

Goran Pavlović¹, Mile Savković², Milomir Gašić², Radovan Bulatović²

PRIMENA METODE KRUTIH TELA ZA DISKETIZACIJU NOSEĆIH STRUKTURA PRI DINAMIČKOJ ANALIZI NA PRIMERU KONZOLNE DIZALICE

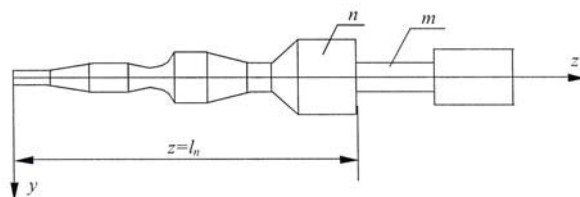
Rezime:

U radu je prikazan postupak dinamičke analize konzolne dizalice korišćenjem metode krutog tela pri čemu je izvršena diskretizacija strukture konzolne dizalice sa tri elementa. Rezultati dobijeni metodom krutih tela poređeni su sa rezultatima dobijenim primenom metode konačnog elementa i klasičnog metoda oscilovanja nosača. Određeni su frekventni spektar i modovi oscilovanja dizalice za sve metode. Pokazano je da se jednostavnim postupkom diskretizacije sa minimalnim brojem elemenata može doći do rezultata koji su značajni za projektante. Sve tri metode su dale približne vrednosti prve tri ugaone učestanosti, koje su od značaja u procesu projektovanja nosećih konstrukcija.

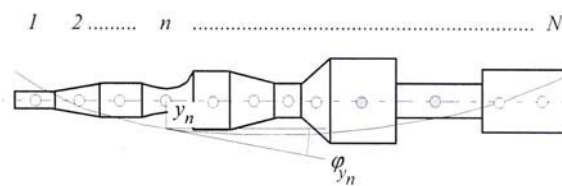
Ključne reči: Diskretizacija, metod krutog tela, frekventni spektar, modovi oscilovanja, konzolna dizalica

1. UVODNA RAZMATRANJA

Prilikom rešavanja problema dinamike mašinskih sistema klasičnim metodama, mogu se javiti mnogobrojni problemi. U inženjerskom projektovanju, svi elementi kao što su: vratila, grede i nosači, imaju različite poprečne preseke u podužnom pravcu (slika 1) i mogu biti podeljeni na odgovarajući broj delova.



Slika 1



Slika 2

Odatle sledi da jednačina kretanja za svaki deo povezuje posmatrani mašinski element preko uslova neprekidnosti. U slučaju grede, jednačina kretanja delova n i m , mogu biti opisane pomoću diferencijalnih jednačina oblika [1], [2]:

$$\frac{\partial^2 y_n(z,t)}{\partial t^2} - \lambda_n^2 \frac{\partial^4 y_n(z,t)}{\partial z^4} = q_n(z,t),$$

$$\frac{\partial^2 y_m(z,t)}{\partial t^2} - \lambda_m^2 \frac{\partial^4 y_m(z,t)}{\partial z^4} = q_m(z,t),$$
(1)

Svaka od ovih jednačina može biti rešena korišćenjem sledećih uslova neprekidnosti:

$$y_n(z,t) \Big|_{z=l_n} = y_m(z,t) \Big|_{z=l_m} \quad \text{i} \quad \frac{\partial y_n(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=l_n} = \frac{\partial y_m(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=l_m}.$$

U inženjerskim problemima broj ovih uslova je veliki i rešenje dinamičkih jednačina je otežano, a često je vrlo teško doći do njega. Zbog toga se kontinualni sistemi koji se sreću u inženjerskim problemima, često aproksimiraju sistemima sa određenim brojem stepeni slobode. Sam proces određivanja matrice inercije i matrice krutosti zove se diskretizacija.

Današnji softverski paketi dopuštaju računanje matrica krutosti i matrica inercije u prostoru slobodne grede duž koordinata y_n , φ_{y_n} (slika 2) koje su međusobno povezane na osnovu izabranog broja tačaka N . Ove

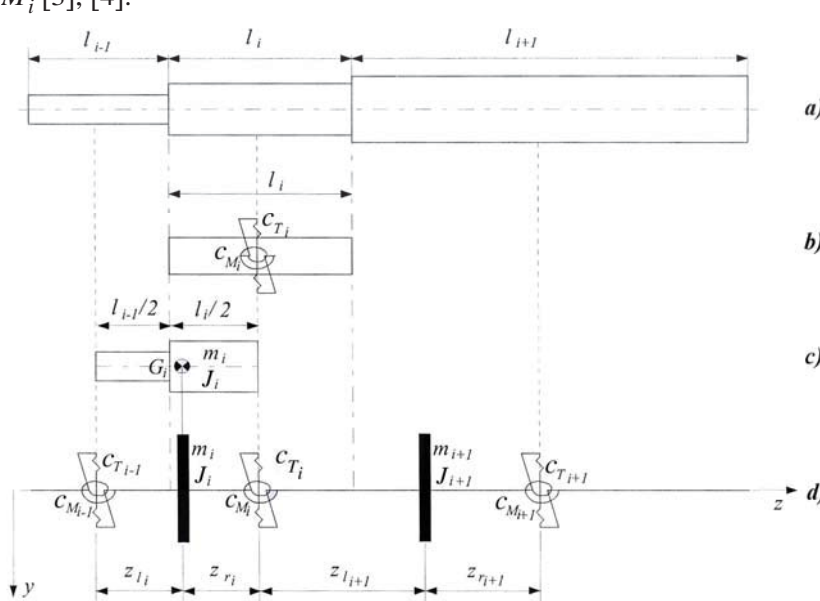
¹ Kneginje Milice 26/27, 37240 Trstenik,

² Mašinski fakultet Kraljevo, Dositejeva 19, 36000 Kraljevo,
Adresa za korespondenciju: savkovic.m@mfv.kg.ac.rs

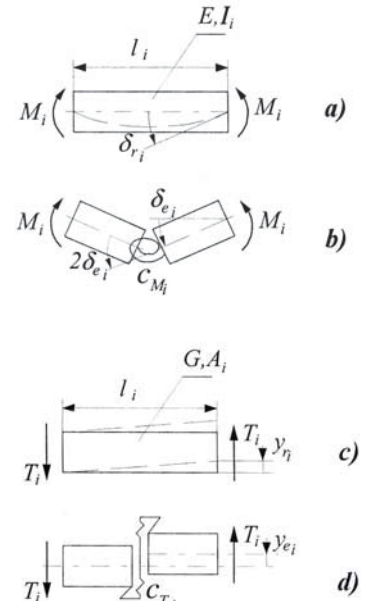
istaknute tačke se zovu čvorovi. Najpoznatiji pristupi za kreiranje matrica krutosti i matrica inercije su metoda krutog elementa i metoda konačnog elementa.

2. PRIMENA METODE KRUTOG TELA

Po ovoj metodi nosač se deli na dovoljan broj segmenata i konstantnog poprečnog preseka, koji daje neophodnu tačnost (slika 3.a). Karakteristike savijanja i smicanja svakog segmenta su prikazane pomoću dve opruge krutosti c_{M_i} i c_{T_i} respektivno (slika 3.b). Ekvivalentno za oba, aktuelni segment (slika 4.a) i njegov model (slika 4.b) zahtevaju jednakost ugla pomeranja ($\delta_{r_i} = \delta_{e_i}$) uzrokovanog istim momentom savijanja M_i [3], [4].



Slika 3



Slika 4

Za $\delta_{r_i} = \frac{M_i l_i}{2EI_i}$ i $\delta_{e_i} = \frac{M_i}{2c_{M_i}}$ sledi da je savojna krutost $c_{M_i} = \frac{EI_i}{l_i}$. Krutost na smicanje iznosi $c_{T_i} = \frac{GA_i}{l_i}$.

Desni deo segmenta l_{i-1} i levi deo sledećeg segmenta l_i čine sekciju (slika 3.c). Svaka sekcija smatra se krutom čije su masene karakteristike m_i i J_i . Na ovaj način dobija se fizički model (slika 3.d) na koji se primenjuju Lagranževe jednačine [5], [6], pri čemu se dobija sledeća jednačina kretanja:

$$M \frac{d^2 Y}{dt^2} + CY = 0, \quad (2)$$

gde su:

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & M_{i-1,i-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_{i,i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & M_{i+1,i+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & M_{N,N} \end{pmatrix} - \text{matrica inercije}, \quad (3)$$

$$M_{i,i} = \begin{pmatrix} m_i & 0 \\ 0 & J_i \end{pmatrix} - \text{elementi matrice inercije},$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & C_{i-1,i-1} & C_{i-1,i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & C_{i,i-1} & C_{i,i} & C_{i,i+1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_{i+1,i} & C_{i+1,i+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{N,N} \end{pmatrix} - \text{matrica krutosti}, \quad (4)$$

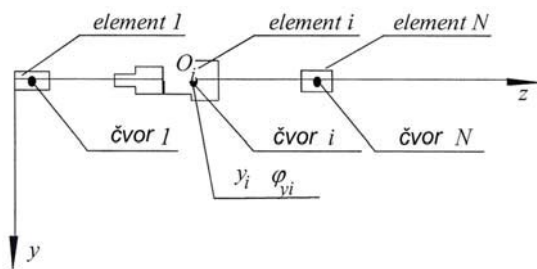
$$C_{i,i-1} = \begin{pmatrix} -c_{T_{i-1}} & c_{T_{i-1}} z_{r_{i-1}} \\ -c_{T_{i-1}} z_{l_i} & -c_{M_{i-1}} + c_{T_{i-1}} z_{r_{i-1}} z_{l_i} \end{pmatrix}, \quad C_{i,i} = \begin{pmatrix} c_{T_{i-1}} + c_{T_i} & c_{T_{i-1}} z_{l_i} - c_{T_i} z_{r_i} \\ c_{T_{i-1}} z_{l_i} - c_{T_i} z_{r_i} & c_{M_{i-1}} + c_{M_i} + c_{T_{i-1}} z_{l_i}^2 + c_{T_i} z_{r_i}^2 \end{pmatrix},$$

$$C_{i,i+1} = \begin{pmatrix} -c_{T_i} & -c_{T_i} z_{l_{i+1}} \\ c_{T_i} z_{r_i} & -c_{M_i} + c_{T_i} z_{l_{i+1}} z_{r_i} \end{pmatrix} - \text{elementi matrice krutosti},$$

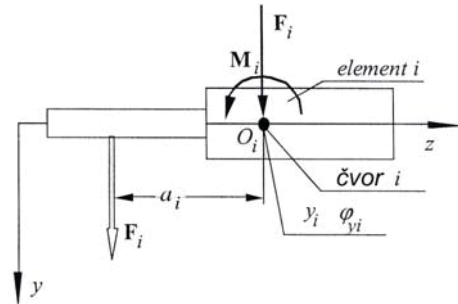
$$Y = (Y_1 \quad \dots \quad Y_i \quad \dots \quad Y_N)^T - \text{vektor koordinata}, \quad Y_i = \begin{pmatrix} y_i \\ \varphi_{y_i} \end{pmatrix} - \text{elementi vektora pomeranja}.$$

Matrica C je kvadratna, simetrična i pojasna matrica, dok je matrica M dijagonalna matrica.

Geometrijska interpretacija vektora koordinata Y_i prikazana je na slici 5. Ovi vektori koordinata su povezani čvorovima koji se nalaze u centru masa krutih elemenata.



Slika 5



Slika 6

Ako više sila deluje na kruti element, svaka od njih može biti ekvivalentno zamenjena silom F_i koja se nalazi u čvoru O_i i momentom $M_i = F_i \cdot a_i$ kao na slici 6. U opštem slučaju ove sile mogu biti nezavisne ili zavisne od vremena. Uvođenjem oznaka F_S za statičke sile i $F(t)$ za pobudne sile, dobija se sledeća jednačina kretanja [3], [4]:

$$M \frac{d^2 Y}{dt^2} + CY = F_S + F(t). \quad (5)$$

Pored ovih metoda može se koristiti i klasična metoda poznata u teoriji oscilacija ili metod konačnih elemenata. Ako se koriste klasične dinamičke jednašine umesto matrice krutosti koristimo tzv. matricu uticajnih koeficijenata Λ .

$$[A] \frac{d^2 \{y(t)\}}{dt^2} + [C] \{y(t)\} = \{0\}, \quad (6)$$

$$[C] = [\Lambda]^{-1}.$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} - \text{matrica uticajnih koeficijenata}. \quad (7)$$

Rešenje diferencijalnih jednačina malih oscilacija pretpostavlja se u obliku:

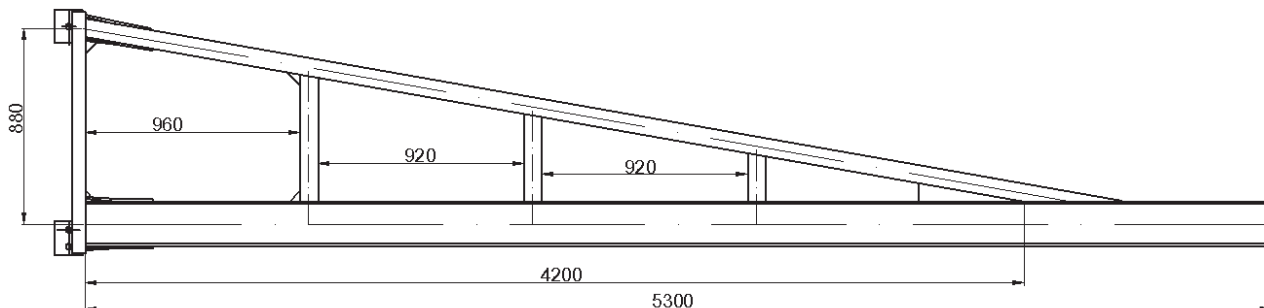
$$y = u \cdot \cos(\omega t - \alpha).$$

Razvijanjem determinante dobija se karakteristična jednačina na osnovu koje se dobijaju sopstvene vrednosti koje su u ovom slučaju kružne frekvencije [7].

3. ANALIZA DOBIJENIH REZULTATA NA PRIMERU NOSEĆE KONSTRUKCIJE KONZOLNE DIZALICE

3.1 Metoda krutih tela

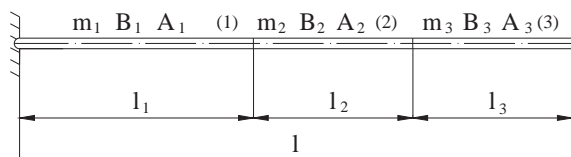
Na slici 7 prikazana je konzola konzolne dizalice nosivosti $Q=500$ kg i dohvata $L=5,2$ m, sa odgovarajućim dimenzijama.



Slika 7

Pri rešavanju problema, u obzir nije uzeto prigušenje. Prilikom merenja ugiba vrha strele opterećenog ispitnim teretom njegova izmerena vrednost iznosi $f=18$ mm.

Pri određivanju sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora, korišćen je matematički softverski paket *Mathcad*.



Slika 8

$m_1 = 80$ kg, $m_2 = m_3 = 55$ kg, (ukupna masa $m = 190$ kg);

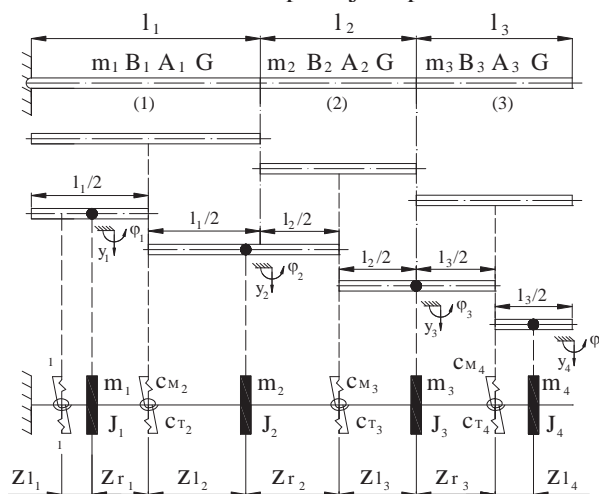
$l_1 = \frac{11}{26}l = 220$ cm, $l_2 = l_3 = \frac{15}{52}l = 150$ cm, (ukupna dužina $l = 520$ cm);

$I_1 = 3I$, $I_2 = 2I$, $I_3 = I$, $I = 2140$ cm⁴.

$B_1 = 3B$, $B_2 = 2B$, $B_3 = B$, $B = IE$, $E = 2,1 \cdot 10^4$ kN/cm².

$A_1 = 3A$, $A_2 = 2A$, $A_3 = A$, $A = 33,5$ cm².

Na slici 9 prikazan je model konzole od tri elementa podeljene prema metodi krutog tela na potrebne delove.



Slika 9

Potrebne veličine neophodne za primenu metode krutih tela glase:

$m_1 = 4/19m = 40$ kg, $m_2 = 27/76m = 67,5$ kg, $m_3 = 11/38m = 55$ kg, $m_4 = 11/76m = 27,5$ kg.

$J_1 = 9,34837$ kg·m², $J_2 = 28,4017$ kg·m², $J_3 = 15,3655$ kg·m², $J_4 = 1,10621$ kg·m².

$$a_1 = \frac{l_1}{4}, a_2 = \frac{3l_1}{4}, a_3 = l_2, a_4 = \frac{3l_3}{4}; c_{M1} = \frac{B_1}{a_1}, c_{M2} = \frac{B_1}{a_2}, c_{M3} = \frac{B_2}{a_3}, c_{M4} = \frac{B_3}{a_4}.$$

$$c_{T1} = \frac{GA_1}{a_1}, c_{T2} = \frac{GA_1}{a_2}, c_{T3} = \frac{GA_2}{a_3}, c_{T4} = \frac{GA_3}{a_4}, G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}, \nu = 0,3.$$

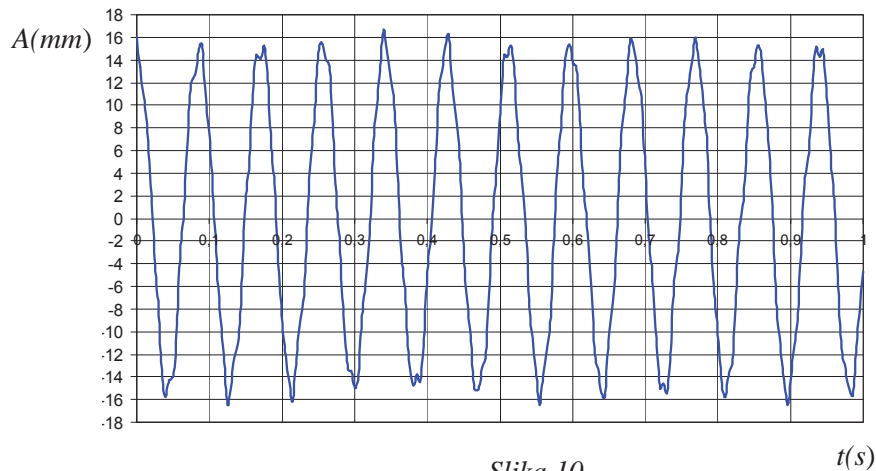
$$z_{h1} = \frac{l_1}{8}, z_{h2} = \frac{l_1}{2} - \Delta l, z_{h3} = \frac{l_2}{2}, z_{h4} = \frac{l_3}{4}. z_{d1} = \frac{l_1}{4}, z_{d2} = \frac{l_2}{2} + \Delta l, z_{d3} = \frac{l_3}{2}.$$

Navedenim postupkom određuju se kružne frekvencije i modove:

$$\omega = \begin{pmatrix} 73,6254 \\ 425,4246 \\ 1218,674 \\ 1529,639 \\ 5728,546 \\ 6731,166 \\ 7422,370 \\ 7660,629 \end{pmatrix} [s^{-1}], S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3,5758 & -3,4168 & -3,3060 & -3,2952 & -7,6297 & 3,7619 & 0,0473 & -0,3717 \\ 13,9660 & 7,1697 & 1,1778 & -0,1760 & -4,4162 & 0,2172 & -0,3089 & -0,1747 \\ -11,8140 & -4,4495 & 1,9338 & 3,3226 & 3,9379 & 1,2228 & -0,1699 & -0,7542 \\ 36,9331 & 3,9543 & -0,9785 & 1,7290 & 4,4712 & 0,3032 & -0,5019 & -0,0126 \\ -16,0101 & 9,7428 & 0,3344 & -6,3611 & 8,6156 & 0,3245 & 2,0929 & -0,5086 \\ 55,2783 & -9,0572 & 0,8948 & -2,3284 & -1,3530 & -0,1842 & 1,2943 & -0,1796 \\ -16,8089 & 14,7119 & -5,2592 & 21,8810 & -15,2378 & -1,8938 & 12,7660 & -1,7503 \end{pmatrix}.$$

Početni uslovi određuju se istovetno za sve navedene postupke.

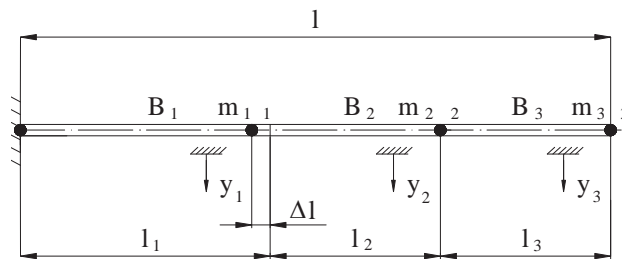
Na slici 10 prikazano je oscilovanje vrha dizalice u trenutku puštanja tereta u intervalu 1 s.



Slika 10

3.2 Klasičan metod dinamike i metod konačnih elemenata

Ovaj rezulta može se uporediti sa rezultatima dobijenim primenom klasičnih jednačina dinamike oscilovanja (slika 11). Za poznate vrednosti: $m_1 = 27/76m = 67,5 \text{ kg}$, $m_2 = 11/38m = 55 \text{ kg}$, $m_3 = 11/76m = 27,5 \text{ kg}$, $\Delta l = 187/5616l$.



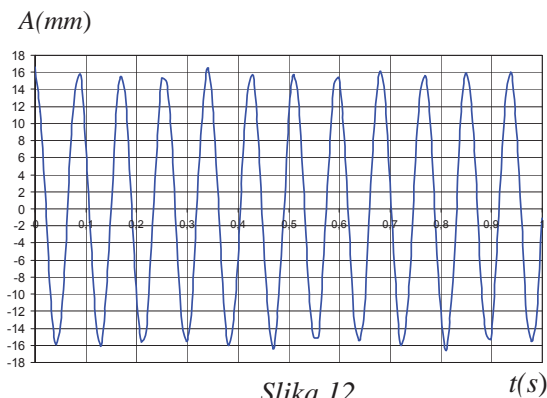
Slika 11

Kružne frekvencije i modovi imaju sledeće vrednosti:

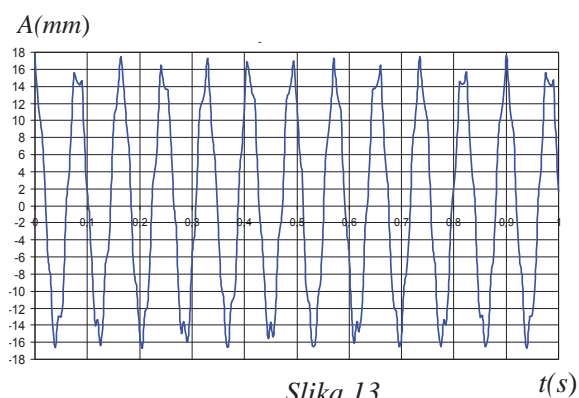
$$\omega = \begin{pmatrix} 5,6856 \\ 27,2241 \\ 65,7519 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\frac{B}{ml^3}} = \begin{pmatrix} 73,7415 \\ 353,0918 \\ 852,7915 \end{pmatrix} [s^{-1}], S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2,9040 & 0,8862 & -0,9128 \\ 5,0857 & -1,4947 & 0,5598 \end{pmatrix}.$$

Na slici 12 prikazano je oscilovanje vrha dizalice u trenutku puštanja tereta u intervalu od 1 s.

Za razliku od predhodnog metoda, kod metoda konačnog elementa i metoda krutog tela, pored linijskog pomeranja tačaka, uzimaju se i ugaona pomeranja tačaka. Na slici 13 prikazano je oscilovanje vrha dizalice u trenutku puštanja tereta u intervalu 1 s dobijeno metodom konačnih elemenata.



Slika 12



Slika 13

4. ZAKLJUČAK

Analiza rezultata dobijenih primenom metode krutih tela pokazala je da se ova metoda može uspešno primeniti za dinamiču analizu nosećih konstrukcija. Komparativna analiza oscilovanja vrha dizalice u trenutku puštanja tereta, sa metodom konačnih elemenata i klasičnom dinamičkom analizom konstrukcija pokazuje visoku podudarnost dobijenih rezultata a samim time i metode krutih tela.

Amplituda oscilovanja se u dobroj meri poklapa kod sve tri metode, kao i sa stvarnom izmerenom vrednošću. Primećuju su odstupanja u vrednostima frekventnog spektra kod ove tri metode, što se može opravdati time da su kod ovih metoda, iako su uzeta tri elementa, imamo različite brojeve stepeni slobode. Kod metode uticajnih koeficijena imamo najmanju tačnost jer ona samo uzima u obzir uzdužna pomeranja za razliku od druge dve metode koje uzimaju i ugaona pomeranja.

Ono što se može videti da sve tri metode imaju približne vrednosti prve tri ugaone učestanosti (naročito metoda konačnog elementa i metoda krutog tela), čime se opravdava usvojeni fizički model dizalice.

Acknowledgment

A part of this work is a contribution to the Ministry of Science and Technological Development of Serbia funded Project TR35038

5. LITERATURA

- [1] Rašković D.: TEORIJA OSCILACIJA, Naučna knjiga, Beograd 1965.
- [2] Rašković D.: MEHANIKA III DINAMIKA, Naučna knjiga, Beograd 1962.
- [3] David M. Trujillo: A Finite Element for Three Dimensional Rigid Body Dynamics, TRUCOMP Fountain Valley, CA 2009.
- [4] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The Finite Element Method Vol. 1 Basic Formulation and Linear Problems, McGraw-Hill Book Company, London, 4th edition, 1989.
- [5] Gašić M., Savković M., Bulatović R., Petrović R., Optimization of a pentagonal cross section of the truck crane boom using Lagrange's multipliers and differential evolution algorithm, *Meccanica*, Vol.46, No 4, pp. 845-853, ISSN 1572-9648.
- [6] Gašić M, Savković M, Bulatović R . Optimization of trapezoidal cross section of the truck crane boom by Lagrange's multipliers and by differential evolution algorithm (de). *Strojniški vestnik – Journal of Mechanical Engineering* 57(2011)4:304-312.
- [7] Savković, M., Gašić, M., Zdravković, N., Marković, G. Special Design Of Freight Elevator With Diagonal Guiding And Instantaneous Type Eccentric Safety Gear, The Seventh International Conference Heavy Machinery HM2011, ISBN 978-82631-58-3, p.p. 111: 116, Kraljevo-Vrnjačka Banja, 2011.

Summary:

The paper shows the procedure of cantilever crane dynamic analysis by using the rigid body method, whereby the structure discretization with three elements was carried out. The rigid body method results are compared with the finite element method results and results obtained through classical approach in structure oscillation. The frequency range and oscillation modes of the crane were obtained by all methods mentioned. It is shown that the significant results for designers can be achieved by a simple discretization procedure with minimum number of elements. All three methods gave approximately the same values for the first three angular frequencies, which are of most importance for carrying structures design process.

Key words: discretization, rigid body method, frequency range, oscillation modes, cantilever crane