

## **MODEL ZUPČASTO-KAIŠNOG PRENOSNIKA**

*Blaža Stojanović, Mašinski fakultet, Kragujevac*

### **Abstract**

*This paper deals with kinematic analysis of timing belt transmissions contacts, as well as, with detailed analysis of timing belt model. Timing belt tooth goes into contact with a drive pulley, stretched to the maximum, because of the previous tension. When the contact begins the peak of the belt tooth makes the contact with the outer surface of the pulley teeth. The process of the teeth entering into the contact zone is accompanied with the relative sliding of their side surfaces and appropriate friction force. Belt material properties, a generally existing pitch difference as well as friction forces between belt groove and pulley top land are taken into account.*

**Key words:** *timing belt, model, friction*

### **1. UVOD**

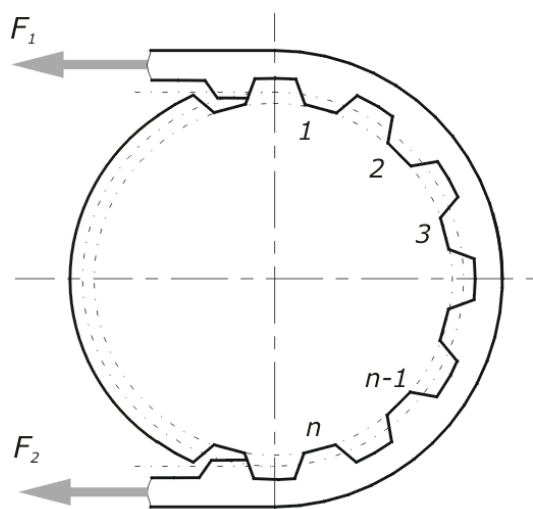
Po svojim konstrukcionim i tehničkim osobinama zupčasti kaiš predstavlja veoma fleksibilni, elastični element. Prenos snage se ostvaruje neposrednim kontaktom zuba kaiša sa zubima kaišnika. Zupčasti kaiševi su konstruisani tako da je međuzublje kaiša u dodiru sa temenom površinom zuba kaišnika. Pri prenosu snage dolazi do tangencijalnog ugiba zuba kaiša i kaiš klizi preko zuba kaišnika, usled čega se javljaju sile trenja [1].

Za objašnjenje raspodele opterećenja formira se odgovarajući model pomoću opruga. Prvi model zupčastog kaiša dao je Gerbert (1978). Kod ovog modela korak neopterećenog kaiša je isti kao i korak kaišnika. Pored toga uvodi se i sila trenja između međuzublja kaiša i temena zuba kaišnika. Prenos snage i kretanja se vrši pri konstantnom obrtnom momentu [2]. Ova uprošćenja dovode dotle da se duž obvojnog luka smer sile trenja ne menja, što će biti kasnije objašnjeno.

### **2. OPTEREĆENJE ZUBA**

Za proračun je usvojen zupčasto-kaišni prenosnik prikazan na slici 1. Oba kaišnika su sa istim brojem zuba, odnosno prenosni odnos  $i = 1$ . Broj zuba u zahvatu je takođe usaglašen, isti kod oba kaišnika. Prvi zub u zahvatu obeležen je sa  $i = 1$ . Pri porastu ugla obrtanja  $\varphi$ , svaki zub se pomera u sledeći položaj i dobija veći broj. Poslednji zub u sprezi obeležen je sa  $i = n$ . Pri prenosu momenta, zatezanje kaiša se menja od  $F_1$  do  $F_2$ , gde su  $F_1$  zatezanje vučnog, a  $F_2$  zatezanje slobodnog ogranka, što pokazuje da mora da postoji izvesna raspodela opterećenja zuba.

Korak kaiša  $h_i$  i sile zatezanja  $F_i$  i  $F_i^*$  odgovaraju zubu kaiša  $i$ , koji se nalazi između zuba  $i$  i  $i - 1$  kaišnika (slika 2 i 3).



**Slika 1:** Zupčasto-kaišni prenosnik

Ukoliko se zanemari masa kaiša, statičke sile su uravnotežene u kaišu za svaki ugaoni korak. Posmatra se zub kaiša  $i$  na čiji bok deluje opterećenje  $Q_i$ .  $Q_i$  predstavlja rezultantu svih normalnih i tangencijalnih sila koje deluju na bok zuba. Sila  $Q_i$  uravnotežena je silama  $F_i$  i  $F_{i-1}^*$  (slika 2a) i iznosi [3]:

$$Q_i = F_i - F_{i-1}^* \quad (1)$$

Sila trenja  $F_{Ti}$ , koja deluje između međuzublja kaiša i zuba kaišnika  $i$  iznosi:

$$F_{Ti} = F_i^* - F_i \quad (2)$$

Deo obimne sile koji prenosi zub kaiša  $i$ , označena je sa  $S_i$  i može se izraziti pomoću sledeće jednačine:

$$S_i = F_i^* - F_{i-1}^* \quad (3)$$

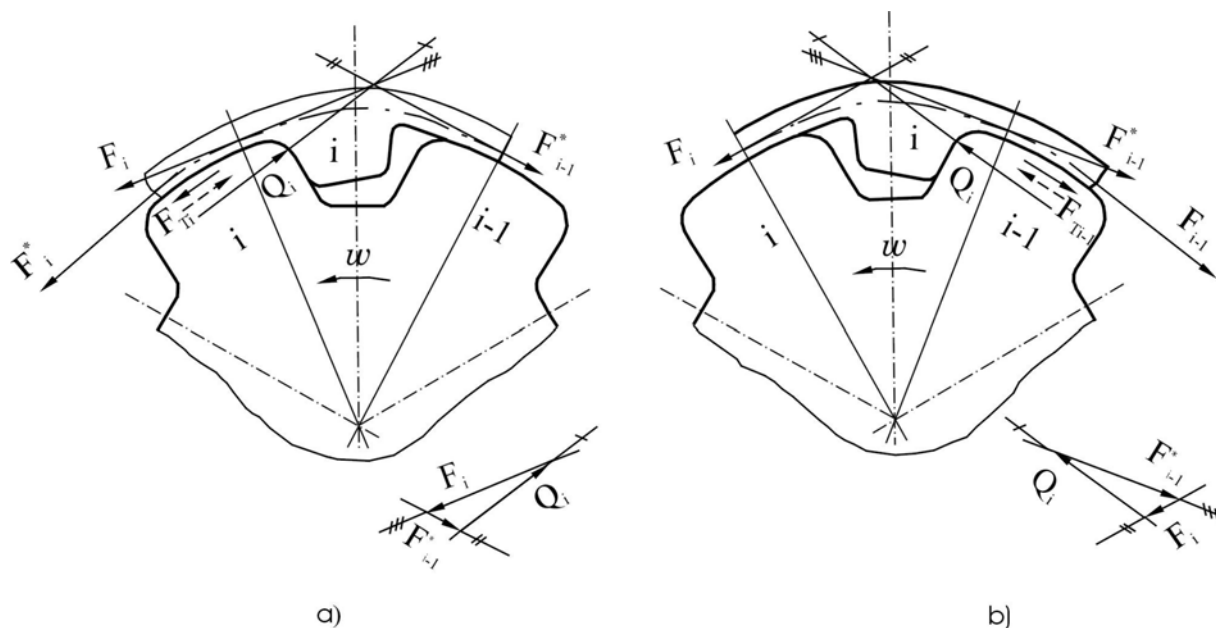
ili

$$S_i = Q_i + F_{Ti} \quad (4)$$

Jednačine (3) i (4) jedino važe ako je  $Q_i$  pozitivno, odnosno ako je  $F_i > F_{i-1}^*$ . Za gonjeni kaišnik za zub kaiša  $i$  važe sledeće jednačine:

$$S_{i-1} = F_i - F_{i-1} \quad (5)$$

$$S_{i-1} = Q_i + F_{Ti-1} \quad (6)$$



**Slika 2:** Šema sila koje deluju na zub kaiša

### 3. OBJAŠNJENJE MODELA

Pri postavljanju modela kaiš je predstavljen određenim brojem identičnih opruga krutosti  $2c_R$ , vezanih redno (slika 3). Korak kaiša je

predstavljen pomoću dve opruge čija dužina može da se predstavi na sledeći način:

$$h_i = h_0 + \frac{F_i + F_i^*}{2c_R} \quad (7)$$

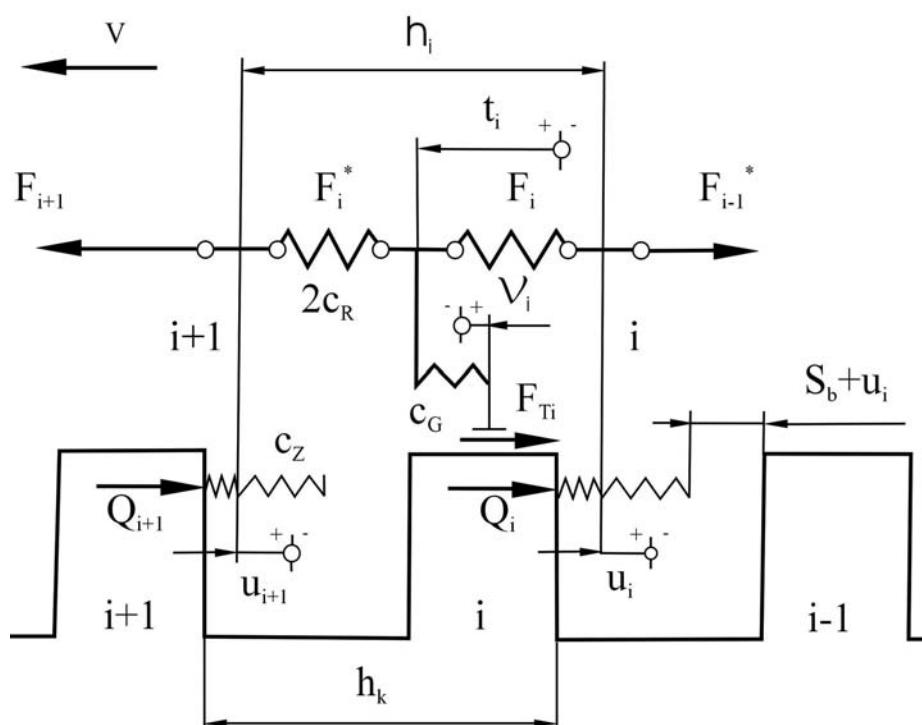
gde su:

$h_0$  - korak kaiša u neopterećenom stanju (nulti korak) i

$c_R$  - krutost opruge.

Ako  $F_i$  zamenimo iz jednačine (2) u jednačinu (7) dobijamo:

$$h_i = h_0 + \frac{F_i + \frac{F_{Ti}}{2}}{c_R} \quad (8)$$



**Slika 3:** Model zupčasto-kaišnog prenosnika

Pod pretpostavkom da su elastične karakteristike zuba kaiša linearne, on je predstavljen pomoću sabijene opruge čija je krutost  $c_Z$ . Pomeranje zuba kaiša u odnosu na zub kaišnika definiše se pomoću koordinate  $u_i$ . Ovo pomeranje  $u_i$  meri se od sredine zuba kaiša u odnosu na nepokretnu tačku kaišnika.

Ako je pomeranje  $u_i$  negativno, i njegova apsolutna vrednost veća od bočnog zazora ( $s_b$ ) ( $s_b \geq 0$ ), tada je zub kaiša  $i$  u kontaktu sa sledećim zubom kaišnika  $i-1$ . Prema tome, veza između pomeranja  $u_i$  i opterećenja  $Q_i$  može se predstaviti za sledeća tri slučaja [3] i [4]:

$$u_i > 0 \Rightarrow Q_i = u_i c_Z \quad (Q_i > 0) \quad (9a)$$

$$0 \geq u_i \geq -s_b \Rightarrow Q_i = 0 \quad (9b)$$

$$-s_b > u_i \Rightarrow Q_i = (u_i + s_b) c_Z \quad (Q_i < 0) \quad (9c)$$

#### 4. SMER I VELIČINA SILE TRENJA

Promenljiva sila duž obvojnog ugla prouzrokuje promenu u koraku kaiša. Na zategnutoj strani korak kaiša je veći od koraka kaišnika, a na slobodnoj strani manji od njega. Krećući se u smeru obrtanja kaišnika, kaiš se pomera do tačke u kojoj se usaglašavaju koraci. Posle usaglašavanja koraka, kaiš počinje relativno da se kreće i to u suprotnom smeru od smeru u kome se kretao pre izjednačavanja koraka. Na obvojnem luku u blizini vučnog ogranka, gde je kaiš maksimalno istegnut, a korak kaiša veći od koraka kaišnika dolazi do skraćivanja koraka kaiša i kaiš se relativno kreće. Sila trenja deluje suprotno ovim kretanjima, odnosno u suprotnom smeru od sile u vučnom ogranku. Na slobodnom kraju gde je korak kaiša manji od koraka kaišnika, kaiš se izdužuje i sila trenja deluje u suprotnom smeru od sile u slobodnom ogranku [5].

Sve ovo dovodi do zaključka da se duž obvojnog ugla pravac, smer i intenzitet sile trenja menjaju u zavisnosti od položaja. Promena smera sile trenja na obvojnog uglu nastaje uvek kada postoji promena koraka kaiša.

Celokupno objašnjenje koje je dato važi za pogonski kaišnik, dok kod gonjenog kaišnika važi suprotno.

Radi objašnjenja ovog procesa, postojeći model se proširuje za još jednu oprugu čija je krutost  $c_G$ . Sila trenja koja deluje u srednjoj tački koraka, proporcionalna je ugibu opruge  $v_i$ , tj.:

$$F_{Ti} = v_i c_G \quad (10)$$

Međutim  $F_{Ti}$  je manja od maksimalne sile trenja koja se dobija iz jednačine:

$$F_{Ti \max} = F_i (e^{\delta \mu \theta} - 1) \quad (11)$$

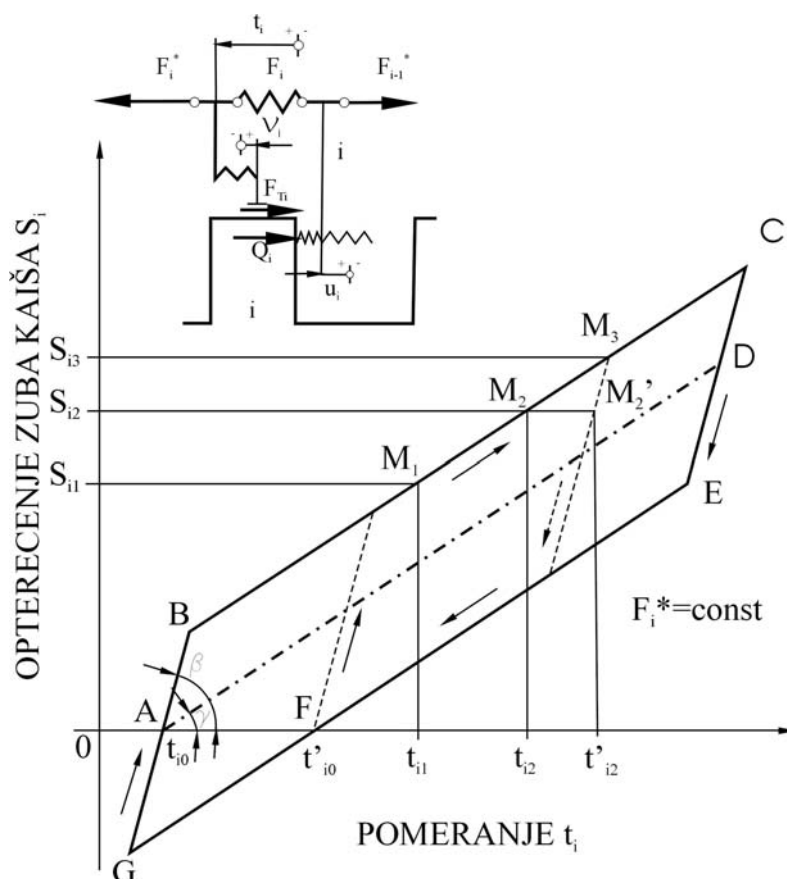
Odakle je:

$$v_{i \max} = \frac{F_{Ti \max}}{c_G} \quad (12)$$

$$F_{Ti} \leq F_{Ti \max} \quad (13)$$

$$v_i \leq v_{i \max} \quad (14)$$

U jednačini (11)  $\mu$  je koeficijent trenja,  $\delta = \pm 1$ , i zavisi od smera klizanja. Početno zatezanje se dobija kada je ugao uvijanja  $\theta$  jednak ugaonom koraku  $\alpha_p$ .



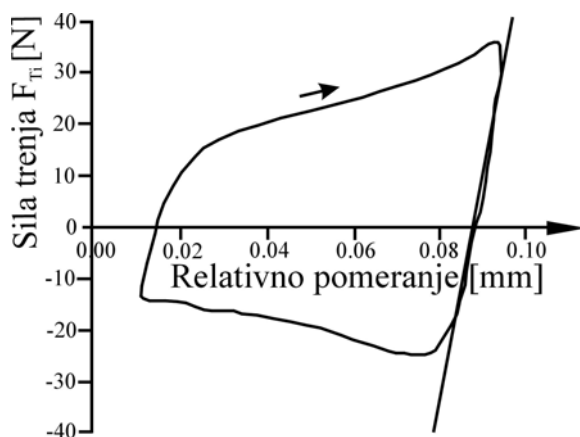
**Slika 4:** Zavisnost opterećenja zuba kaiša  $S_i$  od pomeranja  $t_i$  u tački u kojoj deluje sila trenja  $F_{Ti}$

Na slici 4 prikazana je zavisnost opterećenja zuba kaišnika  $S_i$  i pomeranja  $t_i$  u tački delovanja sile trenja  $F_{Ti}$ . U početnoj tački A zub kaiša  $i$  dodiruje zub kaišnika  $i$  tj.  $Q_i = 0$  i  $t_i = t_{i0}$ . Ugib  $v_i$  jednak je nuli, odakle sledi da

je sila  $F_{Ti} = 0$ . Nema razlike između sile zatezanja  $F_i^*$  i  $F_{i-1}^*$ . Uz pretpostavku da je sila  $F_i^*$  sve vreme konstantna, opterećenje zuba dovodi do postepenog smanjenja  $F_{i-1}^*$ . Prema tome, maksimum sile trenja zavisi od početnog

zatezanja  $F_i^*$ , a ne od vrednosti opterećenja  $S_i = F_i^* - F_{i-1}^*$ . Obe opruge se deformišu dok sila trenja ne dostigne maksimalnu vrednost u tački B ( $F_{Ti\max}^{(+)}$ ). Od tačke B do tačke C, kaiš klizi preko temena zuba kaišnika  $i$  i tada raste deformacija zuba kaiša (opruge). Rasterećenje zuba kaiša počinje u tački C. Sila trenja je ponovo jednaka nuli u tački D i dostiže negativan maksimum u tački E ( $F_{Ti\max}^{(-)}$ ). Sa daljim smanjenjem opterećenja  $S_i$  kaiš opet klizi preko kaišnika, ali u suprotnom smeru. Zbog toga je iznad linije AD sila trenja pozitivna, a ispod ove linije negativna. U tački F zatezanje  $F_{i-1}^*$  dostiže početnu vrednost,  $F_{i-1}^* = F_i^*$ , i  $S_i = 0$ , međutim  $Q_i = |F_{Ti\max}^{(-)}|$  i  $t_i = t_{i0}'$ . Ako se zanemari izduženje kaiša,  $tg\beta = c_G + c_Z$  i  $tg\gamma = c_Z$ .

Kao potvrda ovog izlaganja mogu da se koriste rezultati eksperimentalnih ispitivanja [5], koji su prikazani na slici 5. Očigledno je da se sila trenja menja po intenzitetu, pravcu i smeru.



**Slika 5:** Zavisnost sile trenja od relativnog pomeranja

Na osnovu histeretisa trenja, dokazano je da na kaiš i opterećenje zuba utiču predhodna opterećenja. Prema tome, nije moguće da se odredi raspodela opterećenja u određeno vreme ili za određeni ugao ubrtanja, a da se ne uzmu u obzir predhodna pomeranja.

Ako je poznata početna tačka  $M_1$  (slika 4), zub kaišnika je opterećen sa  $S_{i1}$ , a odgovarajuće pomeranje u kojoj deluje sila trenja je  $t_{i1}$ . Posle postepenog porasta opterećenja do  $S_{i2}$ ,

pomeranje postaje  $t_{i2}$ . Ako zatim opterećenje dostigne vrednost  $S_{i3}$ , a zatim padne na  $S_{i2}$ , odgovarajuće pomeranje biće  $t_{i2}'$ . Na osnovu toga se opterećenje zuba i vrednost i smer sile trenja mogu odrediti tačno, ako nagib opterećenja zuba ne menja svoj znak u datom vremenskom intervalu ili između početnog i krajnjeg opterećenja. Da bi se stekli ovi uslovi obrtno kretanje kaišnika se mora podeliti na korake. Promena položaja opterećenja zuba izazvana je kinematikom kaišnog prenosnika (usled promenljivog broja zuba u sprezi) i zbog promenljivog obrtnog momenta. Uzima se da je veličina koraka konstantna i iznosi polovinu ugaonog koraka.

## 5. ZAKLJUČAK

Određivanje raspodele opterećenja u zupčastim kaiševima je veoma komplikovano. Uvođenjem odgovarajućeg modela kaiša, olakšava se određivanje pojedinih sila. Ovde je poseban osvrt dat na definisanje pravca, smera i intenziteta sile tranja u zupčasto-kaišnim prenosnicima.

## LITERATURA

- [1] Tanasijević S.: Mehanički prenosnici: lančani prenosnici, zupčasti kaišni prenosnici, kardanski prenosnici (IV-dopunjeno izdanje), JDT, Kragujevac, 1994.
- [2] Gerbert G., Jönson H., Persson U., Stensson G.: Load distribution in timing belts, ASME J.Mech.Design 100 №2, s.208-215, 1978
- [3] Karolev N., Gold P.: Load distribution of timing belt drives transmitting variable torques, Mech.Mach.Theory, 30, №4, s.553-567, 1995
- [4] Peeken H., Fischer F., Frenken E.: Kraftübertragung in Zahnriemengetrieben, Konstruktion 41, s.183-190,1989.
- [5] Stojanović B.: Trenje u zupčasto-kaišnim prenosnicima, Zbornik radova: IRMES '04, Kragujevac, s.439-444, 2004.