CONTEMPORARY MATHEMATICAL PROBLEMS
Conference Dedicated to Professor Milenko Pikula
Trebinje, 12-13 Octobar 2018

Procesi u teoriji neizvesnosti

Marija Paunović
Department of Fundamental Sciences, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, Serbia
marija.paunovic@uns.ac.rs

Nebojša M. Ralević
Department of Fundamental Sciences, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad
nralevic@uns.ac.rs

Abstract

U ovom radu je predstavljen koncept procesa neizvesnosti, kao proširenje teorije neizvesnosti (uncertainty theory). Proces neizvesnosti, zasnovan na Liovom integralu, predstavlja niz promenljivih indeksiranih kroz vreme. U cilju proučavanja integrala (definisanih u ovoj teoriji) u različitim procesima neizvesnosti, uvedeni su osnovni pojmovi i razmatrane neke osobine i tvrđenja.

1 Uvod

2 Mere kredibiliteta

Neka je $\mathcal{P}$ partitivni skup nepraznog skupa X i svaki element u $\mathcal{P}$ nazivamo dogadjaj **dogadjaj**. Kako bi se prezentovala aksiomatska definicija kredibiliteta, neophodno je dodeliti svakom dogadjaju A broj $Cr(\{A\}$, odnosno kredibilitet da će se A desiti.

Definicija 2.1. Neka je X neprazan skup i I proizvoljan skup indeksa. Skupovna funkcija $Cr : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ takva da za sve $A, B \subset X$:
C_1) $Cr(X) = 1$ (normalnost);
C_2) $A \subset B \Rightarrow Cr(A) \leq Cr(B)$ (monotonost);
C_3) $Cr(A) + Cr(\overline{A}) = 1$ (samodualnost);
C_4) $Cr(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \sup\limits_{i\in I} Cr(A_i)$, za bilo koji skup $A_i \subset X, i \in I$
za koji je $\sup\limits_{i\in I} Cr(A_i) < 1/2$, naziva se mera kredibiliteta **mera kredibiliteta** na X.

Mera kredibiliteta je neaditivna mera sa osobinom samodualnosti (self-duality). Trojka (X, $\mathcal{P}$, Cr) se naziva prostor kredibiliteta **prostor kredibiliteta**.

Theorem 2.1. *Za sve* $A, B \in \mathcal{P}(X)$ *važi*

$$i)\ \ \mathsf{Cr}(A \cup B) \leq 1/2 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{Cr}(A \cup B) = \mathsf{Cr}(A) \vee \mathsf{Cr}(B).$$

$$ii)\ \ \mathsf{Cr}(A \cap B) \geq 1/2 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{Cr}(A \cap B) = \mathsf{Cr}(A) \wedge \mathsf{Cr}(B).$$

Theorem 2.2. *(Subaditivnost)*

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(X)) \quad \mathsf{Cr}(A \cup B) \leq \mathsf{Cr}(A) + \mathsf{Cr}(B).$$

Theorem 2.3. *Neka* $A_n \nearrow$ *tj.* $A_n \supset A_{n+1}$, $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{Cr}(A_n) = 0$. *Tada za sve* $A \in \mathcal{P}(X)$ *važi:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{Cr}(A \cup A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{Cr}(A \setminus A_n) = \mathsf{Cr}(A).$$

Theorem 2.4. *(poluneprekidnost) Za niz* $\{A_n\}$, *važi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{Cr}(A_n) = \mathsf{Cr}(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

ako je ispunjen jedan od sledećih uslova
i) $A_n \uparrow A$ *i* $(\mathsf{Cr}(A) \leq 1/2$ *ili* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{Cr}(A_n) < 1/2)$;
ii) $A_n \downarrow A$ *i* $(\mathsf{Cr}(A) \geq 1/2$ *ili* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{Cr}(A_n) > 1/2)$.

Theorem 2.5. *Mera kredibilnosti na* X *je aditivna akko postoje najviše dva singltona u* $\mathcal{P}(X)$ *sa nenula vrednosti kredibiliteta.*

3 Fazi promenljive

Fazi promenljiva ξ je definisana kao merljiva funkcija iz prostora kredibiliteta na skup realnih brojeva, tj. za Borelov skup B realnih brojeva je

$$\{\xi \in B\} = \{x \in X \,|\xi\,(\theta) \in B\} \in \mathcal{P}$$

odnosno ξ je merljiva funkcija, a $\{\xi \in A\}$ je uvek dogadjaj.

Definicija 3.1. Neka su ξ_1 i ξ_2 fazi promenljive definisane na prostoru kredibiliteta. Kažemo da je $\xi_1 = \xi_2$, ako je $\xi_1(x) = \xi_2(x)$, za skoro sve $x \in X$.

Definicija 3.2. $n-$dimenzionalni fazi vektor je definisan kao funkcija iz prostora kredibiliteta na skup $n-$dimenzionalnih realnih vektora.

Teorema 3.1. Vektor $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ je fazi vektor ako i samo ako su $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ fazi promenljive.

Kako bi smo uveli fazi aritmetiku, pretpostavimo da su sve fazi promenljive definisane na prostoru kredibiliteta i neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ fazi promenljive na prostoru kredibiliteta. Tada je fazi promenljiva $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ definisana sa $\xi(\theta) = f(\xi_1(\theta), \xi_2(\theta), \ldots, \xi_n(\theta))$ za svako $\theta \in \Theta$.

Teorema 3.2. Neka je ξ $n-$ dimenzionalni fazi vektor i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Tada je $f(\xi)$ fazi promenljiva.

Fazi promenljiva ima jedinnstvenu funkciju pripadnosti koja predstavlja stepen mogućnosti da ξ uzme pripisane vrednosti. Funkcija pripadnosti fazi promenljive definisana je na sledeći način

$$\mu(x) = (2Cr(\{\xi = x\}) \wedge 1, \; x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.3. (Inverzna teorema). Neka je ξ fazi promeljiva i μ njena funkcija pripadnosti. Tada za bilo koji skup B realnih brojeva, imamo

$$\mathrm{Cr}(\{\xi \in B\} = \frac{1}{2}\left(\sup_{x \in B} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in B^c} \mu(x)\right).$$

Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov za funkciju pripadnosti.

Teorema 3.4. Funkcija $\mu : \Re \to [0,1]$ je funkcija pripadnosti ako i samo ako $\sup \mu(x) = 1$.

Napomena: Postoji dokaz

4 Očekivana vrednost

Uopštenje definicije operatora očekivane vrednosti fazi promenljive (neprekidnog i diskretnog tipa) dali su Liu i Liu u [4].

Definicija 4.1. Očekivana vrednost fazi promenljive ξ definisana je sa

$$E[\xi] = \int_0^{\infty} \mathrm{Cr}(\{\xi \geq r\}) dr - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{Cr}(\{\xi \leq r\}) dr$$

gde je bar jedan integral konačan.

Primer 4.1. Neka je ξ jednakomoguca (equipossible) fazi promenljiva (a, b). Ako je $a \geq 0$, tada je $Cr(\{\xi \leq r\}) \equiv 0$ kada je $r < 0$, i

$$Cr(\{\xi \geq r\}) = \begin{cases} 1, & r \leq a \\ 0,5, & a < r \leq b \end{cases}$$

$E[\xi] = \left(\int_0^a dr + \int_a^b 0,5dr + \int_b^\infty 0dr\right) - \int_{-\infty}^0 0dr = \frac{a+b}{2}$. Ako je $b \leq 0$, onda je $Cr(\{\xi \geq r\}) \equiv 0$ kada je $r > 0$, i

$$Cr(\{\xi \leq r\}) = \begin{cases} 1, & r \geq b \\ 0,5, & a \leq r < b \\ 0, & r < a. \end{cases}$$

$E[\xi] = \int_0^\infty 0dr - \left(\int_{-\infty}^a 0dr + \int_a^b 0,5dr + \int_b^0 1dr\right) = \frac{a+b}{2}$.
Ako je $a < 0 < b$, tada je

$$Cr(\{\xi \geq r\}) = \begin{cases} 0,5, & 0 \leq r \leq b \\ 0, & r > b, \end{cases}$$

$$Cr(\{\xi \leq r\}) = \begin{cases} 0, & r < a \\ 0,5, & a \leq r \leq 0, \end{cases}$$

$E[\xi] = \left(\int_0^b 0,5dr + \int_b^\infty 0dr\right) - \left(\int_{-\infty}^a 0dr + \int_a^0 0,5dr\right) = \frac{a+b}{2}$.
Pa je očekivana vrednost uvek jednaka $\frac{a+b}{2}$.

Primer 4.2. Trougaona fazi promenljiva $\xi = (a, b, c)$ ima ocekivanu vrednost

$$E[\xi] = (a + 2b + c)/4,$$

dok je za trapezoidnu fazi promenljivu $\xi = (a, b, c, d)$, ocekivana vrednost jednaka

$$E[\xi] = (a + b + c + d)/4.$$

5 Procesi neizvesnosti

Definicija 5.1. Neka je $(X, \mathcal{P}, Cr)$ prostor neizvesnosti i neka je $T \times (X, \mathcal{P}, Cr)$ potpuno uredjen skup (tj. vreme). Neizvestan proces je funkcija $X_t(\gamma)$ iz T na skup realnih brojeva takav da je $\{X_t \in B\}$ dogadjaj za svaki Borelov skup B realnih brojeva u svakom vremenu t.

Definicija 5.2. (Liu [87]) Za neizvesni proces C_t se kaže da je **Liu-ov proces** ako

(i) $C_0 = 0$ i skoro svi putevi uzorka su Lipschitz neprekidni,

(ii) C_t ima stacionarne i nezavisne priraštaje,

(iii) svaki priraštaj $C_{s+t} - C_s$ je normalna neizvesna varijabla sa očekivanom vrednosti 0 i varijansom t^2, čija raspodela neizvesnosti je

$$\Phi(x) = (1 + exp(-\frac{\pi x}{\sqrt{3}t}))^{-1}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Liu-ov integral omogućava nam da integriљemo neizvesni proces (integrand) u odnosu na Liu-ov proces (integrator). Rezultat Liu integrala je još jedan neizvesni proces.

Definicija 5.3. Neka je X_t bude neizvesni proces i C_t je Liu-ov proces. Za svaku particiju zatvorenog intervala $[a, b]$, gde $a = t_1 < t_2 < ... < t_{k+1} = b$, mreža je napisana kao

$$\Delta = \max_{1 \le i \le k} |t_{i+1} - t_i|. \tag{2}$$

Tada je Liu-ov integral od X_t u odnosu na C_t definisan kao

$$\int_a^b X_t dC_t = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{k} X_{t_i}(C_{t_{i+1}} - C_{t_i}),$$

pod uslovom da granična vrednost postoji skoro sigurno i da je konačna. U ovom slučaju, neizvesni proces X_t se smatra Liu integrabilnim.

Pošto su X_t i C_t neizvesne varijable u svakom trenutku t, granica u (2) je takođe neizvesna varijabla pod uslovom da granica postoji gotovo sigurno i konačna. Stoga je nesiguran proces X_t integrabilan u odnosu na C_t ako i samo ako je granica u (2) neizvesna varijabla.

Liu [97] je pretpostavio da je osnovni kapital osiguravajuće kompanije, b je stopa premije, bt je ukupan prihod do vremena t, a neizvesni potraћni proces je proces nagradjivanja.

$$Z_t = a + bt - R_t.$$

Zahvalnica. Ovaj rad je finansiralo Ministarstvo obrazovanja, nauke i obrazovanja Tehnološki razvoj Republike Srbije (Broj projekta TR 34014).

References

[1] M. Grabish, J-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, Aggregation Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[2] B. Q. Hu, W. C. Ip, H. Wong, Fuzzy Integral on Credibility Measure, Fuzzy Inf. Eng. 4 (2010) 389–397.

[3] G. J. Klir, B. Yuan, Fuzzy sets and fuzzy logic, theory and applications, Prentice Hall, New Jersey, 1995. ‘

[4] B. Liu, Y. K. Liu, Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 10(2002) 445–450.

[5] X. Li, B. Liu, A sufficient and necessary condition for Credibility measures, International Journal of Uncertainty, Fuzziness & Knowledge-Based Systems

[6] B. Liu, Uncertainty Theory, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[7] B. Liu, Fuzzy process, hybrid process and uncertain process, Journal of Uncertain Systems 2(2008)3–16.