

ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА  
УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

## ТЕХНИЧКО РЕШЕЊЕ

M85 Ново техничко решење у фази реализације

Метода за одређивање кинематског коефицијента  
трења динамички оптерећених контаката

АУТОРИ

Бранко Тадић  
Владимир П. Миловановић  
Александар Петровић  
Слободан Митровић  
Љиљана Брзаковић

## **Врста техничког решења**

M85 – Ново техничко решење у фази реализације

## **Аутори техничког решења**

- Др Бранко Тадић<sup>1</sup>, редовни професор
- Др Владимир П. Миловановић<sup>1</sup>, ванредни професор
- Александар Петровић<sup>2</sup>, истраживач-приправник
- Др Слободан Митровић<sup>1</sup>, редовни професор
- Љиљана Брзаковић<sup>3</sup>, асистент

<sup>1</sup> Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

<sup>2</sup> Институт "Михајло Пупин", Београд

<sup>3</sup> Академија Струковних Студија Шумадија, Одсек Трстеник

## **Назив техничког решења**

- Метода за одређивање кинематског коефицијента трења динамички оптерећених контаката

## **Кључне речи**

- убрзање; енергија; трење; удар

## **Наручилац техничког решења**

- Центар за инжењерски софтвер и динамичка испитивања, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

## **Корисник техничког решења**

- Центар за инжењерски софтвер и динамичка испитивања, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

## **Начин верификације резултата**

- Резултати техничког решења су верификовани објављеним радом у међународном часопису категорије M23 и још једним радом који је прихваћен за штампу у међународном часопису категорије M23.

## **Година када је техничко решење урађено**

- 2019-2022.

## **Начин коришћења техничког решења**

- Уређај и развијена метода се примењују за експериментално одређивање кинематског коефицијента трења динамички оптерећених контаката

## **Ко је прихватио техничко решење**

- Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

## **Област технике на коју се техничко решење односи**

- Трибологија, Контактни проблеми, Експериментална механика

## 1 Листа раније прихваћених техничких решења за сваког од аутора појединачно

### 1.1 Бранко Тадић

[M82] Budak I., **Tadić B.**, Jeremić B., Vukelić Đ., Miljanić D., Todorović P., Hodolić J., Industrijski prototip uređaja za ispitivanje statičke popustljivosti i nosivosti spoja elemenata za stezanje i radnog predmeta, TR-35020, Metalik DOO, Nikšić, Crna Gora, Novi Sad, 2012

[M83] Janko Hodolić, **Branko Tadić**, Đorđe Vukelić, NOVO EKSPERIMENTALNO POSTROJENJE ZA SAVIJANJE TANKOZIDNIH CEVI PRIMENOM TOPLOTE GENERISANE TRENJEM, ALKA DOO, Kragujevac, Republika Srbija, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, Mašinski fakultet u Kragujevcu, 2010

[M83] **Tadić B.**, Babić, M., Mitrović, S., Lazić, M., Vukelić, Đ., Univerzalni tribometar, TR-04/2010, Laboratorija za tribologiju Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, 2010

[M83] **Branko Tadić**, Đorđe Vukelić, Petar Todorović, Branislav Jeremić, Ivan Mačužić, Bojan Bogdanović, Novo eksperimentalno postrojenje za određivanje dinamičke popustljivosti steznih i oslonih elemenata pribora, TR-78/2013, GOMMA LINE, Kragujevac, 2013

[M84] Bobić I., Babić M., Mitrović S., Vencl A., Bobić B., **Tadić B.**, Keramički lonac elektrootporne peći za izvođenje kompokasting postupka, TR-08/2010, Preduzeće „RAR“, Batajnica, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, INN „Vinča“, 2008

[M84] Bobić I., Bobić B., Babić M., Mitrović S., Vencl A., **Tadić B.**, Električna metoda za kontrolu reološkog nanošenja poluočvrstih rastopa osnovnih legura I kompozita pri izvođenju reo/komnokasting postupka, TR-07/2010, Preduzeće „RAR“, Batajnica, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, INN „Vinča“, 2009

[M84] Đorđe Vukelić, **Branko Tadić**, Janko Hodolić, Jelena Mitrović, Nenad Simeunović, Specijalni modularni sistem steznih pribora za obradni centar HURCO-500, IMT, Boljevac, Republika Srbija, FTN Novi Sad, MF Kragujevac, 2010

[M84] **Branko Tadić**, Saša Randelović, Petar Todorović, Đorđe Vukelić, Vladimir Kočović, Bojan Bogdanović, Marija Jeremić, Kruti alat namenjen za završnu obradu metala kotrljanjem kuglice, TR-88/2015, Metalik d. o. o., Trebješka 6/26, Nikšić, Crna Gora, Nikšić, Crna Gora, 2015

[M84] Saša Randelović, Đorđe Vukelić, Petar Todorović, Vladimir Kočović, Bojan Bogdanović, Lozica Ivanović, **Branko Tadić**, Optimizacija procesa završne obrade kotrljanjem koglice po površini predmeta obrade na osnovu dubine penetracije kuglice u materijal predmeta obrade, TR-89/2015, Metalik d. o. o., Trebješka 6/26, Nikšić, Crna Gora, Nikšić, Crna Gora, 2015

[M85] **Tadić B.**, Babić M., Mitrović S., Todorović P, Bobić I., Zajednički merni sistem za univerzalni tribometar-tribološki merni centar, TR-05/2010, Laboratorija za tribologiju Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, 2010

[M85] **Tadić B.**, Marjanović N., Vukelić Đ., Galović S., Uređaj za ostvarivanje ekstremno visokih pritisaka, TR-16/2010, Laboratorija za obradu metala rezanjem, Mašinski fakultet, Kragujevac, 2010

### 1.2 Владимир П. Миловановић

[M83] Miroslav Živković, Aleksandar Dišić, Radovan Slavković, Miroslav Ravlić, Rodoljub Vujanac, Dragan Rakić, Milan Blagojević, **Vladimir Milovanović**, Uređaj za ispitivanje materijala pri velikim brzinama deformacije - Zatezni Hopkinsonov štap, TR-70/2012, Univerzitet u Kragujevcu, Fakultet inženjerskih nauka, Kragujevac, 2012

[M85] Rodoljub Vujanac, Radovan Slavković, Miroslav Živković, Nenad Marjanović, Snežana Vulović, **Vladimir Milovanović**, Nova metoda za projektovanje i proračun skladišnih sistema, TR-53/2010, Ministarstvo za nauku Republike Srbije, Privatno preduzeće „IC“ Inženjering d.o.o., Privatno preduzeće „Milanović Inženjering“ d.o.o., DP Zastava Mašine, Kragujevac, Srbija, 2010

**1.3 Александар Петровић**

-

**1.4 Слободан Митровић**

[M83] Tadić B., Babić, M., **Mitrović, S.**, Lazić, M., Vukelić, Đ., Univerzalni tribometar, TR-04/2010, Laboratorija za tribologiju Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, 2010

[M84] Ilija Bobić, Miroslav Babić, **Slobodan Mitrović**, Aleksandar Vencl, Biljana Bobić, Tehnologija dobijanja kompozitnih materijala sa osnovom od ZA27 legure uz dodatak čestica  $Al_2O_3$ , TR-09/2010, „RAR“, Batajnica, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, Kragujevac, 2008

[M84] Bobić I., Babić M., **Mitrović S.**, Vencl A., Bobić B., Tadić B., Keramički lonac elektrootporne peći za izvođenje kompokasting postupka, TR-08/2010, Preduzeće „RAR“, Batajnica, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, Kragujevac 2008

[M84] Ilija Bobić, Aleksandar Vencl, Miroslav Babić, **Slobodan Mitrović**, Biljana Bović, Tehnološki postupak dobijanja kompozita sa osnovom od  $Al7Si0,03Mg$  (A356 legure uz dodatak sitnih čestica  $Al_2O_3$ , TR-06/2010, „Petar Drapšin“, Mladenovac, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, Kragujevac, 2009

[M84] Bobić I., Bobić B., Babić M., **Mitrović S.**, Vencl A., Tadić B., Električna metoda za kontrolu reološkog nanošenja poluočvrstih rastopa osnovnih legura I kompozita pri izvođenju reo/komnokasting postupka, TR 07/2010, Preduzeće „RAR“, Batajnica, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, INN „Vinča“, 2009

[M85] M. Erić, M. Pavlović, S. Arsovski, M. Stefanović, D. Tadić, M. Lazić, S. Grubor, **S. Mitrović**, Softver za reinženjering tehnoloških procesa, 04-2800, Centar za revitalizaciju industrijskih sistema, MF Kragujevac, Kragujevac, 2008

[M85] Tadić B., Babić M., **Mitrović S.**, Todorović P, Bobić I., Zajednički merni sistem za univerzalni tribometar-tribološki merni centar, TR-05/2010, Laboratorija za tribologiju Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, 2010

[M85] B. Nedić, **S. Mitrović**, Softver za analizu signala i proračun parametara topografije površina, TR-81/2014, Laboratorija za obradu metala i tribologiju, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu, Kragujevac, 2014

**1.5 Љиљана Брзаковић**

-

## 2 Опис проблема који се решава техничким решењем

Техничко решење категорије М85, Метода за одређивање кинематског коефицијента трења динамички оптерећених контаката, припада области научно-техничких услуга, трибологији као интердисциплинарној науци и технологији, посвећеној интеракцији контактних површина при релативном кретању.

Прва публикована теоријска истраживања у вези са одређивањем кинематског коефицијента трења преко динамичке једначине кретања тела низ стрму раван објавио је *Euler* 1748. године. Слободно се може рећи да ова метода, нажалост, ни после 274 године у сфери науке, а посебно у сфери технологије пројектовања савремене трибо-дијагностичке опреме, није доживела ширу експанзију. У сфери науке, мањи број публикованих истраживања (претежно у часописима који покривају област едукације из области физике) базира се на *Euler*-овим истраживањима или је тангентан са њима.

Метода одређивања кинематског коефицијента трења на бази диференцијалних једначина кретања је у суштини везана за мерење три основне јединице СИ система мера (маса, времена и дужине), што у теоријском, експерименталном и технолошком смислу представља веома значајну предност.

Проблем који се решава предложеним техничким решењем припадаја трибологији као интердисциплинарној науци и технологији која се бави интеракцијом контактних површина при релативном кретању једног тела у односу на друго тело у присуству оптерећења зоне контакта. Оптерећења контакта, са аспекта нивоа оптерећења, врсте оптерећења (статичко, динамичко) и услови у којима се остварује контакт (присуство мазива, повећане температуре, агресивна средина, ...) могу бити различити.

Развој методе представља, у суштини развој уређаја за одређивање кинематског коефицијента трења. Развој методе подразумева: развој теоријске базе методе, развој прототипа уређаја, развој софтвера и експерименталну верификацију методе. Добијени резултати треба да укажу на предности методе и области могуће примене предложене методе и уређаја у односу на постојеће, у свету развијене методе одређивања кинематског коефицијента трења.

Кинематски коефицијент трења се, генерално посматрано, у свим условима оптерећења контакта, може одредити другачијим методама у односу на постојеће методе које се заснивају на мерењу нивоа оптерећења контакта и мерењу силе трења. Метода која се предлаже заснива се на одређивање кинематског коефицијента трења преко динамичке једначине кретања тела при обртању око непомичне осе. При чему активна сила на обртно тело делује само у тренутку иницирања кретања.

Иницирање кретања (обртања) може се извести мануелно (ручно), импулсом силе удара, преко електромагнетне спојнице или на другачији начин. Иницирање кретања активном силом има за циљ да у систему кретања акумулира одређену количину енергије и да систем на бази акумулиране енергије настави кретање и после престанка дејства активне силе која је иницирала кретање, пролазећи кроз читав спектар брзина, од максималне инициране брзине па до нулте вредности брзине обртања у тренутку заустављања кретања.

Идеја предложене методе своди се на чињеницу да се познавањем (праћењем и мерењем) промене угла обртања у функцији времена, преко диференцијалне једначине кретања тела при обртању око непомичне осе, могу одредити тренутне вредности кинематског коефицијента трења у читавом спектру брзина обртања кроз које тело пролази од тренутка иницирања кретања до тренутка престанка обртања.

## 3 Стање решености проблема код нас

Колико је ауторима познато, у Србији не постоји ниједна друга група која се бави развојем метода за одређивање кинематског коефицијента трења како у машинству тако и у области трибологије.

#### 4 Стање решености проблема у свету – приказ и анализа постојећих решења

Прво објављено теоријско истраживање везано за одређивање кинетичког коефицијента трења коришћењем динамичких једначина кретања за тело које се креће надоле низ стрму раван објавио је *Euler* 1748. године. Радови засновани на (или повезани са) *Euler*-овим истраживањима углавном се објављују у часописима који се тичу образовања из области физике. Примере таквих истраживања представљају радови у којима се на основу анализе кретања тела по стрмој равни које полазе од једначина кретања и успостављених односа између коефицијента трења котрљања и убрзања [1], [2] или прате нелинеарне промене коефицијента трења котрљања као функцију „губитака“ енергије [3].

Поједини аутори [4] се баве динамиком ротационог кретања, развијајући једноставан метод за експериментално одређивање губитака због трења. Примењујући односе између трансляторног и ротационог кретања, указују на линеарну зависност губитака услед трења, тј момента трења, на угаону брзину. Публикација [5] представља примену једноставног лабораторијског уређаја за проучавање ефекта трења између два диска који долазе у контакт, од којих је један покретан а други не. Кинематски коефицијент трења одређен је на основу неколико основних параметара, наиме, закључено је да зависи од полупречника стационарног диска, убрзања земљине теже, и угаоног убрзања другог диска.

Постоје различите експерименталне технике за испитивање динамичког понашања трења између два материјала у зависности од брзине клизања. Да би се постигле веће брзине и већи нормални притисци од оних који се виде у апарату на *pin-on-disk*, различите методе су коришћене за тестове динамичког трења. У овој студији је представљена нова експериментална метода која користи *Kolski* затезну шипку за одређивање динамичког коефицијента трења између металних материјала. Трибофрикциони уређај је пажљиво дизајниран да олакша клизање на интерфејсима када је подвргнут динамичком затезном оптерећењу. Као начин да се процени нова експериментална методологија, одређен је коефицијент трења између челика и алуминијума са две различите храпавости при брзини клизања од 8 m/s. Метода представљена у овој студији показала се као поуздан и поновљив начин мерења динамичког коефицијента трења између металних материјала. Примарна предност ове методе у односу на друге у литератури је у томе што су потребне минималне модификације постојећих објеката *Kolski* затезних шипки [6].

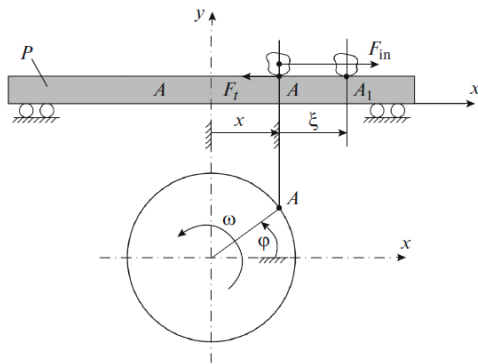
Резултати истраживања дати у оквиру литературног навода [7] представљају оптималну анализу за тачну процену динамичког коефицијента трења помоћу трибометарског уређаја. Тродимензионални модел коначних елемената (FEM) је развијен да би се боље разумео тестни *setup* и придружени метод за прецизно дефинисање коефицијента трења под динамичким оптерећењем. Аспект експерименталне методологије која се тренутно користи за дефинисање закона динамичког трења и његови главни недостаци су идентификовани и дискутовани. На основу FEM анализе, предложена је нова методологија за процену динамичког трења увођењем концепта фактора корекције који се може користити за корекцију старих експерименталних података.

У студији [8] разматрано је испитивање и упоређивање неколико модела сила трења који се баве различитим феноменима трења у контексту динамике вишестелесног система. У овој студији је описан укупно 21 различит модел силе трења и њихове основне физичке и рачунске карактеристике су размотрене и упоређене у детаље. Из добијених резултата може се констатовати да и избор модела силе трења и укључених параметара трења могу значајно утицати на симулирани/моделовани динамички одзив механичких система са трењем. Ова студија илуструје да за правилно моделирање, анализу и симулацију понашања трења у системима са више тела, мора се усвојити одговарајући модел трења када је значајна природа расипања енергије и њена квантификација, онда се препоручују динамички модели [8].

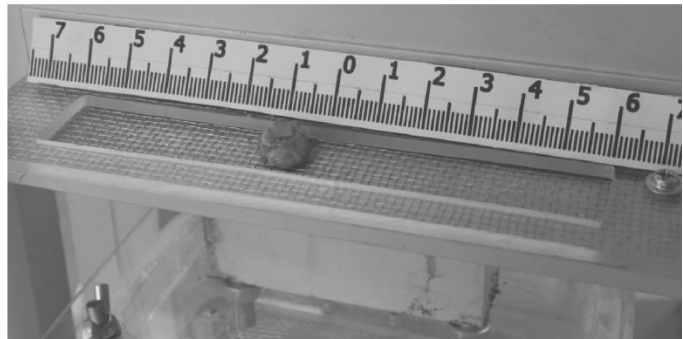
Један од ретких радова који не базира на стрмој равни, већ на *Euler*-овој идеји да се преко диференцијалне једначине кретања одреди кинематски коефицијент трења објављен је у тематском часопису из области трибологије [9]. На Сликама 1. (а-в) приказан је реализовани уређај широког спектра могућности који симулира рад вибрационе платформе (1.а), механички модел распореда сила на вибрационој платформи (1.б) и фотографски приказ грануле песка на ситу.



(a)



(б)



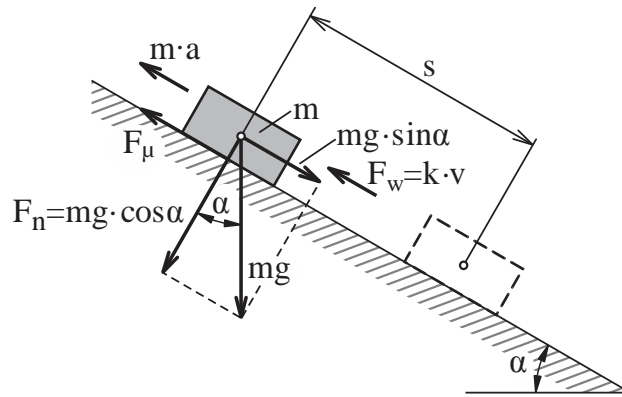
(в)

**Слика 1.** Реализовани уређај широког спектра могућности који симулира рад вибрационе платформе (а), механички модел распореда сила на вибрационој платформи (б) и фотографски приказ грануле песка на ситу (в)

На основу теоријских разматрања изложених у литературном наводу [9] коефицијент трења је одређен на основу диференцијалне једначине кретања грануле песка по ситу. У наведеном раду изложен је веома комплексан теоријски модел који математички презентира услове динамичке равнотеже грануле песка и ефекте преносног и релативног кретања на промену убрзања и положаја (координате) грануле песка у функцији времена.

Кинематски коефицијент трења се, генерално посматрано, у свим условима оптерећења контакта, може одредити потпуно другачијим методама у односу на постојеће методе које се заснивају на мерењу нивоа оптерећења контакта и мерењу силе трења. Прва публикована теоријска истраживања везана за одређивање кинематског коефицијента трења преко динамичке једначине кретања тела низ стрму раван објавио је *Euler* 1748. године [10].

Пратећи *Euler*-ову идеју, велики број трибометара намењених за одређивање кинематског коефицијента трења развијени су у оквиру Центра за Ревитализација индустријских система на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу. Резултати истраживања који представљају једну од ретких публикованих експерименталних верификација *Euler*-ове методе за одређивање кинематског коефицијента трења представљени су и публикацији [11]. У теоријском и експерименталном смислу група аутора [11], [12] надградила је *Euler*-ов теоријски модел додавањем реално постојеће силе отпора ваздуха која се, са аспекта грешака мерења мора узети у обзир у условима кретања тела низ стрму раван при већим брзинама кретања и/или малим вредностима коефицијента. Основе надграђеног *Euler*-овог теоријског модела базирају на мерењу времена које је потребно телу масе  $m$  да низ стрму раван пређе пут дужине  $s$ , што је илустровано шемом датом датом на Слици 2.



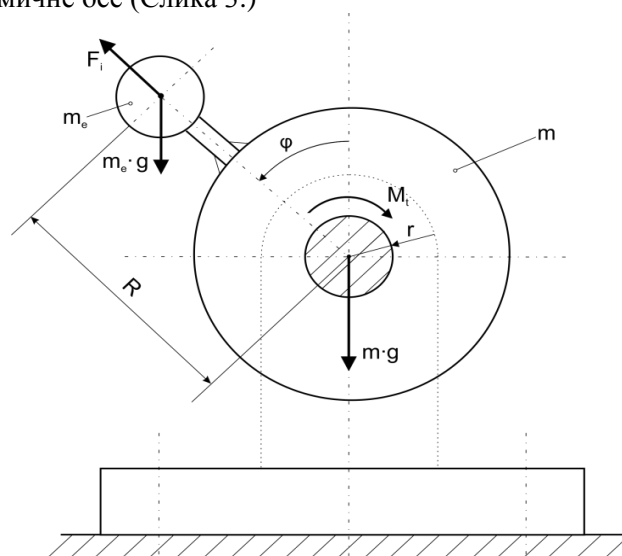
Слика 2. Кретање тела низ стрму раван – анализа сила [11]

У оквиру даљег развоја *Euler*-ове методе и резултата публикованих истраживања [12] показано је да се овем методом могу квантификовати енергетски губици настали услед трења и несавршености геометрије контактних парова реда величине  $0,01 J$ .

## 5 Суштина техничког решења

Суштина предложене методе своди се на чињеницу да се познавањем (праћењем и мерењем) промене угла обртања у функцији времена, преко диференцијалне једначине кретања тела при обртању око непомичне осе, могу одредити тренутне вредности кинематског коефицијента трења у читавом спектру брзина обртања кроз које тело пролази од тренутка иницирања кретања до тренутка престанка обртања. Предложеном методом разматрају се само два од већег броја могућих случајева иницирања кретања и постизања динамичког оптерећења клизних или котрљајних контактних парова.

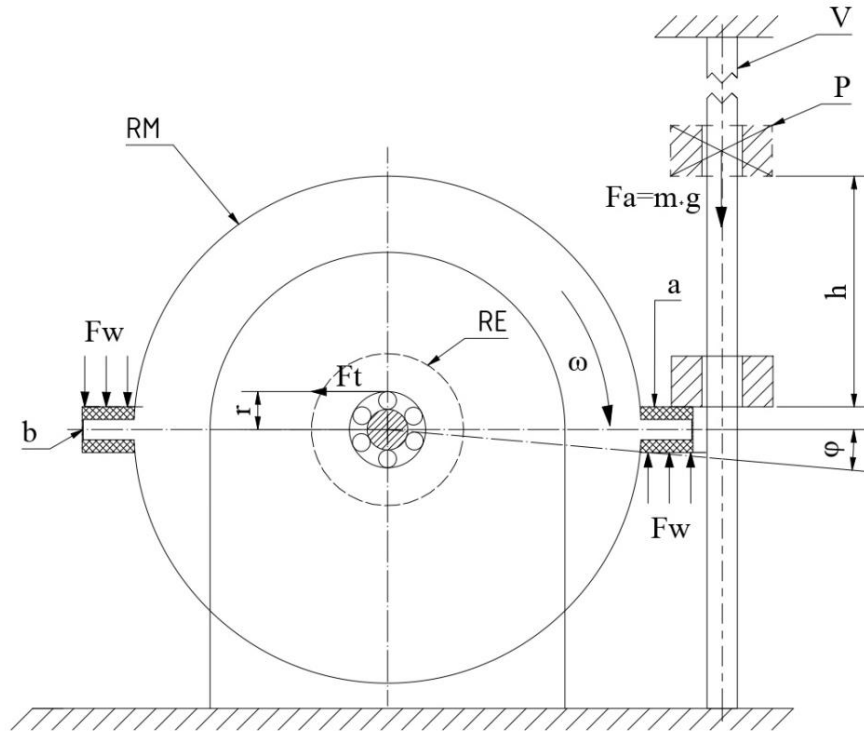
**Први разматрани случај** се односи на мануелно (ручно) иницирање кретања. У овом случају разматра се контакт, типа "рукавац -лежај". Статичку и динамичку компоненту жељеног оптерећења контакта, обезбеђују масе тела, концентрично и ексцентрично распоређене у односу на осу обртања. Ако се експерименталним путем одреди зависност промене угла обртања тела у функцији времена, онда је на основу динамичке једначине кретања могуће одредити тренутне вредности коефицијента трења у читавом периоду времена, од иницирања кретања до тренутка престанка обртања тела. Метода одређивања кинематског коефицијента трења у динамичким условима оптерећења контакта, у општем случају, базира је на диференцијалној једначини кретања тела око непомичне осе (Слика 3.)



Слика 3. Шематски приказ распореда активних и отпорних сила при обртању тела око непомичне осе



**Други разматрани случај** односи се на могућност одређивања кинематског коефицијента трења котрљања у условима иницирања обртног кретања динамичком ударном силом (Слика 4.). Након иницирања кретања и престанка дејства спољашње силе (Ударног импулса) кретање се наставља, при чему оптерећени лежај (зона лежаја у којој дејствују силе отпора трења) пролази читав спектар брзина, од максималне брзине у тренутку иницирања кретања, до њене нулте вредности при заустављању кретања.



Слика 4. Иницирање кретања (обртања) ударном импулсном силом

Кретање тела се описује диференцијалном једначином

$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum M_i = M_a + M_t + M_w \quad (1)$$

где је  $I$  - масени момент инерције,  $\omega$  - угаона брзина обртања,  $M_a$  - активни момент којим је иницирано кретање,  $M_t$  - резултујући момент интегралног збира елементарних отпорних момената трења по површини контакта,  $M_w$  - резултујући момент отпора ваздуха.

Ако се експерименталним путем одреди зависност промене угла обртања тела у функцији времена, онда је на основу динамичке једначине кретања могуће одредити тренутне вредности коефицијента трења у читавом периоду од иницирања кретања до тренутка престанка обртања тела.

Занемаривањем отпора ваздуха као величине нижег реда и посматрањем периода кретања тела након иницирања кретања, диференцијална једначина 1 своди се на облик

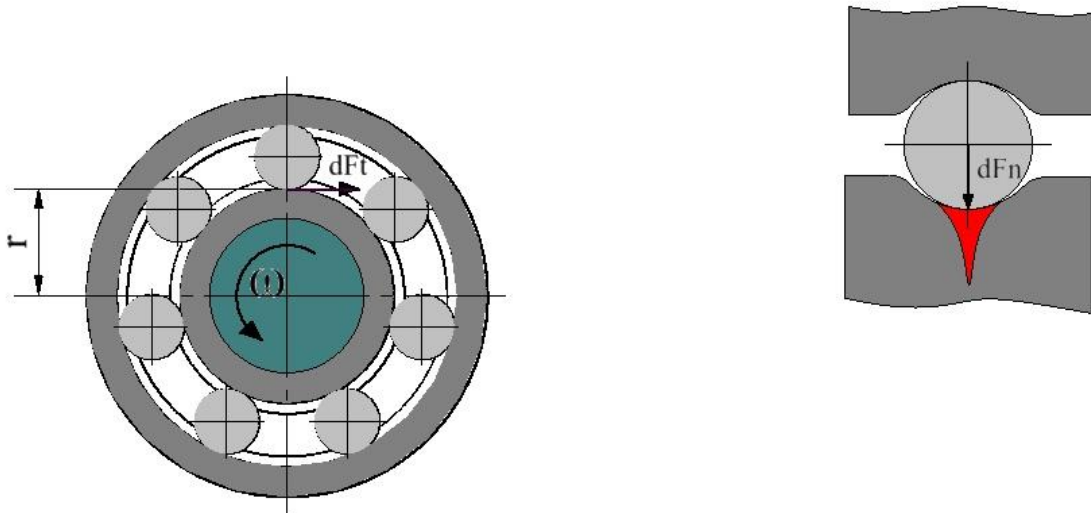
$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum M_i = M_t = F_t r \quad (M_a = 0, M_w = 0) \quad (2)$$

где је  $M_t$  - момент трења,  $F_t$  - резултујућа сила трења у контакту,  $r$  - радијус на којем делују елементарне силе трења (Слика 4.).

Резултујући момент трења је једина непозната величина у диференцијалној једначини кретања 2 и на основу Слика 5. одређена је изразом:

$$M_t = \iint r dF_t = F_t r \quad (3)$$

који укупну силу трења дефинише као интегрални збир елементарних сила трења по површини контакта.



Слика 5. Шематски приказ распореда отпорних сила трења клизања или трења котрљања при обртању тела око непомичне осе

На основу шеме дате на Сlici 3. сила трења  $F_t$  се може дефинисати у функцији коефицијента трења  $\mu$ , компоненте силе статичког отерећења контакта  $F_s$  и компоненте силе динамичког оптерећења контакта  $F_d$  преко израза

$$\begin{aligned} F_t &= \mu F_N = \mu \left[ (m + m_e) g - m_e R \omega^2 \cos \varphi \right] \\ F_s &= (m + m_e) g \\ F_d &= m_e R \omega^2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

Заменом вредности силе трења из једначине 4 у једначину 2. добија се једначина:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \mu \left[ (m + m_e) g - m_e R \omega^2 \cos \varphi \right] \quad (5)$$

Из које следи коначни израз за прорачун вредности кинематског коефицијента трења при динамичком оптерећењу контакта у функцији угла обртања и угаоне брзине

$$\mu = \frac{I \frac{d\omega}{dt}}{(m + m_e) g - m_e R \omega^2 \cos \varphi} \quad (6)$$

Угаона брзина  $\omega$  и угаоно убрзање  $\varepsilon$  могу се, на основу познатих теоријских израза одредити нумеричким диференцирањем, па за довољно мале вредности прираштаја важе једнакости:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \quad (8)$$

Из наведених теоријских разматрања произилази да експериментално одређивање зависности промене угла обртања тела у функцији времена, омогућава одређивање вредности кинематског коефицијента трења при динамичком оптерећењу контакта у читавом периоду времена, од иницирања кретања до тренутка престанка обртања тела. Методологија одређивања кинематског коефицијента трења, која се предлаже овим техничким решењем, нема суштинских ограничења. Коефицијент трења се може

одредити у било којим условима остваривања контакта. Могу се испитивати клизни и котрљајни парови различитих трболошких карактеристика, при чему се ниво симулираног оптерећења, распон брзина клизања или котрљања, могу кретати у широком распону. При чему се овом методом, много једноставније, у односу на конвенционалне методе, испитивања могу вршити при симулацији различитих нивоа температурама контакта, и уопште, различитих услова који ближе дефинишу рад реалних трибомеханичких система (агресивна средина, систем подмазивања,...).

## 6 Детаљан опис техничког решења (укључујући и пратеће илустрације и техничке цртеже)

### 6.1 Пројектовање првог прототипа уређаја

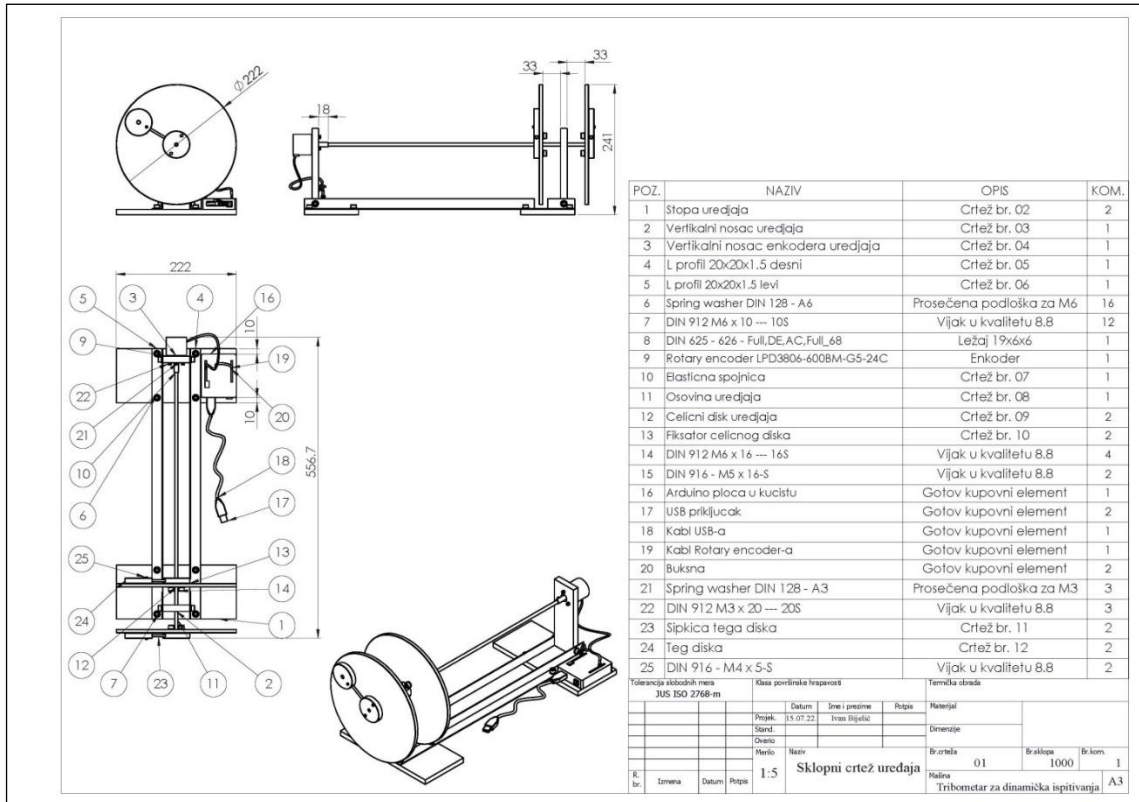
Први прототип уређаја реализован је за потребе експерименталног одређивања кинематског коефицијента трења у условима динамички оптерећених контаката. При чему се динамичка компонента оптерећења обезбеђује преко ексцентричних маса а иницирање кретања врши ручно. Уређај је компонован из 25 елемената-позиција (Табела 1.) од којих је 9 специјално израђених елемената, 9 стандардних механичких елемената а 7 елемената чине стандардне мерне и електронске компоненте. На Слици 6. приказан је склопни цртеж уређаја са спецификацијом свих елемената уређаја.

**Табела 1.** Спецификација специјалних, стандардних, мерних и електронских компоненти реализованог уређаја са којим се врши ручно иницирање кретања

ПОЗ.	НАЗИВ	ОПИС	КОМ.
1	Стопа уређаја	Цртеж бр. 02	2
2	Вертикални носач уређаја	Цртеж бр. 03	1
3	Вертикални носач енкодера уређаја	Цртеж бр. 04	1
4	L профил 20x20x1.5 десни	Цртеж бр. 05	1
5	L профил 20x20x1.5 леви	Цртеж бр. 06	1
6	Spring washer DIN 128 – А6	Просечена подлошка за М6	16
7	DIN 912 М6 x 10 – 10S	Вијак у квалитету 8.8	12
8	DIN 625 – 626 – Full, DE, AC, Full_68	Лежај 19x6x6	1
9	Rotary encoder LPD3806-600BM-G5-24C	Енкодер	1
10	Еластична спојница	Цртеж бр. 07	1
11	Осовина уређаја	Цртеж бр. 08	1
12	Челични диск уређаја	Цртеж бр. 09	2
13	Фиксатор челичног диска	Цртеж бр. 10	2
14	DIN 912 М6 x 16 – 16S	Вијак у квалитету 8.8	4
15	DIN 912 М5 x 16 – S	Вијак у квалитету 8.8	2
16	Ардуино плоча у кућишту	Готов куповни елемент	1
17	USB прикључак	Готов куповни елемент	2
18	Кабл USB-а	Готов куповни елемент	1
19	Кабл Rotary encoder-а	Готов куповни елемент	1
20	Буксна	Готов куповни елемент	2
21	Spring washer DIN 128 – А3	Просечена подлошка за М3	3
22	DIN 912 М3 x 20 – 20S	Вијак у квалитету 8.8	3
23	Шипкица тега диска	Цртеж бр. 11	2
24	Тег диска	Цртеж бр. 12	2
25	DIN 916 – М4 x 5-S	Вијак у квалитету 8.8	2

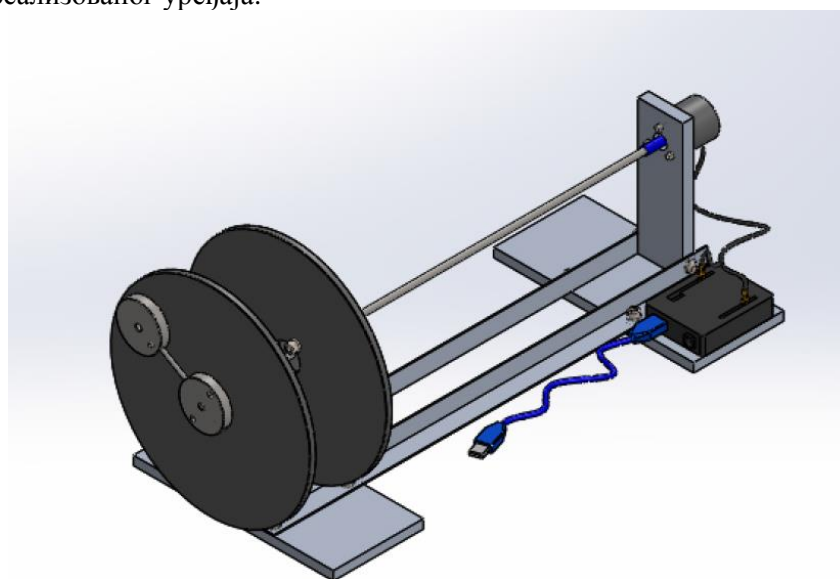
Иницирање кретања врши се ручно преко ексцентра челичног диска (позиција 13.). Ручно инициран импулс преноси кретање (обртање) преко осовине (Позиција 11.) и еластичне спојнице (Позиција 10.) до ротационог енкодера који је једина мерна компонента уређаја. Оптерећени

лежај (Позиција 8.) смештен је у носачу уређаја (Позиција 2.) и симетрично центриран у односу на попречну осу носача тј. лежаја упресованог у носачу, и оптерећен гравитационим силама масама два диска (Позиција 12.). С обзиром да су на дисковима (Позиција 12.) причвршћена оба ексцентрира (позиција 13.) под истим углом, произилази да испитивани лежај прима комплетно статичко и динамичко оптерећење.

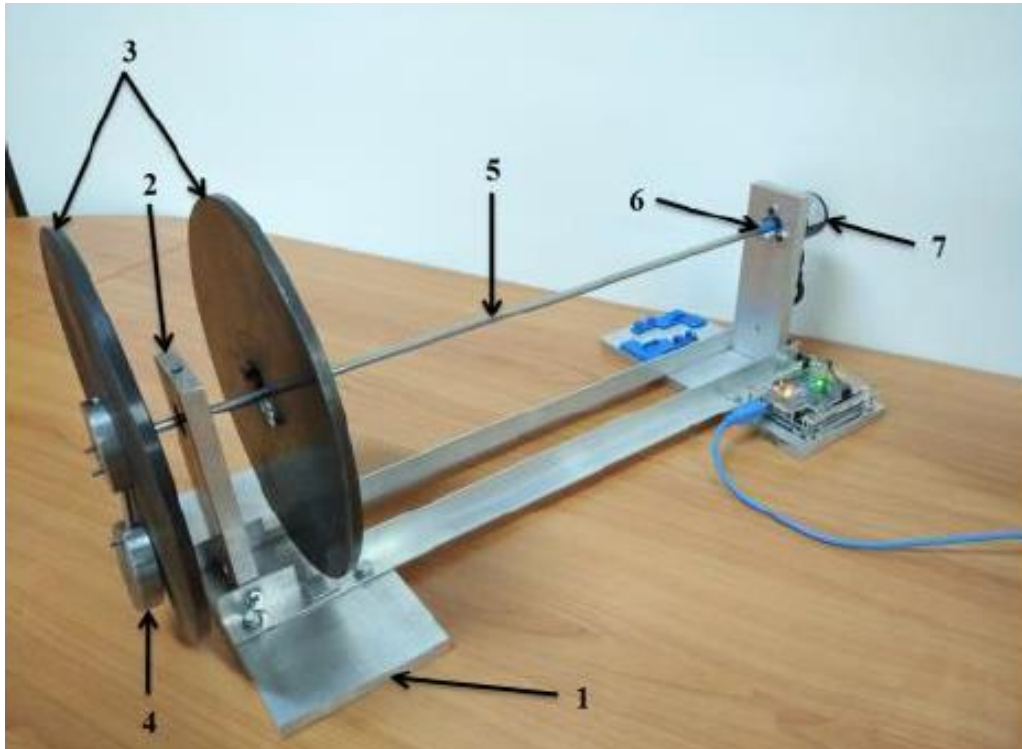


Слика 6. Склопни цртеж реализованог уређаја са спецификацијом специјалних и стандардних елемената

На Слици 7. дат је изометријски приказ CAD модела уређаја док је на Слици 8. приказана фотографија реализованог уређаја.



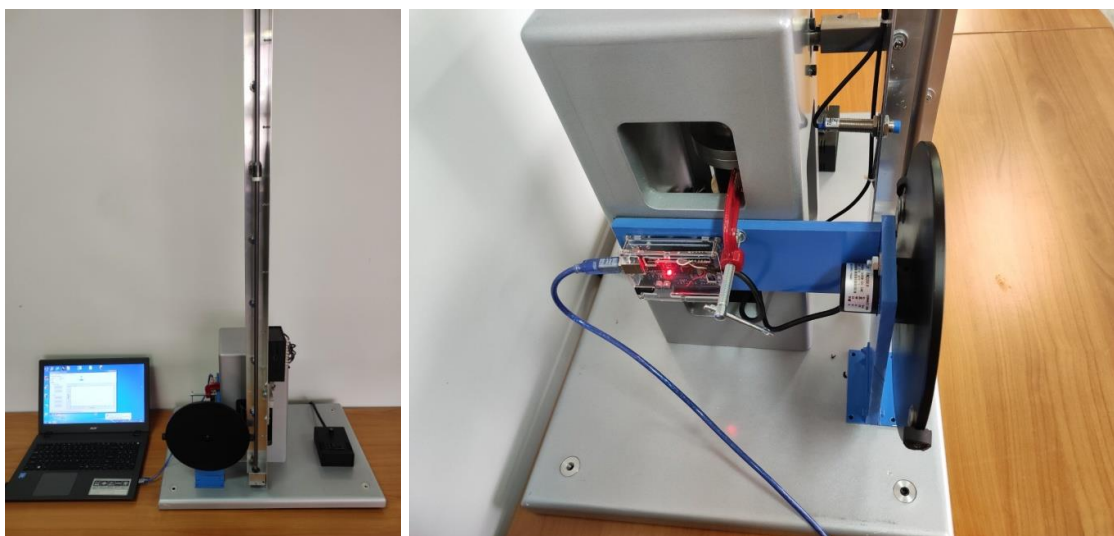
Слика 7. Изометријски приказ CAD модела уређаја



Слика 8. Фотографски приказ реализованог уређаја

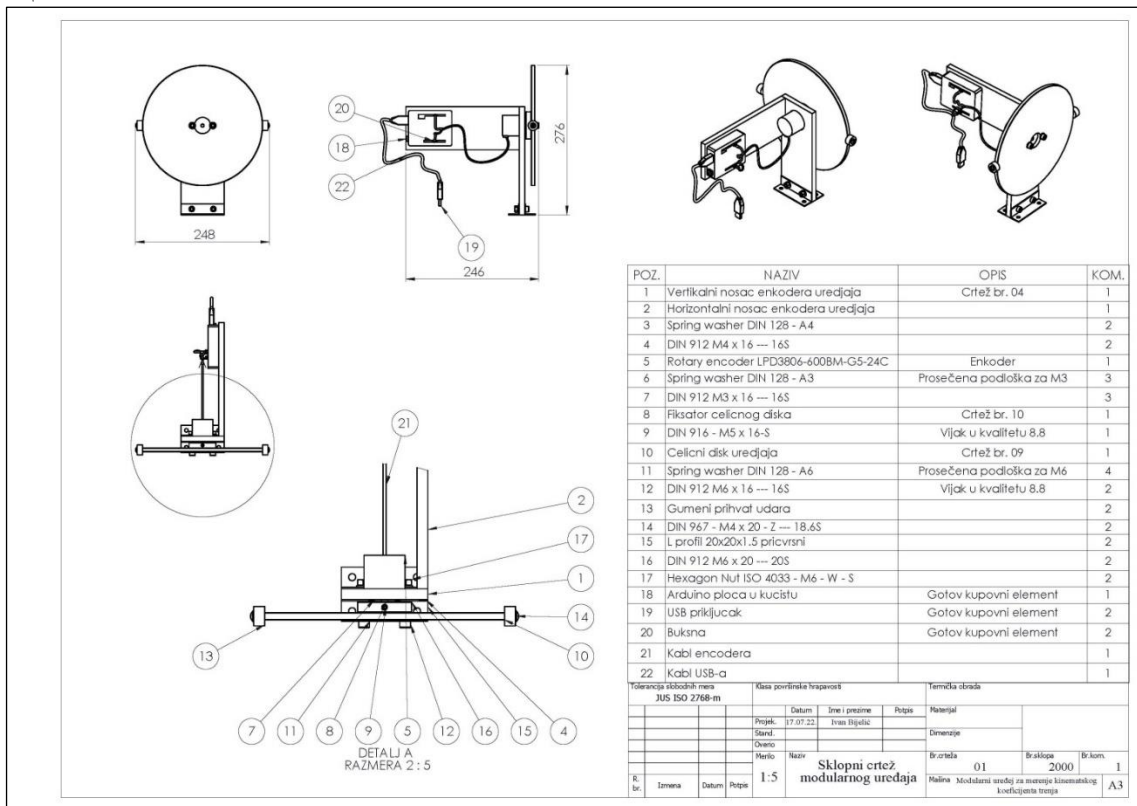
### 6.2 Пројектовање другог прототипа уређаја

Други прототип уређаја реализован је за потребе експерименталног одређивања кинематског коефицијента трења у условима израженог динамичког оптерећења контаката при иницирању кретања. У овом случају иницирање кретања врши се импulsном силом удара. Уређај је креиран из подскопа уређаја веома сличном првом прототипу уређаја. Комбиновањем постојећег уређаја и развојем новог подскопа формирана је веома функционална експериментална целина (Слика 9.), што је великим делом разјашњено у оквиру поглавља теоријских разматрања (Слика 4.). Уређај функционише по идентичном принципу као и претходно описани уређај. У овом случају нема ексцентричних маса које стварају динамичку компоненту оптерећења. Код овог уређаја константну масу побуђује импулс ударне силе, а мерни систем квантификује период трајања импулса удара.



Слика 9. Фотографски приказ функционалне експерименталне целине креиране из развијеног подскопа уређаја и постојећег уређаја

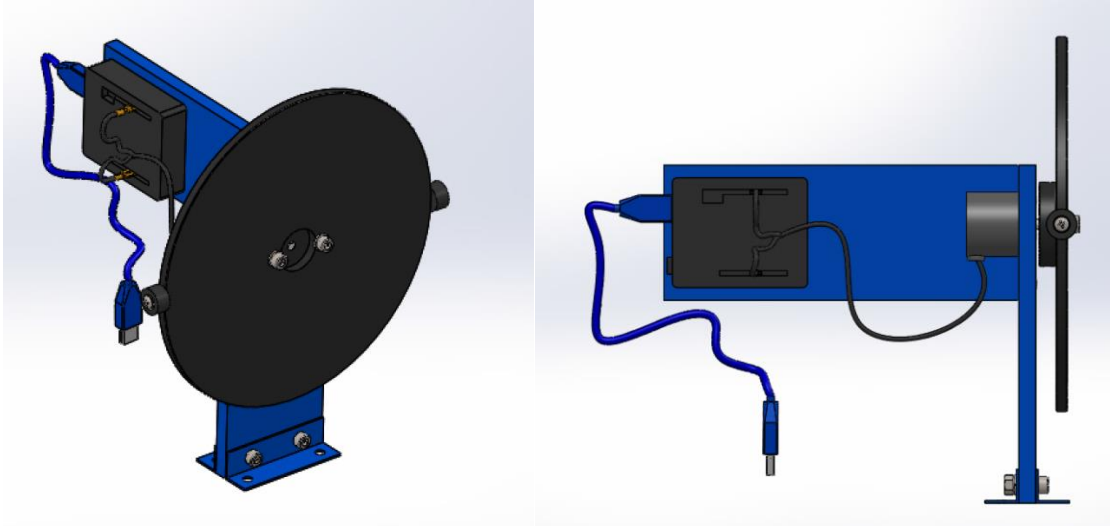
На Слици 10. приказан је склопни цртеж развијеног уређаја - подскопа са спецификацијом свих елемената уређаја. Уређај је компонован из 22 елемената-позиција (Табела 2.) од којих је 6 специјално израђених елемената, 9 стандардних механичких елемената и 7 елемената чине стандардне мерне и електронске компоненте. CAD модел развијеног уређаја приказан је на Слици 11.



Слика 10. Склопни цртеж развијеног уређаја (Подскопа) са спецификацијом свих специјално развијених и стандардних елемената уређаја. Фотографски приказ реализованог уређаја

Табела 2. Спецификација специјалних, стандардних, мерних и електронских компоненти реализованог уређаја са којим се врши ручно иницирање кретања импулсном силом удара

ПОЗ.	НАЗИВ	ОПИС	КОМ.
1	Вертикални носач енкодера уређаја	Цртеж бр. 04	1
2	Хоризонтални носач енкодера уређаја		1
3	Spring washer DIN 128 – A4		2
4	DIN 912 M4 x 16 – 16S		2
5	Rotary encoder LPD3806-600BM-G5-24C	Енкодер	1
6	Spring washer DIN 128 – A3	Просечена подлошка за M3	3
7	DIN 912 M3 x 16 – 16S		3
8	Фиксатор челичног диска	Цртеж бр. 10	1
9	DIN 912 M5 x 16 – S	Вијак у квалитету 8.8	1
10	Челични диск уређаја	Цртеж бр. 09	1
11	Spring washer DIN 128 – A6	Просечена подлошка за M6	4
12	DIN 912 M6 x 16 – 16S	Вијак у квалитету 8.8	2
13	Гумени прихват удара		2
14	DIN 967 M4 x 20 – Z – 18.6S		2
15	L профил 20 x 20 x 1.5 причврсни		2
16	DIN 912 M6 x 20 – 20S		2
17	Hexagon Nut ISO 4033 – M6 – W – S		2
18	Ардуино плоча у кућишту	Готов куповни елемент	1
19	USB прикључак	Готов куповни елемент	2
20	Буксна	Готов куповни елемент	2
21	Кабл енкодера		1
22	Кабл USB-а		1



Слика 11. Приказ CAD модела реализованог уређаја

### 6.3 Развој наменског софтвера

Читав мерни систем уређаја своди се на ротациони енкодер који у току једног обртаја, преко броја импулса, може квантификовати 360, 640 или више различитих промена угла у времену. У оквиру теоријског дела показано је да се преко низа нумеричких вредности прираштаја угла у времену могу одредити нумерички низови везани за промене угаоних брзина, угаоних убрзања, као и нумерички низови везани за промене коефицијента трења.

Наменски софтвер треба, посредством ардуино електронике, да омогући добијање и обраду нумеричких вредност поменутих низова промене угла, угаоне брзине, угаоног убрзања и коефицијента трења у функцији услова оптерећења контаката.

На Слици 12. приказан. алгоритам тока софтверске подршке мерном систему уређаја. Шемом на Слици 13. приказан је алгоритамски ток везан за креирање извештаја и могуће излазне резултате које програм нуди.

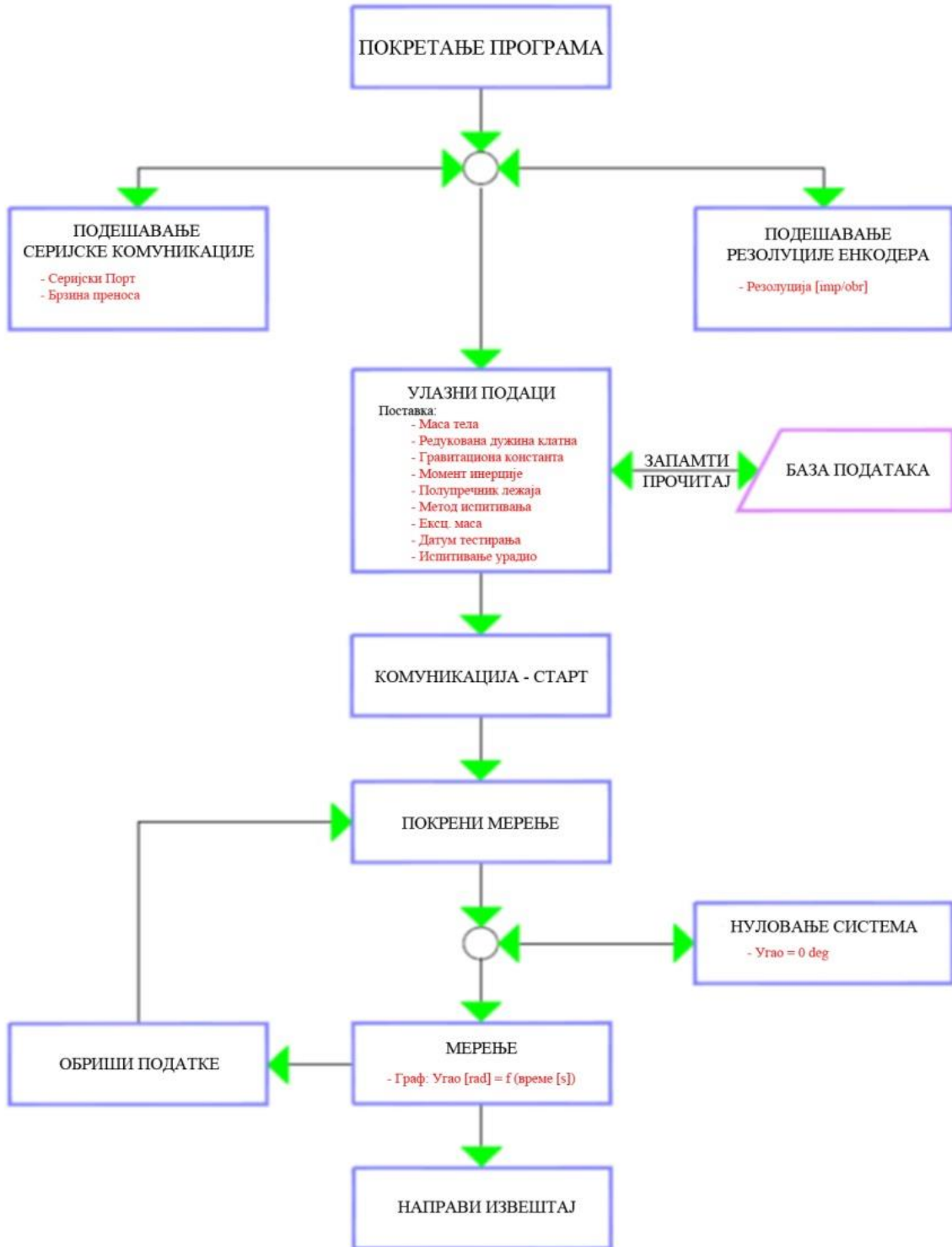
У оквиру креирања извештаја програм нуди две опције: Филтер укључен/искључен. То подразумева приказ филтрираних или "сирових" нефилтрираних података. Такође програм нуди опцију уноса коментара и чување података у облику *EXCEL* фајла, при чему се ти подаци могу обрађивати различитим математичко статистичким програмима. Програм нуди излазне резултате у облику дијаграмских приказа експериментално добијене зависности одређених физичких и триболошких величина, облика (Слика 14.):

- промене угла обртања у функцији времена,
- промене угаоне брзине у функцији времена,
- промене угаоног убрзања у функцији времена,
- промене коефицијента трења у функцији времена,
- промене коефицијента трења у функцији динамичке силе оптерећења контаката.),
- промене коефицијента трења у функцији угаоне брзине и
- промене коефицијента трења у функцији брзине клизања у зони контаката.

Процедуре везане за коришћење уређаја и софтвера садржане су у наведеним активностима:

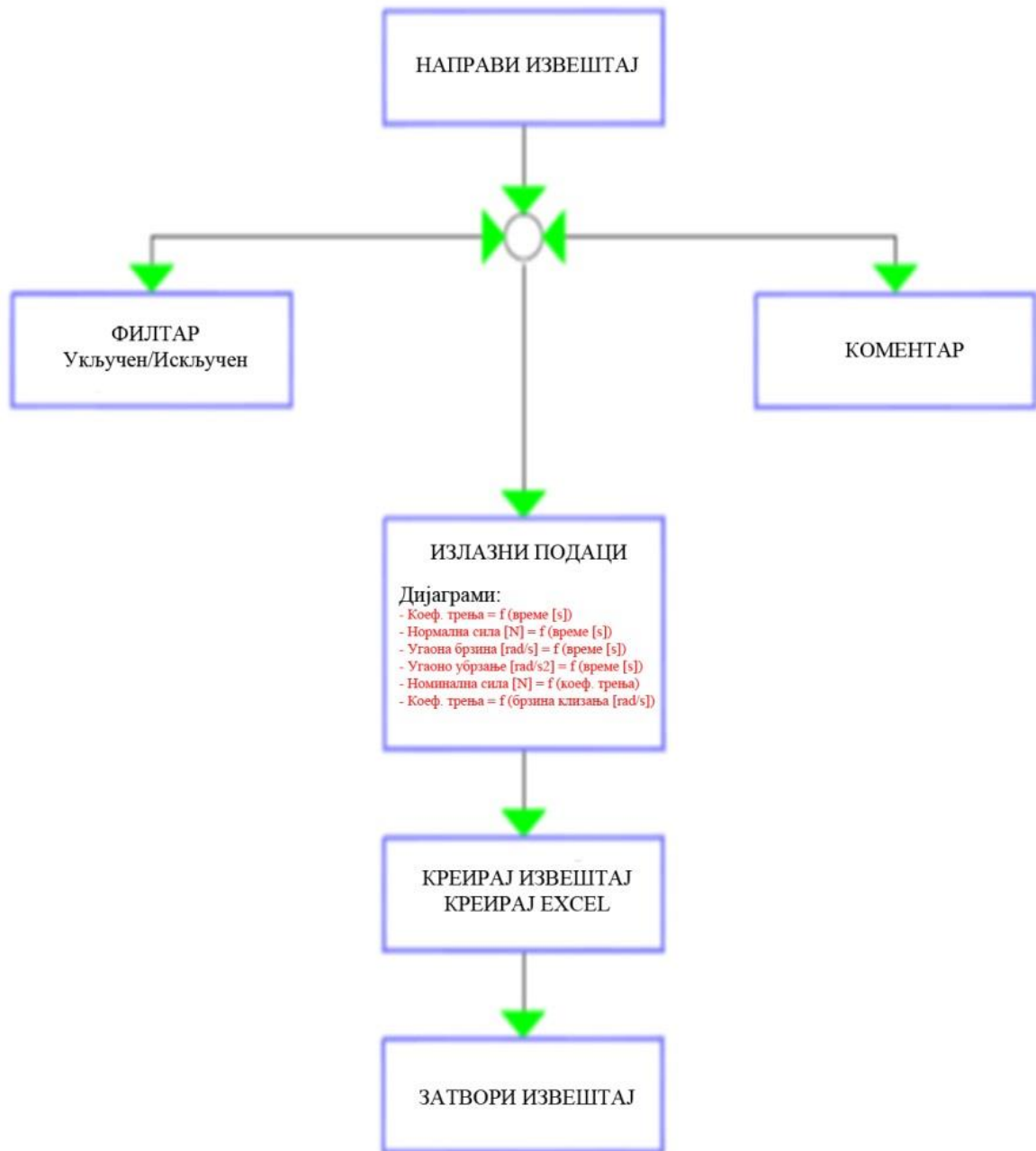
1. Прикључење апаратуре на USB порт
2. Покретање Windows апликације
3. Провера комуникационих параметара (*comport*, брзина преноса)
4. Провера резолуције коришћеног енкодера (подешавања → основна подешавања)
5. Покретање комуникације (комуникација → комуникација старт)
6. Унос улазних података и избор методе испитивања (подаци се могу сачувати у бази – улазни подаци → улазни подаци запамтити/прочитати)
7. Покренути мерење
8. Поставити угао на нулу
9. Одрадити мерење (добије се крива угао =  $f$ (време) на графу)

10. Заустави мерење
11. Обрисати мерење (опционо)
12. Направити извештај
13. Укључење филтра (опционо)
14. Креирање извештаја са добијеним дијаграмима
15. Креирање *EXCEL* фајла са добијеним подацима

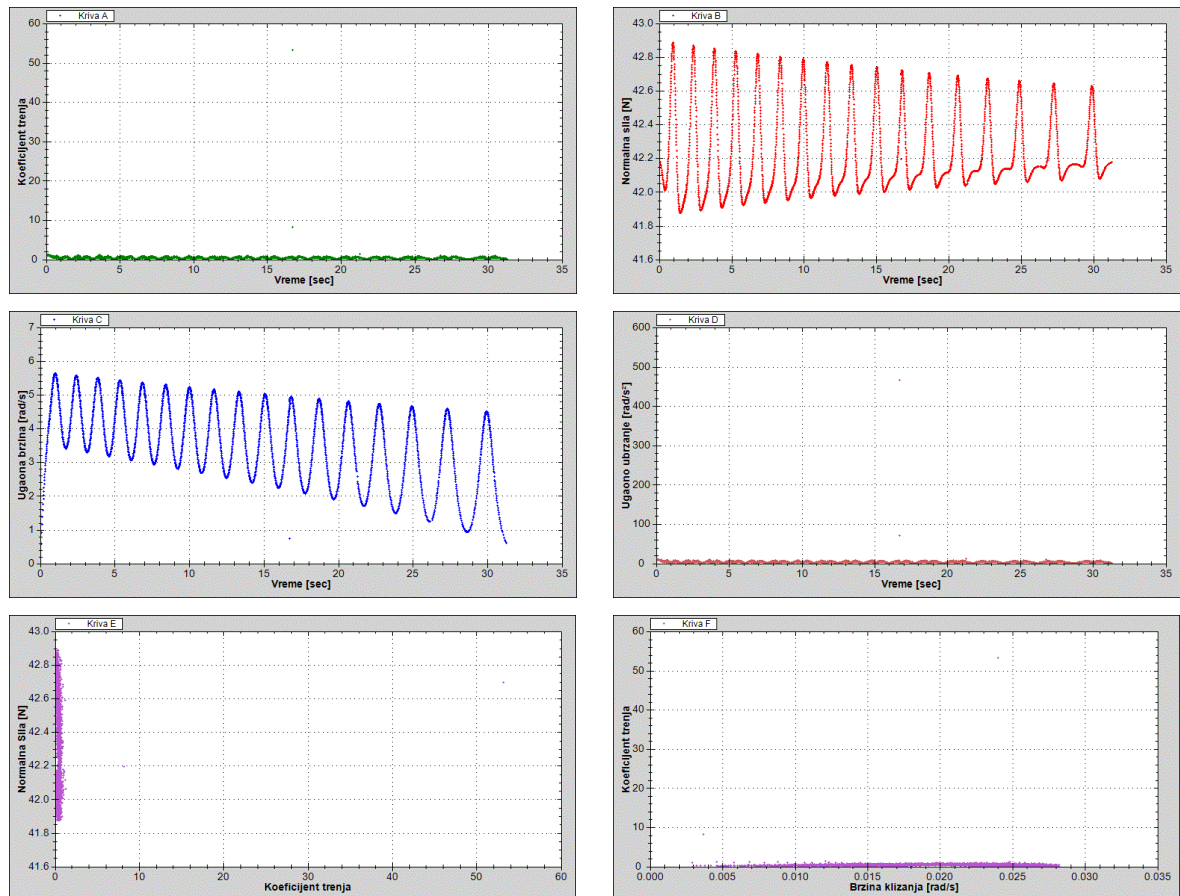


Слика 12. Алгоритам тока софтверске подршке мерном систему уређаја





Слика 13. Алгоритамски ток везан за креирање извештаја и излазне резултате које програм нуди



Слика 14. Дијаграмски прикази из извештаја о обављеном испитивању

## 7 Публикације везане за техничко решење

Пре пријаве техничког решења, резултати добијени на уређају за одређивање кинематског коефицијента трења динамички оптерећених контаката публиковани су у једном раду у међународном часопису категорије M23 и један рад је прихваћен за штампу у међународном часопису категорије M23.

### 7.1 Рад у међународном часопису M23

Ljiljana BRZAKOVIC, Vladimir MILOVANOVIC, Vladimir KOCOVIC, Goran SIMUNOVIC, Djordje VUKELIC, Branko TADIC, Relation between Kinetic Friction Coefficient and Angular Acceleration during Motion Initiated by Dynamic Impact Force, Tehnički vjesnik - Technical Gazette, Vol.29, No.5, pp. 1622-1628, ISSN 1330-3651,2022, <https://doi.org/10.17559/TV-20220408155435>

### 7.2 Рад у међународном часопису M23 – прихваћен за штампу

Lj. Brzaković, V. Kočović, S. Mitrović, N. Busarac, B. Tadić, A method for determining of kinetic friction coefficient under dynamic loading conditions, Romanian Journal of Physics, ISSN 1221-146X, 2022. [https://rjp.nipne.ro/accepted\\_papers.html](https://rjp.nipne.ro/accepted_papers.html)

## 8 Закључак

На основу резултата теоријских и експерименталних истраживања, приказаних у овом техничком решењу, произилази да се кинематски коефицијент трења и у условима сложених динамичких оптерећења контакта може веома поуздано одредити на бази диференцијалне једначине кретања тела у присуству силе отпора трења.

Методологија одређивања коефицијента трења своди се на мерење две основне физичке величине, угла обртања и времена, што у теоријском и експерименталном смислу има значајну предност у односу на конвенционалне методе одређивања коефицијента трења.

Убрзање такође дефинише комплетну динамику самог процеса трења без увођења побуда и потенцијалних грешака мерења, које у знатно већој мери могу изазвати мерни инструменти (динамометри-сензори силе) за квантификовање нормалног оптерећења контакта и силе трења. Чињеница да се ова метода базира на мерењу основних физичких величина (време, пређени пут, угао обртања) омогућава формирање поузданих мерних ланаца и њихов смештај ван зоне контакта, што знатно поједностављује триболошка истраживања у условима високих температура, контролисане дубине вакуума, агресивној средини и осталим сложенијим условима испитивања.

Изложену методу карактерише висок ниво поузданости добијених резултата као и велики потенцијал могуће примене методе у сфери образовања, истраживања и развоја трибодијагностичке опреме.

Методологија одређивања кинематског коефицијента трења, која се разматра овим техничким решењем, нема суштинских ограничења. Коефицијент трења се може одредити у било којим условима остваривања контакта. Могу се испитивати клизни и котрљајни парови различитих трболошких карактеристика, при чему се ниво симулираног оптерећења и распон брзина клизања или котрљања, могу кретати у широком опсегу. Овом методом се, много једноставније, у односу на конвенционалне методе, испитивања могу вршити при симулацији различитих нивоа температурама контакта, и уопште, различитих услова који ближе дефинишу рад реалних трибомеханичких система (Агресивна средина, систем подмазивања, ниво оптерећења, ..).

## 9 Референце

[1]

[1] V. L. B. D. J. D. G. G. K. Maslova, "Understanding the effect of rolling friction in the inclined," *Physics Education*, vol. 55, no. 5, p. 055010, 2020.

[2] Z. X. H. L. Y. & X. J. Yan, "Variation of the friction coefficient for a cylinder rolling down an inclined board," *Physics Education*, vol. 53, no. 1, p. 015011, 2017.

[2] Maslova, K., De Jesus, V. L. B., & Sasaki, D. G. G., Understanding the effect of rolling friction in the inclined track experiment. *Physics Education*, 55(5), 055010, 2020. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/ab9217>

[3] Yan, Z., Xia, H., Lan, Y., & Xiao, J., Variation of the friction coefficient for a cylinder rolling down an inclined board. *Physics Education*, 53(1), 015011, 2017. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/aa8974>

[4] Chakrabarti, S., Khaparde, R. B., & Kachwala, A. H., Experimental study of the coefficient of rolling friction of the axle of a Maxwell's wheel on a soft horizontal surface, *European Journal of Physics*, 41(3), 035803, 2020. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ab78a5>

[5] Alam, J., Hassan, H., Shamim, S., Mahmood, W., & Anwar, M. S., Precise measurement of velocity dependent friction in rotational motion. *European Journal of Physics*, 32(5), 1367, 2011. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/32/5/024>

[6] Drosd, R. & Minkin, L., (2020). Measuring the coefficient of kinetic friction by exploring dynamics of rotational motion, *The Physics Teacher*, 58(3), 176-178, 2020. <https://doi.org/10.1119/1.5145409>

[7] B. Sanborn, B. Song, E. Nishida, Development of a New Method to Investigate the Dynamic Friction Behavior of Interfaces Using a Kolsky Tension Bar, *Experimental Mechanics* 58, 335–342, 2018. <https://doi.org/10.1007/s11340-017-0350-7>

- [8] T. Jankowiak, A. Rusinek, G. List, G. Sutter, F. Abed, Numerical analysis for optimizing the determination of dynamic friction coefficient, *Tribology International* Vol. 95, 86-94, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2015.10.039>
- [9] F. Marques, P. Flores, J. C. Pimenta Claro, H. M. Lankarani, A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems, *Nonlinear Dyn* 86, 1407–1443, 2016. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2999-3>
- [10] G. Mihajlović (2017), M. Gašić, M. Savković, S. Mitrović, B. Tadić, Vibroplatform modeling with allowance for tribological aspects, *Journal of Friction and Wear*, 38(3), 184-189, 2017. <https://doi.org/10.3103/S1068366617030102>
- [11] L. Euler, Sur le frottement des corps solides, *Memoires de l'academie des sciences de Berlin*, 122-132. Retrieved from <http://eulerarchive.maa.org/>
- [12] Đ. Vukelić, P. Todorović, K. Šimunović, J. Miljojković, G. Šimunović, I. Budak, B. Tadić, A Novel Method for Determination of Kinetic Friction Coefficient using Inclined Plane, *Technical Gazette*, Vol. 28 No. 2, 2021. <https://doi.org/10.17559/TV-20201101051835>
- [13] J. Miljojković, V. Kočović, M. Luković, A. Živković, K. Šimunović, Development of a Modular Didactic Laboratory Set for the Experimental Study of Friction, *Tehnički Glasnik* 29(1):269-277, 2022. <https://doi.org/10.17559/TV-20210925171045>