

UDK: 678.01:519.87:368.025.61:51-7:581.8:159.9.015

Dr Vladimir M. Gajović¹
Dr Marija V. Paunović²

PRIMENA FAZI MATEMATIKE U OCENI RIZIKA U OSIGURANJU

NAUČNI RAD

Apstrakt

Većinu dinamičkih sistema izuzetno je teško modelirati prema tačnim i preciznim matematičkim relacijama, budući da su strukture sistema složene. Javljuju se nelinearnost, neizvesnost, slučajnost, promenljivost itd. Fazi matematika (fazi logika, teorija fazi skupova itd.) može pružiti odgovarajuću alternativu egzaktnom matematičkom modeliranju sistema ili procesa koji su u velikom stepenu nejasni ili suviše složeni da bi bili opisani jednostavnim i jasnim matematičkim formulama. Metode fazi sistema našle su široku primenu u oceni rizika i drugim segmentima teorije i prakse osiguranja, kao što su klasifikacija, preuzimanje rizika, projektovane obaveze, buduće i sadašnje vrednosti, formiranje premija osiguranja, raspodela aktive, novčani tokovi, investicije i drugo. U radu je dat pregled istraživanja i mogućnost primene fazi matematike u osiguranju.

Ključne reči: rizik, fazi matematika, osiguranje, aktuarstvo, anderajting.

1. Uvod

U osiguranju se u najvećoj meri primenjuju tradicionalne aktuarske metodologije i modeli razvijeni na osnovu teorije verovatnoće, matematičke statistike i matematike. Sve veća svetska konkurencija u protekle dve decenije otvorila je prostor

¹ Direktor GFO transporta i kredita Kompanija „Dunav osiguranje“

I-mejl: vladimir.gajovic@dunav.com

² Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu.

I-mejl: majap@rcub.bg.ac.rs

Rad je primljen: 5. 1. 2018.

Rad je prihvaćen: 2. 2. 2018.

i potrebu za primenu novih metodologija, pored ostalog, i metodologijā baziranih na fazi matematici (teoriji fazi skupova i fazi logike, engl. *theory of fuzzy set, fuzzy logic*). Korišćenje teorije fazi skupova postaje alternativni pristup u modeliranju neizvesnosti u stohastičkom okruženju. Kod probabilističkih modela pretpostavlja se da je neizvesnost u odnosu na stvarni rezultat ocenjena na osnovu izvođenja eksperimenta, odnosno posmatranjem istorije događaja. Primena fazi skupova predstavlja bolje rešenje za situacije kada, čak i nakon izvođenja eksperimenta, ne možemo u potpunosti da predstavimo ili rešimo sve neizvesnosti. U praksi se često postavlja pitanje ispravnosti načina postavljanja problema, kao i subjektivnog tumačenja rezultata eksperimenta. Takođe, u praksi osiguranja često se javlja i visok stepen složenosti posmatranog problema, kada se u obzir uzima iskustvo na osnovu ljudske ekspertize, umesto preciznih obračuna.

Pokazalo se da jezik klasične matematike nije dovoljno elastičan za modeliranje gde elementi ili klase objekata nemaju precizno definisan kriterijum pripadnosti određenoj kategoriji; osim objektivnih zakona, u njihovom funkcionisanju bitnu ulogu igraju i subjektivne ocene, odnosno faktori. Drugo, izdvajanjem podsistema iz njegovog sistema uvodimo granice tamo gde ih zapravo nema, tako da je prelazak sa jednog sistema na drugi skokovit umesto da bude neprekidan.

Cilj fazi matematike je modeliranje neodređenih ili nepreciznih, ili suviše kompleksnih, ili nedovoljno definisanih opisa koji se ne mogu ili je manje pogodno analizirati teorijom verovatnoće, ili intervalnom matematikom. Njen značaj i veliki potencijal leži u činjenici da je ljudsko razmišljanje po prirodi aproksimativno. Pristup postepenosti i laganih prelazaka (prepoznavanja situacije) odgovara načinu kako fazi matematika pristupa problemima i kako ih rešava.

Teoriju fazi sistema ima smisla primeniti u sledećim situacijama:

- Kada su vrednosti podataka i relacije koje postoje između njih neizvesne ili neprecizne a njihova procena zasnovana na subjektivnom vrednovanju eksperta;
- Kada je teško da se odredi mera podataka, odnosno kada nema dovoljno podataka iz evidencije potrebnih za kvantitativnu analizu;
- Kada su neke veličine unutar problema nejasno i neprecizno definisane;
- Znanje kojim ekspert raspolaže o tretiranom problemu je složeno, limitirano i nepotpuno;
- Gde se uslovi stalno menjaju, tako da je posmatranu veličinu stohastički nemoguće opisati.

2. Pojam i definicija rizika

U svakodnevnoj komunikaciji, pod rizikom se podrazumeva štetni događaj koji se može desiti, ali nije izvesno da li će se desiti. Pod štetnim događajima smatraju se događaji koji ostavljaju negativne posledice na ljude, društvo, ekonomsko

okruženje i prirodnu sredinu. Mnogo autora pojam rizik opisuje kao mogućnost da određeni slučajni događaj ostavi posledice na ostvarenje postavljenog cilja. Rizik se može okarakterisati kao kompleksna veličina kojom se jednovremeno opisuju verovatnoća nastanka štetnih događaja i očekivana veličina posledice takvih događaja u zaokruženom sistemu i tokom utvrđene dužine vremenskog intervala, ili tokom određenog procesa.

Prema klasičnom pristupu, rizik (R) predstavlja proizvod verovatnoće pojave određenog (štetnog) događaja (P) i očekivanih posledica (C). U kompleksnim sistemima, ukupan rizik se može predstaviti kao suma svih poznatih rizika, na način da rezultat rizičnosti (ili dimenzija rizika) bude uporediv (ekonomski gubitak, gubitak reputacije, nematerijalne štete i dr.). Ukupan rizik određenog sistema ili procesa R_U , koji se sastoji od brojnih pojedinačnih rizika, može se iskazati kao suma pojedinačnih rizika ($i=1,2,\dots,n$) sa verovatnoćama realizacije P_i i posledicama C_i i može se definisati sledećim izrazom³:

$$R_U = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n P_i C_i$$

Postoji mnogo definicija rizika koje ga opisuju u zavisnosti od pristupa, konteksta i ugla posmatranja. U teoriji i praksi poslovnih sistema, pojam rizika najčešće se koristi kada se želi iskazati postojanje mogućnosti da dođe do nekog neželjenog događaja, a da se pri tome ima u vidu mera takvog događaja, odnosno mera neizvesnosti. Knight⁴ definiše verovatnoće koje se dobijaju na dva različita načina: teorijske ili *a priori* verovatnoće zasnovane na znanju o određenoj pojavi, i statistička verovatnoća koja se generiše na osnovu analize homogenih statističkih podataka. Navedena teoretska postavka pojma rizik podrazumeva izračunavanje statističkih verovatnoća različitih negativnih događaja i ocenu očekivanih posledica takvih događaja. Pomenuti autor takođe definiše rizik kao potpuno znanje o potencijalnom rešenju određene situacije, odnosno objektivnu verovatnoću pojave takve situacije, kao i posledica. Rizik znači „biti izložen verovatnoći lošeg ishoda“.⁵ Neki od autora smatraju da su rizik i neizvesnost dva potpuno nezavisna pojma, dok drugi misle da su ovi pojmovi vrlo zavisni. Pojam neizvesnost ukazuje na to da postoji spektar događaja koji se mogu desiti u budućnosti, ali bez indicija da će se stvarno desiti ili da će ostaviti relativne posledice. S druge strane, rizik znači da postoji mogućnost da se nabroje događaji koji se mogu desiti u budućnosti, i da im se pojedinačno može odrediti verovatnoća realizacije. Pojam neizvesnost opisuje

³ Gordana Radivojević, Vladimir Gajović, "Supply chain risk modeling by AHP and FAHP methods", *Journal of Risk Research*, 17 (3), 2014, pp. 337–352.

⁴ Frank H. Knight, *Risk, Uncertainty and Profit*, Boston and New York: Houghton Mifflin, Boston and New York. Reprinted by London School of Economics and Political Science 1948.

⁵ Dan Borge, *The book of risk*, John Wiley & Sons, New York, 2001.

se i kao odsustvo informacija u uslovima kada se donose odluke i podrazumeva procenu određene situacije, alternativnih rešenja, mogućih rezultata i posledica i sl. U ekstremnim situacijama, neizvesnost se može okarakterisati kao odsustvo informacija ili znanja o određenom problemu ili u procesu odlučivanja. U oblasti upravljanja rizicima postoji integracija i interakcija pojmova *neizvesnost* i *rizik*, što se najčešće objedinjuje pojmom rizik.

3. Statističke metode za ocenu rizika

U praksi osiguranja koriste se različite metode za ocenu rizika. Najpreciznije su one zasnovane na *Zakonu velikih brojeva*, odnosno na statističkim parametrima i reprezentativnom statističkom uzorku iz baze istorijskih podataka koja se vezuje za posmatrani događaj. Takođe, u teoriji i praksi u segmentu ocene rizika poslovnih sistema, kao i u oblasti osiguranja, često se kombinuju statistički podaci i oni bazirani na odgovarajućim statističkim pretpostavkama koje nisu potvrđene egzaktnim načelima teorije matematičke statistike. Međutim, ukoliko su svi posmatrani parametri rizika zasnovani na reprezentativnom statističkom uzorku, postiže se visoka pouzdanost statističke ocene.

Prema stavu Američke akademije aktuara,⁶ statističko posmatranje rizika podrazumeva sledeće pretpostavke:

- *Homogenost*. Homogenost rizika predstavlja jednakost ili sličnost karakteristika rizika koji pripadaju istoj klasi. Homogene rizike moguće je posmatrati kao jedinstven skup prilikom formiranja odgovarajućeg statističkog uzorka u procesu analize i kvantifikacije rizika.
- *Kredibilnost*. Osnovni statistički princip je da što veći broj opservacija određenih pojava predodređuje veću tačnost statističke ocene realizacije budućih pojava. Ponavljanje i brojnost događaja parametri su koji su potrebni pri utvrđivanju određenih zakonitosti realizacije događaja. Rizike koji se događaju veoma retko nije moguće oceniti statističkim metodama, već se mogu koristiti alternativne, nestatističke metode za ocenu rizika.
- *Prediktivna stabilnost*. Važna pretpostavka pri oceni određene klase rizika jeste njena predvidljivost, odnosno nepromenljivost u budućem periodu. Prediktivna stabilnost ponašanja rizika podrazumeva da se njegove karakteristike neće znatno menjati, čime se obezbeđuje preciznost statističkog ocenjivanja. Međutim, jedna od osnovnih karakteristika rizika, naročito u dinamičkim sistemima, jeste ta da se oni menjaju u prostoru i vremenu usled različitih internih ili eksternih uzroka. U poslovnim sistemima

⁶ American Academy of Actuaries, Committee on Risk Classification, 1980, Risk Classification Statement of Principles.

i procesima postoje brojni rizici koji se ne mogu smatrati stabilnim. Usled nestabilnosti određenih parametara poslovnih sistema i procesa, često nije moguće obezbediti prediktivnu stabilnost kao kriterijum statističkog ocenjivanja rizika.

Osnovni problem pri preciznom merenju visine rizika u osiguranju jeste taj što se pojedini rizici javljaju veoma retko. Takođe, pojedini rizici mogu da budu zastupljeni u poslovnom sistemu, ali se do momenta njihove ocene nisu realizovali u praksi (npr. rizik od požara, rizik od eksplozije, rizik od poplave i dr.). Ako se za ograničeno vreme u kome se prati rizik odabere samo jedna godina, u tom periodu posmatrani rizik se ne mora realizovati, ili se može realizovati samo jednom. To bi značilo da za formiranje dovoljnog broja ulaznih parametara za ocenu konkretnog rizika treba da prođe više godina, što je često nemoguće sprovesti u praksi. Takođe, posmatrani rizik se s protokom vremena može promeniti ili npr. ostaviti niz drugih pratećih posledica koje se kumuliraju u odnosu na primarni rizik (npr. gubitak zarade i reputacije, gubitak tržišta, zastoji u proizvodnji, dodatni troškovi, nematerijalne štete i dr.).

Aktuari su visokoedukovani stručnjaci koji poseduju znanja iz opšte matematike, matematičke statistike, stohastičkih procesa, teorije verovatnoće, finansijske i aktuarske matematike, finansija, finansijskog upravljanja i ulaganja sredstava osiguranja, osiguranja, računovodstva, demografije i drugo. Uz pomoć aktuara postavljaju se tehničke osnove, tačnije računski modeli za pojedine grane osiguranja – utvrđuje se premija osiguranja, izrađuju i planiraju bilansi prihoda i rashoda pojedinih grana, prate i analiziraju ostvareni rezultati u cilju provere tačnosti postavljenih matematičkih modela i, konačno, prati se razvoj ukupnog poslovanja sa stanovišta struke osiguranja.

U aktuarskoj praksi različiti problemi vezani za pouzdanost ocene rizika rešavaju se primenom teorije kredibiliteta (engl. *Credibility theory*).⁷ Kredibilitet predstavlja meru prediktivne vrednosti koja se dodeljuje određenom skupu podataka, odnosno meru statističke pouzdanosti, poverenja ili verovatnoće. Teorija kredibiliteta se u određenim slučajevima primenjuje prilikom definisanja premije osiguranja ili modeliranja složenih procesa u osiguranju, i najčešće je zasnovana na odgovarajućim procenama vrednosti faktora kredibiliteta. Ukoliko pri oceni rizika homogenih grupa predmeta osiguranja ne postoji dovoljan broj statističkih podataka, tačnost ocene neće biti dovoljno kredibilna.

Aktuarstvo podrazumeva projektovanje i ocenu budućih finansijskih parametara i događaja na osnovu validnih statističkih podataka iz prošlosti, korišćenjem aktuarskih metoda i modela, ili individualnim subjektivnim ocenjivanjem određenih finansijskih parametara, u uslovima kada ne postoje reprezentativni podaci iz prošlosti. Tačnost i pouzdanost bilo koje aktuarske analize zavisi od dovoljno dostupnih

⁷ Robert Brown, Leon Gottlieb, *Introduction to Ratemaking and Loss Reserving for Property and Casualty Insurance*. 2nd Edition. ACTEX Publications Inc., 2001.

statističkih podataka, kako u određenom vremenskom rasponu tako i u istorijskom periodu, i njihove pouzdanosti i stabilnosti u vremenu. Međutim, na tržištu postoji stalan porast tražnje za dobrom statistikom za potrebe napredne analize rizika kako bi se pružila podrška delatnosti osiguranja, kao i procesima procene rizika i smanjenju potencijalnih šteta. Aktuari pomoću raznih vrsta statističkog alata analiziraju podatke iz prošlosti ne bi li odredili premiju osiguranja, sagledali potrebu za promenom premijskih stopa različitih usluga, projektovali rezervacije ili druge aktuarske pokazatelje. Ustanovljene premijske stope ili premije osiguranja dalje se razmatraju i koriguju u drugim funkcijama osiguranja, naročito u uslovima niskog kredibiliteta podataka, kada se rizik najčešće ocenjuje individualno, ekspertski, zbog činjenice da nije moguće ispuniti navedene aktuarske pretpostavke. Među najbitnije takve eksperte spadaju anderajteri, i segment anderajtinga u osiguranju jedna je od najvažnijih aktivnosti osiguravača u funkciji pružanja odgovarajućeg osiguravajućeg pokrića. Anderajting podrazumeva proces analize, selekcije i klasifikacije zahteva za osiguranje, procenu izloženosti potencijalnih klijenata određenim rizicima, kao i određivanje uslova i cene osiguravajućeg pokrića.^{8,9} Anderajteri su stručna lica koja imaju potrebno znanje, iskustvo i intuiciju u pogledu rizika i osiguravajućeg pokrića i često su usko specijalizovani za pojedine vrste osiguranja. Pored dobrog poznavanja određenih usluga osiguranja, anderajteri moraju imati potrebna znanja iz oblasti reosiguranja, upravljanja rizicima, likvidacije šteta i upravljanja štetama i regresima iz osiguranja, aktuarstva, ekonomije i finansija, tehničkih i tehnoloških nauka, prava itd.

U današnje vreme u širokoj primeni u raznim oblastima kao što su menadžment, ekonomija, tehničke nauke i dr., uključujući i oblast anderajtinga u osiguranju, veoma su zastupljene metode i tehnike višekriterijumskog odlučivanja (engl. *Multiple Criteria Decision Making methods*), zasnovane na fazi logici.

4. Metode i modeli za ocenu rizika u osiguranju zasnovani na fazi matemati

Ocena rizika u osiguranju zavisi od složenosti, percepcije individua, uticaja na sistem, raspoloživosti informacija i drugih okolnosti. U slučaju nedostatka reprezentativnih statističkih podataka, u praksi se često koriste raspoloživi statistički podaci koji mogu da budu upotrebljivi uz određene rezerve, ograničenja i odstupanja. Ti podaci zasnivaju se na intuiciji ili znanju eksperata. Primenom teorije fazi sistema mogu se dobiti zadovoljavajuća rešenja u slučajevima kada postoji problem

⁸ Lionel Macedo, *The Role of Underwriter in Insurance*, Primer Series of Insurance, The World Bank, 2009.

⁹ Robert Klen, "Underwriting Cycle", *Encyclopedia of Actuarial Science*, Vol. 3, (Editors-in-Chief, Teugels J., Sundt B), 2004, pp. 1705–1714.

neizvesnosti, nepouzdanosti, višeznačnosti i neodređenosti.¹⁰ U segmentu ocene rizika u osiguranju koristi se kada ne postoje jasni, precizni ili dovoljni podaci neophodni za pouzdanu kvantifikaciju rizika. Fazi sistemi i fazi tehnologija predstavljaju matematički pristup na osnovu koga se određene neprecizne informacije mogu matematički modelirati, što predstavlja osnovu za računarsku obradu informacija pomoću brojnih softvera iz ove oblasti. Time se obezbeđuje odgovarajuća podrška u odlučivanju u vezi s rešenjem različitih problema, a jedna od mogućnosti primene je i oblast analize i ocene rizika. Klasična teorija često predstavlja neadekvatnu osnovu za tretiranje relacija ili događaja zasnovanu na lingvističkim varijablama, kao što su npr. *veoma velik rizik, nizak stepen bezbednosti, veoma zapaljiva materija* itd. S druge strane, fazi logika omogućuje morfologiju zaključivanja koja obezbeđuje primenu u sistemima ili procesima koji su zasnovani na znanju, i omogućuje formalizaciju aproksimativnog rezonovanja individua. Priroda ljudskog ponašanja je da se rasuđuje na osnovu dokaza, koji predstavljaju osnov za donošenje odgovarajućih odluka i ostvarenja ciljeva. Međutim, neizvesnosti i neodređenosti najčešći su razlozi pojave grešaka u oceni karakteristika i veličina određenih pojava, jer se često ne raspolaze jasnim i tačnim informacijama o okruženju. Većinu dinamičkih, fizičkih sistema, naročito složenih sistema, izuzetno je teško modelirati prema tačnim i preciznim matematičkim relacijama, zbog složenosti strukture sistema, nelinearnosti, neizvesnosti, slučajnosti, promenljivosti itd. Fazi matematika može da pruži odgovarajuću alternativu egzaktnom matematičkom modeliranju različitih dinamičkih sistema koji su u visokom stepenu nejasni ili suviše složeni da bi bili opisani jednostavnim i jasnim matematičkim formulama.

Danas postoji zajedničko stanovište da, kada složeni fizički ili upravljački sistem ne pruža skup odgovarajućih jednačina kao precizan ili prihvatljivo tačan matematički model, teorija fazi sistema i upravljanje bazirano na njoj imaju neke prihvatljive osobine i prepoznatljive karakteristike u odnosu na ostale pristupe. U poređenju s konvencionalnim pristupima, upravljanje bazirano na fazi sistemima je više zasnovano na informacijama iz domena ekspertize, a manje na matematičkom modeliranju fizičkog ili drugog sistema.¹¹

U teoriji klasičnih skupova određeni skup je kolekcija stvari ili događaja koji se mogu razlikovati međusobno kao pojedinačni elementi koji dele neke zajedničke osobine. Svaki element pojedinačno naziva se članom ili elementom skupa. Ukoliko se velikim slovima $A, B, C...$ označe skupovi, a malim slovima $a, b, c...$ označe elementi skupa, da pojedinačni element a pripada skupu A se označava sa $a \in A$. Simbol „ \in “ se čita kao „*element od*“, a činjenicu da element a nije član skupa A , zapisujemo

¹⁰ Više o ovoj oblasti u Lotfi A. Zadeh, "Fuzzy sets", *Information and Control*, (8), 1965, pp. 338–353. i Hans-Jürgen Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and its Applications*, 4th Edition, Springer, 2001.

¹¹ Chen Guanrong, Tat Pham Trung, *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Control Systems*, CRC Press LLC, 2001.

sa $a \notin A$. Prema teoriji običnih (standardnih eng. *crisp*) skupova, postoje samo dve moguće relacije između pojedinačnog elementa a i skupa A ; to jest, ili $a \in A$ ili $a \notin A$. Univerzalni skup se sastoji od svih pojedinačnih elemenata u datoj aplikaciji.

U literaturi se fazi skupovi definišu na više načina, jer u zavisnosti od skupa vrednosti odgovarajuće funkcije pripadnosti, postoji više tipova fazi skupova. Kod osnovnog tipa fazi skupa funkcija pripadnosti ima vrednosti u intervalu $[0, 1]$. Ukoliko je X proizvoljan neprazan skup, fazi skup A sa vrednostima u intervalu $[0, 1]$ definisan na X okarakterisan je funkcijom $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$, odnosno uređeni par (X, μ_A) zovemo fazi skup. Funkcija μ_A se naziva funkcijom pripadnosti (engl. *membership function*) fazi skupa A . Funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ se često označava i sa $A(x)$, i poistovećuje se sa samim fazi skupom (X, μ_A) . Vrednost $\mu_A(x)$ se interpretira kao stepen pripadnosti elementa x skupu A .

Kada je X neprekidan, fazi skup A se matematički zapisuje kao $A = \int_X \mu_A(x) / x$, što označava kolekciju svih tačaka $x \in X$ sa odgovarajućom funkcijom pripadnosti $\mu_A(x)$. S druge strane, kada je X diskretan skup, fazi skup A se obično izražava kao $A = \sum_X \mu_A(x) / x$, što označava kolekciju svih tačaka $x \in X$ sa odgovarajućom funkcijom pripadnosti $\mu_A(x)$. Operacije sa fazi skupovima poželjno je definisati tako da što više dobrih osobina koje imaju obični skupovi i operacije sa njima, važi i za fazi skupove.

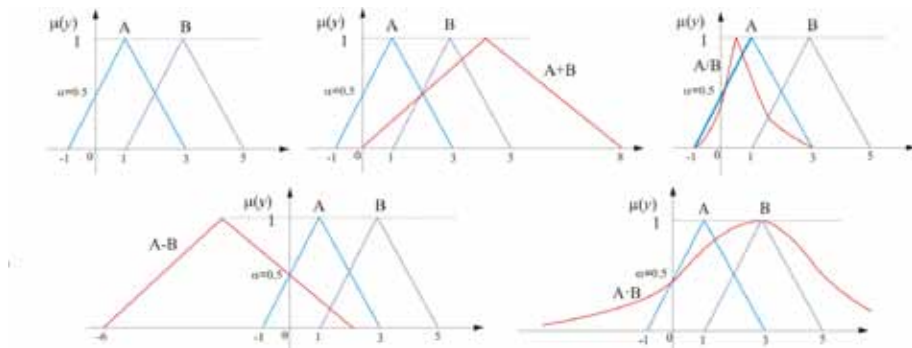
Fazi aritmetika zasnovana je na osobinama da se svaki fazi skup, pa time i fazi broj, može potpuno i jedinstveno predstaviti korišćenjem α -preseka tog skupa (engl. *alpha-cut*) i da je α -presek fazi broja zatvoren interval realnih brojeva za sve $\alpha \in [0, 1]$.

Ukoliko $*$ označava bilo koju od četiri standardne aritmetičke operacije $+, -, \cdot, /$, analogne operacije se mogu definisati i sa zatvorenim intervalima, tada je $[a, b] * [d, e] = \{f * g \mid a \leq f \leq b, d \leq g \leq e\}$ osim pri deljenju, koje nije definisano ako $0 \in [d, e]$. Osnovne aritmetičke operacije sa fazi brojevima se definišu preko α -preseka. Najčešće korišćeni fazi brojevi su trougaoni fazi brojevi.

Na slici 1 prikazane su osnovne aritmetičke operacije sa trougaonim fazi brojevima $A = [-1, 1, 3]$ i $B = [1, 3, 5]$.¹²

¹² Primer iz George J. Klir and Bo Yuan, *Fuzzy sets and fuzzy logic, theory and applications*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.

Slika 1. Osnovne aritmetičke operacije sa trougaonim fazi brojevima



Modeli zasnovani na fazi logici sastoje se od *ako – tada* (ili *if – then*) pravila. Potrebno je da se za poznatu vrednost ulazne promenljive x prođe kroz sva definisana pravila, odnosno potrebno je da se utvrdi koliko istine ima u tvrdnji da određeni parametar (npr. x) ima određenu vrednost, npr. *malu*, *srednju* ili *veliku* vrednost. Nakon prolaska kroz sva pravila sadržana u algoritmu aproksimativnog rezonovanja, svakoj od mogućih vrednosti izlazne promenljive (npr. y) pridružen je odgovarajući stepen pripadnosti. Poslednji korak u algoritmu aproksimativnog rezonovanja jeste defazifikacija, tj. izbor jedne vrednosti izlazne promenljive. Nakon sagledavanja stepena pripadnosti pojedinih vrednosti izlazne promenljive, donosilac odluke bira jednu vrednost izlazne promenljive.

Metode teorije fazi skupova i fazi logike takođe su našle široku primenu u oceni rizika i drugih segmenata teorije i prakse osiguranja, kao što su klasifikacija, preuzimanje rizika, projektovane obaveze, buduće i sadašnje vrednosti, formiranje premija, raspodela aktive, novčani tokovi, investicije i drugo. Veoma često, naročito u manjim osiguravajućim kućama, postoji problem obezbeđenja reprezentativnih statističkih parametara potrebnih za preciznu kvantifikaciju rizika. Takođe, u praksi se često postavlja pitanje ispravnosti načina i postupaka strukturiranja posmatranog problema, kao i subjektivnog tumačenja rezultata eksperimenta.

Prva osnovna definicija nastala primenom fazi logike u osiguranju je određivanje termina prioritetni osiguranik u životnom osiguranju kako bi se osigurala fleksibilna definicija.¹³ Sledeća fazi procedura ilustrovana je na modelima reosiguranja, a zatim je teorija fazi brojeva proširena na definisanje fazi premije osiguranja. Fazi skupovi nedavno su primenjeni i u aktuarskoj nauci.

Zimmerman¹⁴ daje sveobuhvatan prikaz primena fazi skupova uključujući tretiranje neizvesnosti usled nedostatka informacija, koje generišu rizike u procesu

¹³ Jean Lemaire, "Fuzzy Insurance", *ASTIN Bulletin*, 20 (1), 1990, pp. 33–55.

¹⁴ Hans-Jiirgen Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and its Applications*, 4th Edition, Springer, 2001.

odlučivanja. *Ostaszewski* je predložio veliki broj mogućih primena fazi teorije u aktuarskoj analizi. Njegovo istraživanje obuhvatilo je ekonomski rizik, vremensku vrednost novca, individualne i grupne modele rizika, klasifikaciju pretpostavki, konzervativizam i prilagođavanje. *Cummins i Derrig*¹⁵ dopunili su prethodne radove istraživanjem primene fazi skupova na predviđanja u imovinskim osiguranjima i osiguranjima od odgovornosti, kao i problem određivanja premije. *DeWit*¹⁶ je eksplicitno naveo da se proces ugovaranja osiguranja sastoji od rizika i neizvesnosti koju klasična teorija verovatnoće ne može tačno da opiše. Autor je naveo i ograničenja primene teorije fazi skupova. On, međutim, smatra da postoji prostor za izračunavanje premije osiguranja na osnovu ove teorije za oblasti gde klasična teorija rizika nudi nedovoljne mogućnosti. Brojni autori koristili su teoriju fazi skupova u segmentu preuzimanja rizika, odnosno procesa na osnovu kojeg osiguravač utvrđuje koje rizike treba prihvatiti, kao i uslove prihvatanja i visine prihvaćenih rizika. *Shapiro* u svojim radovima¹⁷ daje pregled širokih mogućnosti primene fazi logike u osiguranju u segmentima anderajtinga, ocene rizika i određivanja premije osiguranja, klasifikacije rizika, projektovanja obaveza osiguravača iz zaključenih osiguranja, investicija, alociranja finansijskih resursa i dr.

Mnoštvo studija upravo je posvećeno istraživanju klasifikacije rizika i primeni teorije fazi skupova za klasifikaciju elemenata osiguranja kao što su rizici životnih osiguranja, klasifikacija rizikā i šteta, klasifikacija izvorā zloupotreba i prevara, klasifikacija rizika povrede na radnom mestu, klasifikacija indeksa invaliditeta, kao i mnogo toga drugog, jer klasifikacija rizika predstavlja uvod u potencijalno preuzimanje rizika u osiguranju koje je potrebno pravilno identifikovati, klasifikovati i izdvojiti zbog formiranja cena osiguranja. *Ostaszewski*¹⁸ je istakao da klasifikacija rizika u osiguranju često pribegava nejasnim i neizvesnim kriterijumima, kao što su *oblast visokog rizika* ili *oblast niskog rizika*, ili metodama koje su preterano precizne – kao u slučaju lica koje se ne klasifikuje kao poželjan rizik za životno osiguranje jer njegova telesna težina premašuje navedeno ograničenje. *Lemaire* je rekao da je nedostatak aktuarski pravične klasifikacije ekonomski ekvivalentan diskriminaciji cena u korist visokorizičnih pojedinaca i predložio moguću meru opreza protiv (diskriminacije) koja predstavlja stvaranje metoda klasifikacije bez pretpostavki, ali metoda koje otkrivaju obrasce koji se koriste u klasifikaciji.¹⁹ Bio je među prvim autorima koji je predložio upotrebu algoritma *c* – srednja vrednost za klasifikaciju u osiguranju. Prilikom predstavljanja svoje studije aktuarima, razmotrio je primer koji obuhvata

¹⁵ David Cummins, Richard A. Derrig, "Fuzzy Financial Pricing of Property-Liability Insurance", *North American Actuarial Journal*, 1 (4), 1997, pp. 21–40.

¹⁶ G. W. DeWit, "Underwriting and Uncertainty", *Insurance: Mathematics and Economics* 1/1982, 277–285.

¹⁷ Arnold Shapiro, 2004, 2005, 2007.

¹⁸ Krzysztof Ostaszewski, *Fuzzy sets Methods in Actuarial Science*, Schaumburg IL, Society of Actuaries, 1993.

¹⁹ Lemaire, J. Ibidem, str. p. 35.

klasifikaciju četiri buduća osiguranika, dva muškarca i dve žene, u dva klastera, na osnovu visine, pola, težine i pulsa nakon odmora. Dva početna klastera zasnovana su na polu. Postupno i nakon tri ponavljanja, *Ostaszewski* je razvio efikasniju klasifikaciju na osnovu svih osobina osiguranika.

Modeliranje rizika je dinamičan proces koji se sastoji u širokom spektru aktivnosti i veština, uključujući analizu sistema ili procesa, razvoj, testiranje, simulacije i primenu metoda i modela i periodičnih poboljšanja i korekcija.²⁰ U novijim istraživanjima sve se više koriste integrisane fazi matematičke metode i fazi ekspertske sistemi u cilju što bolje ocene rizika. Postoje brojna istraživanja u oblasti upravljanja rizicima i različite metode i modeli za rešavanje brojnih problema vezanih za upravljanje rizikom. Odgovarajući model je potrebno implementirati u fazi sistem zaključivanja, u cilju dobijanja izlaznih vrednosti, koje se kreću u unapred zadatom opsegu.

Slika 2. Fazi sistem zaključivanja



Izvor: Prilagođeno Shepard, R. 2005. *Quantifying Environmental Impact Assessments Using Fuzzy Logic*, Springer.

Na Slici 2 prikazan je opšti koncept fazi sistema zaključivanja. Numeričke vrednosti posmatranih parametara se, najpre, fazifikuju. Zatim, lingvističke promenljive (to jest fazifikovane vrednosti), uz uvažavanje različitih ograničenja, ulaze u skup fazi zakona i aktiviraju jedan od njih. Nakon toga sprovodi se fazi sistem zaključivanja i

²⁰ Vladimir Gajović, Marija Kerkez, Jelena Kočović, "Modeling and simulation of logistic processes risk assessment with fuzzy logic technique", *SIMULATION: Transactions of the Society for Modeling and Simulation International*, 2017, pp. 1–12.

kao rezultat dobija se defazifikovana izlazna vrednost u formi lingvističke promenljive ili određene kvantitativne vrednosti.

Lemaire je predložio metodologiju fazi logike za preuzimanje individualnih rizika, kao i fazi obračun premija i rezervi osiguranja. U svojoj agendi prikazao je široku primenu fazi logike u teoriji osiguranja, pre svega sa finansijskog stanovišta.²¹ Koristio je fazi ekspertski sistem da pruži fleksibilnu definiciju željenog osiguranika za životno osiguranje. Kao deo ovog nastojanja, koristio je neprekidne funkcije pripadnosti, proširio je definiciju preseka kako bi obuhvatio ograničenu razliku, Hamaher i Jager operatore, i pokazao je kako α -preseci mogu biti primenjeni da se prečisti pravilo odlučivanja, gde se α -preseci primenjuju na svaku funkciju pripadnosti, i algebarski proizvod, pri čemu je minimalni prihvatljivi proizvod jednak α -preseku. Lemer se fokusirao na sledeće osobine: holesterol, krvni pritisak, težina i status pušača, i njihov presek.

Sledeći Lemer, Hosler²² i Jang²³ su koristili fazi ekspertске sisteme da kreiraju proces selekcije kod kolektivnog zdravstvenog osiguranja. Jang je predložila način primene fazi skupova u grupnom zdravstvenom preuzimanju rizika i dala algoritam primenjen na grupno zdravstveno osiguranje i preuzimanje rizika, pomoću rasplinitosti 13 pravila za njihovo prihvatanje. Prvo je razmatran individualni plan preuzimanja rizika, a potom je studija proširena na planove sa više opcija. U situaciji jednog plana, Jangova se fokusirala na osobine fazi ulaza kao što su faktor promene godina / pola u prethodne dve godine, promene u veličini grupe, broj zaposlenih koji biraju kolektivno osiguranje, udeo premije za zaposlenog i izdržavano lice koje plaća poslodavac, štete kao deo ukupno očekivanih šteta, i stope šteta korigovane veličinom osiguravajuće kuće. Ona je odeljak završila diskusijom o matrici preseka između osobina (kriterijuma) i njihovih tumačenja u kontekstu fazi operatora preseka.

U slučaju više opcija, dodatne fazi osobine obuhvataju faktore pojedinačnih i porodičnih godina, željeni udeo u svakom planu, faktore starosti / pola, razliku u ceni svakog plana i relativnu jačinu svakog plana. Faktori starosti zavise od mogućnosti učešća, s obzirom na trošak pristupa, obim koristi, trošak zaposlenog, bračni status i godine. Odluka o preuzimanju rizika u ovom slučaju obuhvata odluku iz jednog plana kao kriterijum.

Kareno i Jani²⁴ razvili su sistem zasnovan na znanju koji kombinuje fazi obradu sa ekspertskim sistemom baziranim na pravilu, kako bi pružili bolju pomoć pri odlučivanju u proceni rizika životnog osiguranja. Njihov sistem koristi dve vrste ulaza: osnovne ulaze za starost, težinu i visinu; i inkrementalne ulaze, koji se odnose

²¹ Jean Lemaire, "Fuzzy Insurance", *ASTIN Bulletin*, 20 (1), 1990, pp. 33–55.

²² Virginia R. Hosler, "The application of fuzzy sets to group health underwriting" *ARCH 2* /1992, pp. 1–63.

²³ V. R. Young, 1996. Insurance Rate Changing: a Fuzzy Logic Approach, *Journal of Risk and Insurance*, 63 (3), 461–484.

²⁴ Enciklopedija osiguranja

na određene navike i odlike budućih klijenata. Izlaz njihovog sistema jeste faktor rizika koji se koristi za dodatnu premiju.

Mekoli-Bel i *Badiru*²⁵ predložili su fazi lingvistički ekspertski sistem za kvantifikovanje i predviđanje rizika od povrede podlaktice i ruke na radnom mestu. Prva faza istraživanja fokusirala se na razvoj i predstavljanje lingvističkih varijabli radi preciziranja nivoa rizika. Te varijable su zatim kvantifikovane putem fazi skupova. Druga faza je koristila analitički hijerarhijski proces da dodeli relativne težine identifikovanim faktorima rizika. Pomoću lingvističkih varijabli dobijenih u prvom delu istraživanja, kreirana je baza fazi pravila sa svim potencijalnim kombinacijama za date faktore. Osnovna osobina njihovog pristupa jeste upotreba konceptualnog mapiranja kako bi se obuhvatio detaljni prikaz znanja stručnjaka u vezi s kritičnim prostorom, kao i razumevanje relacija između koncepata. Studija je zatim proširena²⁶ razvijanjem modela fazi linearne regresije za predviđanje relacija poznatih faktora rizika sa nastankom povrede na radnom mestu. Sledeći *Tanaku* i ostale,²⁷ njihov model je preuzeo opšti oblik:

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \dots + \tilde{A}_n x_n$$

gde je \tilde{Y} fazi izlaz, \tilde{A}_i je simetrični trougaoni fazi koeficijent, i $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ je n -dimenzioni ne-fazi vektor ulaza. Osnovna ideja, koja se često naziva pristup fazi regresije, bila je da se umanju rasplinutost modela minimiziranjem fazi koeficijenata, shodno uključenju tačaka (podataka) za svaki uzorak u konkretnom α -preseku. Njihov model je izrađen putem četiri fazi podmodela, kako bi ovi prikazali rizik povezan sa zadatkom, antropometriju, zajedničko odstupanje i lične faktore. Ti modeli su kombinovani da bi se dobio ukupan nivo rizika i model predviđanja konačnog rizika. Rezultati ukazuju na to da je fazi linearna regresija korisna tehnika za rešavanje neizvesnosti u vezi sa definicijom i modeliranjem faktora rizika od povrede na radnom mestu.

Pristup proceni rizika procesa osiguranja karga u Srbiji prikazan je u radu autora *Kerkez* i *Gajović*.²⁸ S obzirom na složenost posmatranog problema, broj rizika, parametre i uzroke rizika, te na nedostatak reprezentativne statistike za brojne

²⁵ Pamela McCauley-Bell, A.B. Badiru, "Fuzzy modeling and analytic hierarchy processing to quantify risk levels associated with occupational injuries. The development of fuzzy-linguistic risk levels", *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Volume: 4/1996, pp. 124–131.

²⁶ Pamela McCauley-Bell, L.L. Crumpton, H. Wang, "Measurement of cumulative trauma disorder risk in clerical tasks using fuzzy linear regression", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C*, Volume: 29/1999, 1–14.

²⁷ Hideo Tanaka, I. Hayashi, J. Watada, "Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data", *Eur. J. Operation Research*, 40/1989, pp. 389–396.

²⁸ Marija Kerkez, Vladimir Gajović, *Underwriting risk assessment in marine cargo insurance, Risk management in the financial services sector*, University of Belgrade, Faculty of Economics Publishing Centre, vol. 1, No. 1/2016, pp. 381–399.

elemente rizika i ukupan rizik, autori su prikazali kako metod FAHP (engl. *Fuzzy Analytic Hierarchy Process*) može da pruži prihvatljive kvantitativne podatke.

Modeli zasnovani na fazi logici najčešće zahtevaju iteracije. Najpre se za posmatrani problem definiše skup pravila i odgovarajuće funkcije pripadnosti ulaznih i izlaznih promenljivih. Zatim se model testira i, ukoliko je potrebno, vrši se korekcija pojedinih pravila i funkcija pripadnosti, posle čega se model ponovo testira, sve do dobijanja zadovoljavajućih rešenja. Na osnovu fazi logike, parametri rizika mogu se prikazati kao fazi brojevi koji se dalje mogu kombinovati i uparivati s definisanim pravilima iz utvrđene baze pravila i procenjivati na osnovu npr. Mamdanijevog sistema zaključivanja. U poslednjoj fazi se vrši defazifikacija, u cilju dobijanja jasne kvantitativne vrednosti, na primer ocene visine rizika predmeta osiguranja, koji se izražava premijskom stopom ili premijom osiguranja.

5. Zaključak

Fazi logika predstavlja formalni aparat za modeliranje procesa zaključivanja u uslovima nejasnih i nepreciznih informacija u poslovnom sistemu ili procesu. Fazi sistemi u određenim slučajevima mogu predstavljati bolje rešenje od stohastičkih metoda za situacije kada se, čak i nakon temeljne analize dostupnih statističkih podataka, ne mogu u potpunosti predstaviti ili rešiti sve neizvesnosti. Teorija sistema omogućuje korišćenje subjektivnih ocena izraženih pomoću neodređenih pojmova, relacija i iskaza za opisivanje problema, izbor alternativa u cilju donošenja odluke, formulaciju neodređenih opisa pomoću fazi promenljivih i predstavljanje izlaznih rezultata pomoću jezičkih pojmova i relacija ili u obliku jasnih kvantitativnih preporuka. Raspoloživost informacija o brojnim parametrima rizičnosti konkretnog osiguranja, koje se prikupljaju iz često ograničenog perioda iz prošlosti, utiče na pouzdanost ocene rizika osiguravajućeg pokrivača. U određenim slučajevima, moguće je doći do baze statističkih podataka o realizovanim rizicima, međutim podaci najčešće nisu reprezentativni. Iz navedenog razloga, u cilju analize, ocene i kontrole rizika u praksi osiguranja često se koristi znanje, intuicija i iskustvo eksperata. Fazi logika može biti jedna od veoma efikasnih metoda za analizu i ocenu rizika u različitim oblastima primene. Ona nudi veliki potencijal za modeliranje rizika u osiguranju, naročito u polaznim fazama definisanja koncepta rizika, gde su informacije o pouzdanosti elemenata ili procesa, kao i o rizicima, oskudne. Fazi logika može naći značajnu primenu naročito u vrstama osiguranja kod kojih se formalizovane tarife premije u praksi ne primenjuju (npr. u određenim vrstama transportnih i kreditnih osiguranja, različitim osiguranja od odgovornosti, specifičnih imovinskih osiguranja i dr.), odnosno vrsta kod kojih se širina osiguravajućeg pokrivača i visina premije ocenjuju na bazi intuicije, iskustva i znanja o rizicima. Ovaj pristup može dati veoma prihvatljiva rešenja problema vezanih za ocenu rizika, što tradicionalne metode ne mogu.

Literatura

- American Academy of Actuaries, Committee on Risk Classification, 1980, Risk Classification Statement of Principles.
- Arnold Shapiro, "An Overview of Insurance Uses of Fuzzy Logic", *Computational Intelligence in Economics and Finance*, (2), 2007, pp. 25–61.
- Arnold Shapiro, "Fuzzy logic in insurance", *Insurance mathematics & economics*. 35/2004, pp. 399–424.
- Arnold Shapiro, *Insurance Applications of Fuzzy Logic*, Institute of Actuaries of Australia, 2005.
- Chen Guanrong, Tat Pham Trung, *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Control Systems*, CRC Press LLC, 2001.
- Dan Borge, *The book of risk*, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- David Cummins, Richard A. Derrig, "Fuzzy Financial Pricing of Property-Liability Insurance", *North American Actuarial Journal*, 1 (4), 1997, pp. 21–40.
- Frank H. Knight, *Risk, Uncertainty and Profit*, Boston and New York: Houghton Mifflin, Boston and New York, Reprinted by London School of Economics and Political Science 1948.
- G. W. De Wit, "Underwriting and Uncertainty", *Insurance: Mathematics and Economics*, 1982, pp. 277–285.
- George J. Klir and Bo Yuan, *Fuzzy sets and fuzzy logic, theory and applications*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- Gordana Radivojević, Vladimir Gajović, "Supply chain risk modeling by AHP and FAHP methods", *Journal of Risk Research*, 17 (3), 2014, pp. 337–352. <https://doi.org/10.1080/13669877.2013.808689>
- Hans-Jiirgen Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and its Applications*, 4th Edition, Springer, 2001.
- Hideo Tanaka, I. Hayashi, J. Watada, "Possibilistic Linear Regression Analysis for Fuzzy Data", *Eur. J. Operation Research*, 40/1989, pp. 389–396.
- Jean Lemaire, "Fuzzy Insurance", *ASTIN Bulletin*, 20 (1), 1990, pp. 33–55.
- Krzysztof Ostaszewski, *Fuzzy Sets Methods in Actuarial Science*, Schaumburg IL, Society of Actuaries, 1993.
- Lionel Macedo, *The Role of Underwriter in Insurance*, Primer Series of Insurance, The World Bank, 2009.
- Lotfi A. Zadeh, "Fuzzy Sets", *Information and Control*, (8), 1965, pp. 338–353.
- Marija Kerkez, Vladimir Gajović, *Underwriting Risk Assessment in Marine Cargo Insurance, Risk Management in the Financial Services Sector*, University of Belgrade, Faculty of Economics Publishing Centre, vol. 1, no. 1/2016, pp. 381–399.

- Pamela McCauley-Bell, A.B. Badiru, "Fuzzy Modeling and Analytic Hierarchy Processing to Quantify Risk Levels Associated with Occupational Injuries. The Development of Fuzzy-Linguistic Risk Levels", *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Volume: 4/1996, pp. 124–131.
- Pamela McCauley-Bell, L.L. Crumpton, H. Wang, "Measurement of Cumulative Trauma Disorder Risk in Clerical Tasks Using Fuzzy Linear Regression", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C*, Volume: 29/1999, 1–14.
- Richard Shepard, *Quantifying Environmental Impact Assessments Using Fuzzy Logic*, Springer, 2005.
- Robert Brown, Leon Gottlieb, *Introduction to Ratemaking and Loss Reserving for Property and Casualty Insurance*. 2nd Edition. ACTEX Publications Inc., 2001.
- Robert Klen, "Underwriting Cycle", *Encyclopedia of Actuarial Science*, Vol. 3, (Editors-in-Chief, Teugels J., Sundt B), 2004, pp. 1705–1714.
- V. R. Young, "Insurance Rate Changing: a Fuzzy Logic Approach", *Journal of Risk and Insurance*, 63 (3), 1996, 461–484.
- Virginia R. Hosler, "The Application of Fuzzy Sets to Group Health Underwriting", *ARCH* 2/1992, pp. 1–63.
- Vladimir Gajović, Marija Kerkez, Jelena Kočović, "Modeling and Simulation of Logistic Processes Risk Assessment with Fuzzy Logic Technique", *SIMULATION: Transactions of the Society for Modeling and Simulation International*, 2017, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1177/0037549717738351>.