sa unutrašnje strane dobija hipocikloida.

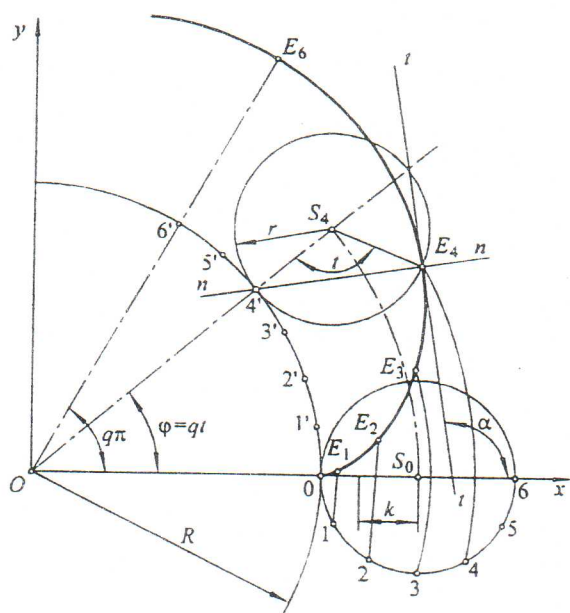
Jednačine ovih krivih se izvode u koordinatnom sistemu čiji se početak postavlja u središte nepokretne kružnice, a apscisa kroz tačku dodira datih kružnica, pri čemu se ta tačka posmatra kao generatora (Sl. 1 i Sl. 2). Ako se sa r označi poluprečnik pokretne kružnice, sa R poluprečnik nepokretne kružnice, a njihov odnos sa $q=r/R$, na osnovu prikazane konstrukcije i uslova kotrljanja bez klizanja, za epicikloidu se izvode parametarske jednačine u obliku:

$$\begin{aligned}x &= (R + qR)\cos qt - qR\cos(t + qt), \\y &= (R + qR)\sin qt - qR\sin(t + qt).\end{aligned}\tag{1}$$

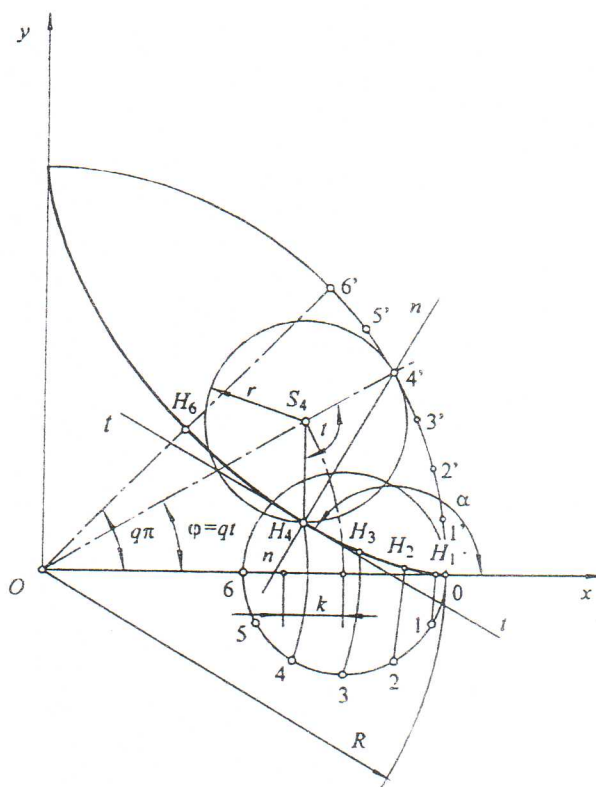
U ovim jednačinama parametar je ugao kotrljanja t a veličina q je modul epiciklude.

Na sličan način za hipocikloidu se dobijaju jednačine:

$$\begin{aligned}x &= (R - qR)\cos qt + qR\cos(t - qt), \\y &= (R - qR)\sin qt - qR\sin(t - qt).\end{aligned}\tag{2}$$



Slika 1. Konstrukcije epicikloide



Slika 2. Konstrukcija hipocikloide

Ako se u jednačinama (1) vrednost q zameni sa $-q$ dobijaju se jednačine od kojih je prva jednaka prvoj od jednačina (2) a druge će se razlikovati samo po znaku. To pruža mogućnost da se epicikloida i hipocikloida opišu jedinstvenim jednačinama (1), koje za $q > 0$ izražavaju epicikloidu a za $q < 0$ hipocikloidu [1].

2.1. Specijalni oblici cikloda

Pericikloida je kriva koju opisuje tačka na kružnici, koja se kotrlja sa spoljašnje strane oko nepokretne kružnice, što znači da nepokretna kružnica leži unutar kotrljajuće kružnice. Pericikloida se izražava jednačinama (1) ako je modul q negativan broj i po apsolutnoj vrednosti je veći od jedinice.

Trohoida je kriva koju opisuje tačka fiksirana za kružnicu na udaljenosti k od njenog središta, kada se ova kotrlja bez klizanja po nepokretnoj kružnici. U zavisnosti od toga da li se kružnica kotrlja sa spoljašnje ili unutrašnje strane kružnice trohoide se dele na epitrohoide i hipotrohoide. Ako je $k > r$ trohoida je produžena, za $k < r$ je skraćena, a u slučaju $k = r$ dobija se obična epicikloida ili hipocikloida.

Parametarske jednačine trohoida izražavaju opšte jednačine cikloida i imaju oblik:

$$\begin{aligned} x &= (R + qR)\cos qt - k\cos(t + qt), \\ y &= (R + qR)\sin qt - k\sin(t + qt), \end{aligned} \quad (3)$$

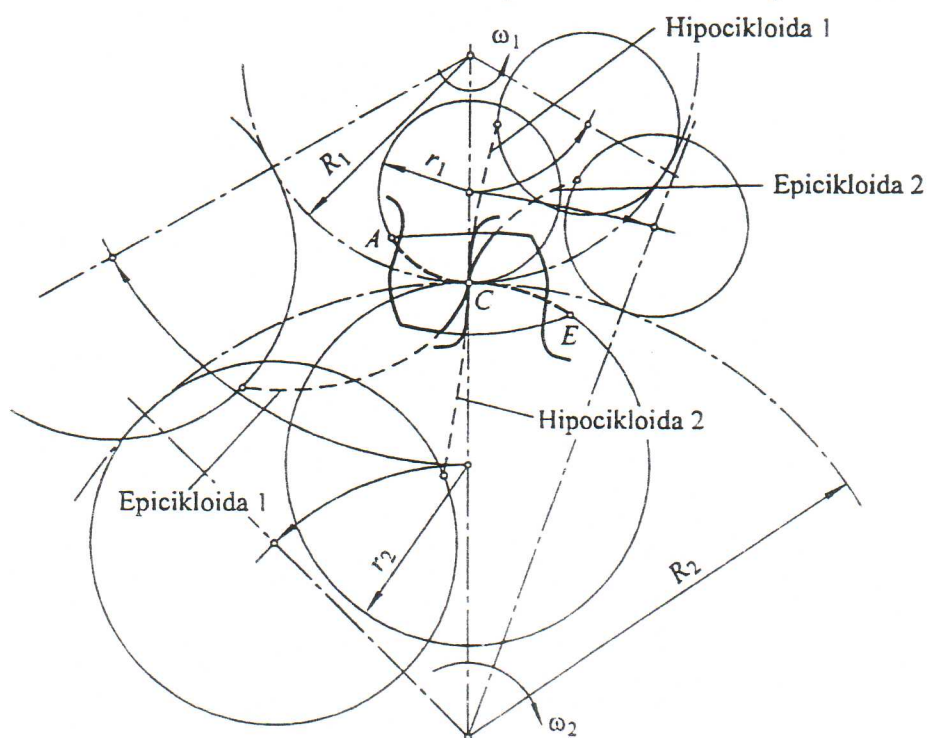
uz napomenu da parametri q i k mogu imati pozitivnu ili negativnu vrednost.

Ortocikloida je putanja tačke na kružnici koja se kotrlja bez klizanja po pravoj liniji. Jasno je da se ortocikloida može posmatrati kao ekstremni oblik epicikloide, kada nepokretna kružnica ima beskonačno veliki poluprečnik - prelazi u pravu.

Evolventa kružnice predstavlja specijalni oblik epicikloide, kada pokretna kružnica ima beskonačno veliki poluprečnik. Tako se evolventa kružnice može definisati kao putanja tačke prave koja se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj kružnici poluprečnika R .

3. CIKLOIDNO OZUBLJENJE

Profil zupca cikloidnog ozubljenja se generiše uz pomoć cikloida ili njihovih ekvidistanti.



Slika 3. Generisanje cikloidnog ozubljenja

Kod spoljašnjeg cikloidnog ozubljenja, prikazanog na slici 3, profil zupca opisuju epicikloida i hipocikloida. Za dobijanje oblika profila zupca zupčanika izabrane su dve kružnice r_1 i r_2 , koji se kotrljaju po nepokretnoj kružnici R_1 , koja je istovremeno kinematska kružnica pogonskog zupčanika. Kružnica r_1 , koja leži unutar kružnice R_1 , svojim kretanjem opisuje profil noge zupca u obliku hipocikloide, dok kružnica r_2 generiše profil glave zupca u obliku epicikloide [4]. Profil zupca spregnutog zupčanika nastaje kada se navedene kružnice kotrljaju po odgovarajućoj kinematskoj kružnici R_2 . Pri tome se generiše epicikloidni profil glave zupca kretanjem r_1 , a profil noge kao hipocikloida pri kretanju kružnice r_2 . Oznake pomenutih kružnica odgovaraju njihovim poluprečnicima.

Osnovni profil ovakvog ozubljenja opisuju lukovi dvaju ortocikloida, koje nastaju pri kotrljanju kružnica r_1 i r_2 sa spoljašnje i unutrašnje strane kinematske prave. Dodirnica cikloidnih profila se sastoji iz dva kružna luka AC i CE pokretnih kružnica. U toku sprezanja,

zajednička normala spregnutih profila u tački dodira, koja prolazi kroz kinematski pol C , menja svoj pravac kao i sila koja deluje duž normale.

Osnovna prednost cikloidnog ozubljenja u poređenju sa evolventnim je manje habanje profila usled toga što se konveksni deo profila zupca dodiruje sa konkavnim. Osim toga, imaju veći stepen sprezanja i manju brzinu klizanja profila. Kod cikloidnog ozubljenja nije prisutno podsecanje zupca, što pruža mogućnost za dobijanje zupčanika sa malim brojem zubaca.

Kao nedostatak cikloidnog ozubljenja u prvom redu se navodi složenost profila reznog alata i, prema tome, veći troškovi izrade. Osim toga zupčanici sa cikloidnim profilom zupca su veoma osetljivi na promene osnog rastojanja, jer dolazi do nepravilnog sprezanja i promene prenosnog odnosa. Cikloidni zupčanici se malo primenjuju za konstrukciju sistema razmenljivih zupčanika. Poluprečnik krivine cikloidnih profila u kinematskom polu je jednak nuli, što takođe nije povoljna karakteristika.

3.1. Uticaj veličine modula cikloide na oblik profila zupca

Modul cikloide q je definisan kao odnos poluprečnika pokretne kružnice i poluprečnika nepokretne kružnice, u ovom slučaju kinematske kružnice. U zavisnosti od izabrane veličine kotrljajuće kružnice, pri datoj kinematskoj kružnici, menja se modul cikloide i oblik krive kojom se opisuje profil zupca zupčanika. Prema tome, modul cikloide se može smatrati osnovnim parametrom čijim se variranjem mogu dobiti različiti oblici profila zupca i takvi zupčasti parovi, čija primena do sada nije bila poznata, a koji se mogu upotrebiti za neke posebne zadatke.

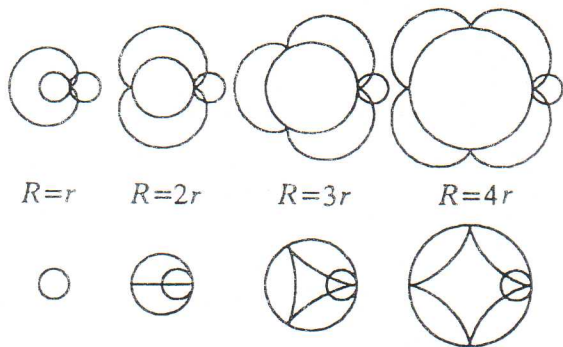
U slučaju kada je vrednost modula cikloide $|q|=0,5$ hipocikloida prelazi u pravu liniju. Tada se dobija ozubljenje koje ima pravolinijski profil noge zupca, a koristi se u industriji satova i zove se satno ozubljenje. Za vrednosti modula $|q|>0,5$ krivina hipocikloide menja znak, postaje konveksna, tako da se dobija profil zupca koji, ne samo da je teško izraditi već i dovodi do sprezanja dva konveksna profila i većih kontaktnih napona. Zbog toga se za praktičnu primenu preporučuju moduli $|q|<0,5$, tačnije u intervalu $(0,35\div 0,4)$, kako bi se dobio konveksno-konkavni profil zupca zupčanika.

Ako je modul cikloide racionalan broj koji se može izraziti u obliku razlomka m/n , cikloida se formira kao zatvorena kriva, koja ima n grana i n šiljaka, za $|q|<0,5$. Ako je $|q|>0,5$ grane hipocikloide se međusobno presecaju i obrazuju n čvornih tačaka. Na slici 4 prikazane su epicikloidne i hipocikloidne krive za $m=1$, pri čemu su izabrane pokretne kružnice jednakih veličina. Ove krive se u čitavoj svojoj dužini mogu primeniti direktno za oblik zupca zupčanika. Pri tome je sprezanje moguće u svim varijantama, osim one kada je hipocikloida unutar epicikloide.

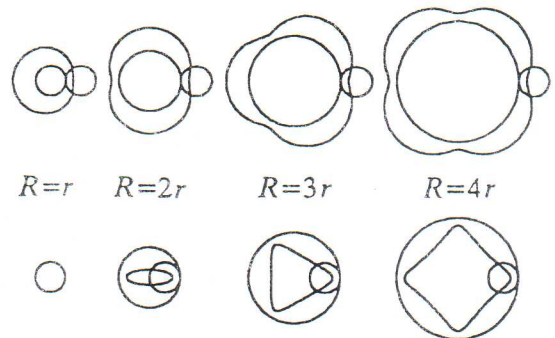
Nekoliko takvih parova sa malim brojem zubaca je dato na slici 6. Primeri pokazuju vrlo različite mogućnosti za formiranje profila zubaca, koji se nakon određenih ispitivanja mogu primeniti u mehanizmima za specijalne zadatke. Pri tome su naročito interesantna ozubljenja istih vrsta cikloida sa n , odnosno $n-1$ brojem zubaca.

U cilju potpunije analize razmatraće se oblici skraćenih (Sl. 5) i produženih (Sl. 8) cikloida. Može se uočiti da u slučaju kada je $r=R$ hipotrohoide prelazi u tačku, a u slučaju $r=0,5R$ nastaje elipsa, kao specijalni oblik hiptrohoide. Oblici produženih cikloida imaju petlje i, prema tome, praktično se ne mogu primeniti na čitavoj svojoj dužini za opisivanje profila

zubaca. Skraćene cikloide imaju prevojne tačke, a nekoliko mogućih parova zubaca ovih oblika je prikazano na slici 7.



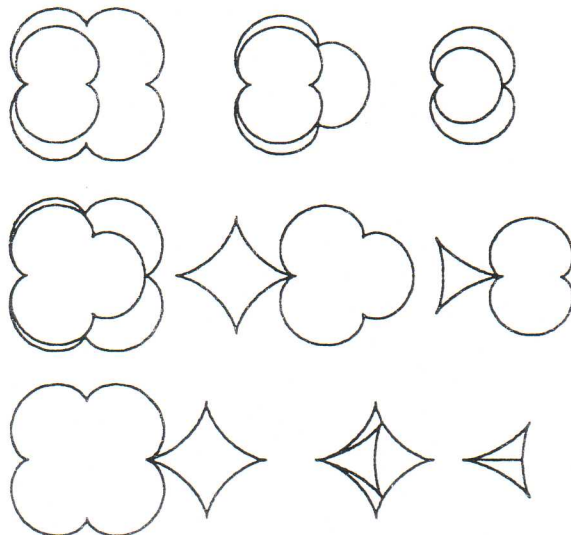
$R=r$ $R=2r$ $R=3r$ $R=4r$



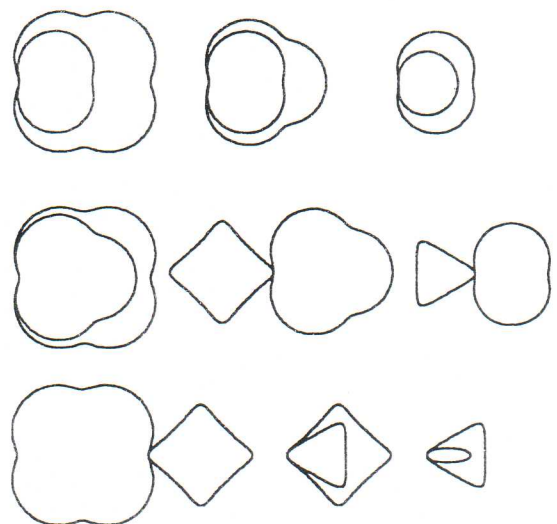
$R=r$ $R=2r$ $R=3r$ $R=4r$

Slika 4. Cikloidne krive

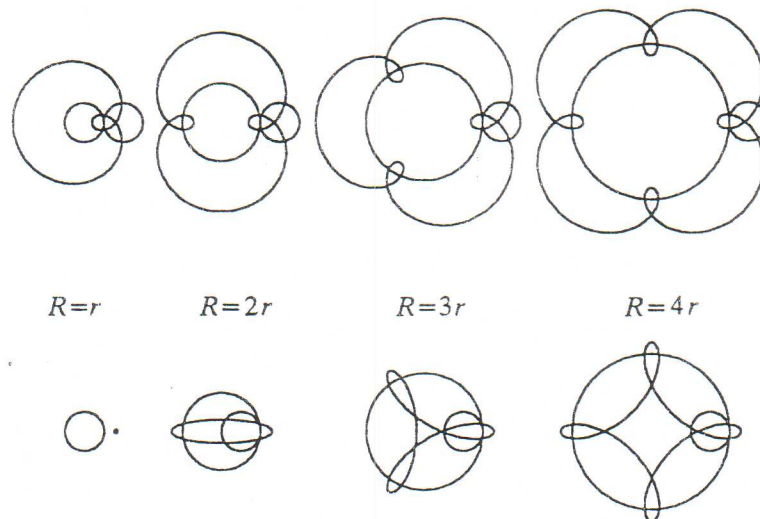
Slika 5. Skraćene cikloide



Slika 6. Zupčasti cikloidni parovi



Slika 7. Zupčasti parovi od skraćenih cikloida



$R=r$ $R=2r$ $R=3r$ $R=4r$

Slika 8. Produžene cikloide

3.3. Ozubljenje sa profilom ekvidistante

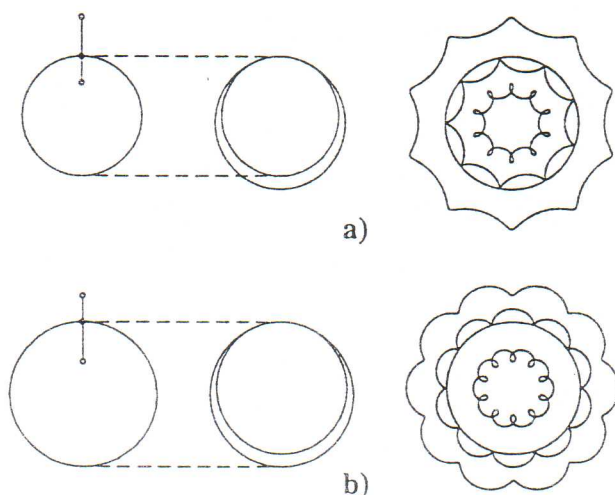
Ako se kod zupčastog para prema slici 3 usvoji $r_1=0$ i $r_2=R_2$, tada epicikloida i hipocikloida za zupčanik 2 prelaze u tačku, kao i hipocikloida zupčanika 1. Zupci drugog zupčanika se realizuju pomoću valjčića, dok se kod prvog zupčanika opisuju ekvidistantom epicikloide, koja nastaje kotrljanjem kružnice r_2 po kružnici R_1 .

U slučaju unutrašnjeg ozubljenja pokretna kružnica se bira tako da je njen položaj unutar nepokretne kružnice. Pri tome, razmatraju se tri osnovne varijante putanje posmatrane tačke, vezane za pokretnu kružnicu:

1. $r=R$, kada se kao oblik zupca dobija tačka koja može da leži na obimu kružnice, unutar ili izvan nje,
2. $r < R$, kada se dobija obična, produžena ili skraćena hipocikloida,
3. $r > R$, kada se dobija obična, produžena ili skraćena pericikloida.

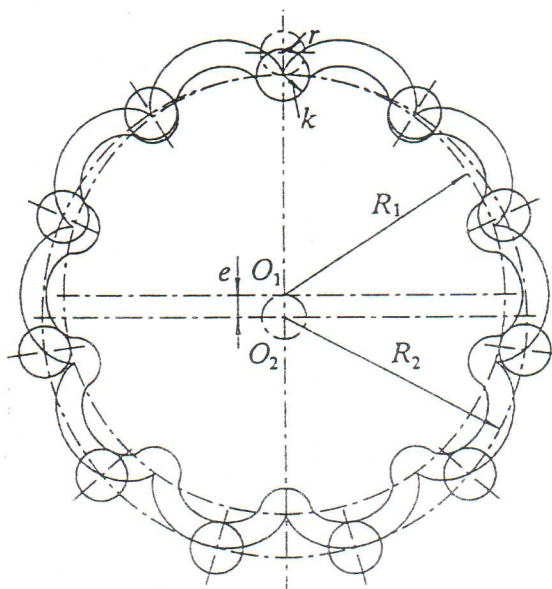
Odnos poluprečnika pokretne kružnice i nepokretne kružnice q se usvaja tako da se dobijaju zatvorene krive. To znači da q može da se izrazi u obliku racionalnog broja $q = \frac{n \pm 1}{n}$, gde je n ceo broj. Pri konstrukciji cikloidnog unutrašnjeg ozubljenja analiziraju se dva slučaja:

- $R_1 = r, R_2 = \frac{n+1}{n}r$ - kada se kao ozubljenje kod prvog zupčanika dobija tačka, a kod drugog odgovarajuća hipocikloida (Sl. 9,a);
- $R_1 = r, R_2 = \frac{n-1}{n}r$ - kada je profil zupca prvog zupčanika tačka, dok se na drugom zupčaniku formira pericikloida (Sl. 9,b).



Slika 9. Oblici profila ozubljenja:

a) hipocikloida b) pericikloida



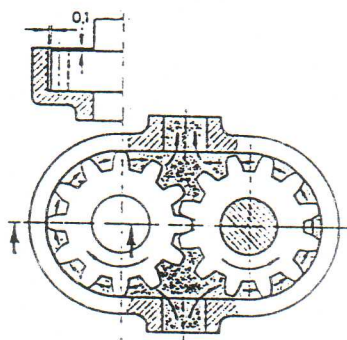
Slika 10. Osnovni elementi cikloidnog unutrašnjeg ozubljenja sa valjčićima

Matematički je dokazano da tačke, koje su pod uglom $2p/n$ opisuju istu cikloidnu krivu. Prema tome, cikloidno ozubljenje obrazuje n tačaka u obliku čitavih grana hipocikloide ili pericikloide. Na ovaj način za teorijski profil zupca spregnutog zupčanika dobija se tačka, što sa praktične strane nije pogodno za ozubljenje. Profili koji se svode na tačku praktično se realizuju pomoću valjčića. Spregnuti profili su ekvidistante odgovarajućih cikloidnih krivih, čije je udaljenje jednako poluprečniku izabranog valjčića, kao što je pokazano na slici 10. Pri tome se mogu ostvariti različiti parovi izborom spoljašnje ili unutrašnje ekvidistante. Za praktičnu primenu su najpogodnije produžena hipocikloida i pericikloida, pošto se odgovarajućim izborom ekvidistante čitav profil može primeniti za sprezanje.

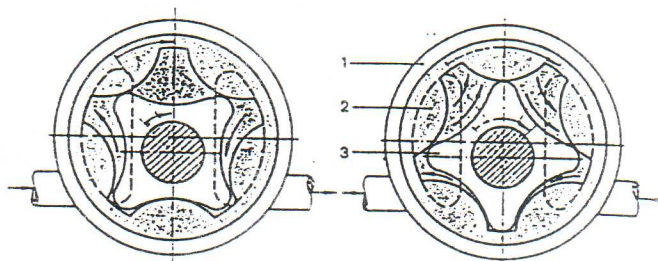
4. PRIMENA CIKLOIDNIH PROFILA U PRAKSI

Cikloidni oblici su iskorišćeni pri konstruisanju velikog broja rotacionih mašina različite namene. Neki od tih primera primene predstavljeni su u ovom radu. Prednosti primene cikloidnih profila u ovim konstrukcijama su: kompaktna konstrukcija, veliki prenosni odnos, malo trenje klizanja, visoki stepen sigurnosti, mala težina i gabariti i duži vek trajanja.

Na slici 11 data je zupčasta pumpa sa cilindričnim zupčanicima spoljašnjeg cikloidnog ozubljenja. Odlikuje se jednostavnom konstrukcijom, pouzdanošću, malim gabaritima, kompaktnošću i drugim pozitivnim svojstvima [5].



Slika 11. Zupčasta pumpa



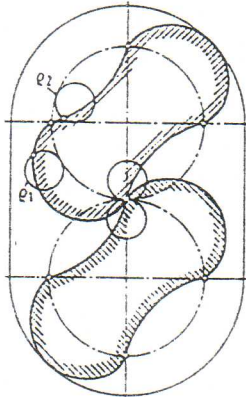
Slika 12. Kapsel pumpa

U uslovima visokog pritiska upotrebljavaju se rotacione *Gederove* pumpe (Kapsel pumpe), čiji su osnovni elementi prikazani na slici 12. Ove pumpe imaju telo zvezdastog oblika (3), ekscentrično postavljeno u kućište (1), čije se rotaciono kretanje prenosi na obrtnu čauru [5].

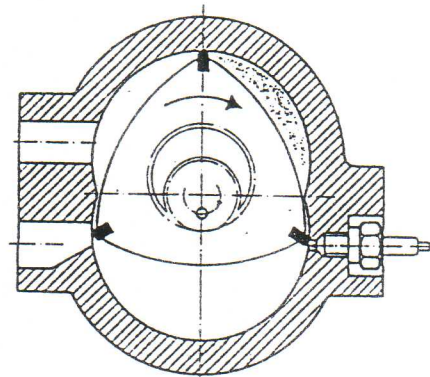
Rotaciona pumpa (*Root-ova* duvaljka vazduha) ima dva zupčanika sa po dva zupca i prikazana je na slici 13. Zupci imaju cikloidni profil, dobijen kotrljanjem pokretne kružnice po centroidi, čiji je poluprečnik četiri puta veći od poluprečnika pokretne kružnice. Glava i noga zubaca su opisane čitavom granom epicikloide i hipocikloide. Vratila oba zupčanika su međusobno spojena zupčastim parom sa prenosnim odnosom koji je jednak jedinici [3].

Na slici 14 prikazan je *Wanke*-ov motor. Na rotacionom klipu ovog motora postoje tri karakteristične tačke pod uglom od 120° , koje su generisane kao produžene hipocikloide. U toku relativnog kretanja centroida, ove tačke realizuju konturu statora u obliku produžene pericikloide sa dve grane. Te tri tačke se spajaju proizvoljnom krivom, pri čemu se vodi računa da izabrana linija spajanja ne proдре u konturu statora i da se ostvare povoljni geometrijski uslovi za veći stepen kompresije [5].

Osim navedenih, značajna je primena cikloidnog profila zubac̄ kod cikloreduktora, čiji su osnovni elementi prikazani na slici 15 [3]. Na pogonskom vratilu (3) ekscentrično su postavljeni sateliti (1 i 2) sa cikloidnim ozubljenjem. Pri obrtanju pogonskog vratila velikom brzinom, zupci satelita se sprežu sa valjčićima (6), čije su ose, preko osovinice (5), vezane za nepokretni, centralni zupčanik (4), što dovodi do usporenog obrtanja satelita oko svoje ose. Obrtanje se na gonjeno vratilo prenosi preko trnova (7) sa valjčićima (8), koji ulaze u otvore satelita. Na taj način dobija se usporeno obrtanje gonjenog vratila u suprotnom smeru u odnosu na pogonsko vratilo.



Slika 13. Root-ova pumpa



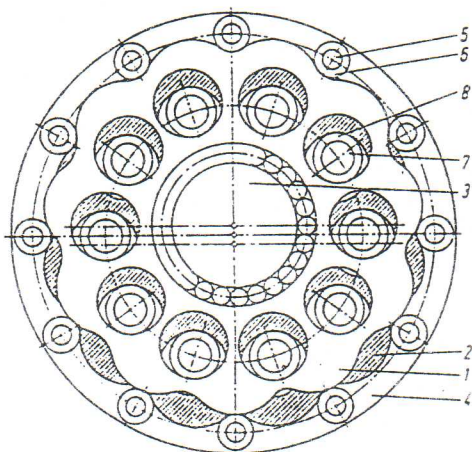
Slika 14. Wankel-ov motor

Broj zubaca na satelitu z_1 je za jedan manji od broja valjčića centralnog zupčanika z_2 . Prenosni odnos iznosi:

$$i = -\frac{z_1}{z_2 - z_1}, \quad (9.6)$$

odnosno, jednak je broju zubaca satelita z_1 .

Cikloprenosnike karakterišu izuzetno veliki prenosni odnosi, mali gabariti i izuzetno mali moment inercije. Da bi se dobio miran i uravnotežen rad prenosnika koriste se dva satelita, koji su fazno pomereni za 180° .



Slika 15. Osnovni elementi cikloreduktora

Valjčići na trnovima gonjenog vratila i čivijama prstenastog dela kućišta su postavljeni u cilju prenošenja snage putem čistog kotrljanja. Time je trenje klizanja, koje se javlja kod klasičnih zupčanika, u znatnoj meri eliminisano. Uz visoku tačnost izrade i visoku tvrdoću kontaktnih površina, postiže se visoki stepen iskorišćenja [6].

Cikloreduktori imaju jednostavnu konstrukciju, pouzdani su i imaju dugi radni vek. Oblasti primene su im veoma raznovrsne, a najznačajnije su: građevinska industrija, metalurgija, transportni uređaji, alatne mašine i robotika. Osim toga imaju i mogućnost rada kao multiplikatori.

5. ZAKLJUČAK

Uprkos dominaciji evolventnog ozubljenja, postoji veliki broj zupčastih parova sa cikloidnim ozubljenjem koji su, primenjeni u posebnim slučajevima prenosa snage i kretanja, efikasniji od evolventnih. U ovom radu je dat niz različitih cikloidnih krivih i prikazana su različita ozubljenja sa cikloidnim profilom zubaca. Na kraju su prikazane neke od karakterističnih konstrukcija uređaja kod kojih su primenjeni elementi cikloidnog oblika, a kroz analizu primenjenih oblika dat je i kritički osvrt na njihove pozitivne i negativne osobine.

LITERATURA

1. Savelov A. A. : Ploskie krive, Fizmatgiz, Moskva, 1960.
2. Lehman M. : Sonderformen der Zykloidenverzahnung, Konstruktion, Vol. 31, 1979.
3. Nieman G., Winter H. : Maschinen-elemente, Band II, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
4. Miltenović V., Ognjanović M. : Mašinski elementi, zupčanici, Građevinska knjiga, Beograd, 1991.
5. Schwoch W. : Das Fachbuch vom Automobil Automotor, Georg Westermann, Verlag, Braunschweig, 1976.
6. Katalog proizvoda fabrike alata i mašina GOŠA, Smederevska palanka