



**УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ФАКУЛТЕТ ЗА МАШИНСТВО И ГРАЂЕВИНАРСТВО У
КРАЉЕВУ**

Владимир Стојановић

**ПЛАНИРАЊЕ ЕКСПЕРИМЕНТА ЗА РОБУСНУ
ИДЕНТИФИКАЦИЈУ ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА**

Докторска дисертација

Краљево, 2013 година

1. Аутор	
Име и презиме:	Владимир Стојановић
Датум и место рођења:	05.06.1983.године, Краљево
Садашње запослење:	Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву
2. Докторска дисертација	
Наслов:	Планирање експеримента за робусну идентификацију динамичких система
Број страница:	111
Број слика:	73
Број библиографских података:	89
Установа и место где је рад израђен:	Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву Универзитета у Крагујевцу
Научна област (УДК):	681.5.015
Ментор:	др Војислав Филиповић, ванредни професор
3. Оцена и одбрана	
Датум пријаве теме:	11.10.2010. године
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације	1016/4 од 16.11.2010. године 28/8 од 12.01.2011. године
Комисија за оцену подобности теме и кандидата:	<ol style="list-style-type: none"> 1. др Новак Недић, ред. проф. Машински факултет Краљево 2. др Зоран Бучевац, ред. проф. Машински факултет у Београду 3. др Војислав Филиповић, доц. Машински факултет Краљево
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:	<ol style="list-style-type: none"> 1. др Новак Недић, ред. проф., Председник Факултет за машинство и грађевинарство, Краљево 2. др Зоран Бучевац, ред. проф., Члан Машински факултет у Београду 3. др Зоран Рибар, ред. проф., Члан Машински факултет у Београду 4. др Драган Пршић, доц., Члан Факултет за машинство и грађевинарство, Краљево 5. др Војислав Филиповић, ван. проф, Ментор Факултет за машинство и грађевинарство, Краљево
Датум одбране дисертације:	

Захвалност

Постоји пуно људи који су ми помогли и водили ме ка успешном завршетку докторске дисертације због чега заслужују моју дубоку захвалност.

На почетку, желим да се искрено захвалим ментору проф. др Војиславу Филиповићу, на конструктивним разговорима и пруженим сугестијама током вођења ове дисертације. Поред тога, веома сам захвалан што ме је увео у теорију идентификације. Био је неисцрпан извор инспирација и идеја за мене.

Желим да изразим дубоку захвалност проф. др Новаку Недићу јер ми је на најбољи начин представио аутоматско управљање и увео ме у науку. Поред тога, бескрајно сам захвалан на пуној посвећености мом напредовању, која је присутна од првог нашег сусрета на смеру за аутоматско управљање и флуидну технику.

Такође се захваљујем проф. др Драгану Пршићу. Заиста ценим залагање и сваки сат који је проводио са мном у лабораторији за аутоматско управљање и флуидну технику. Без њега, експериментална верификација добијених резултата која је приказана у Поглављу 6, сигурно не би била могућа.

Желим да се захвалим проф. др Зорану Бучевцу и проф. др Зорану Рибару, на веома коректном односу при прегледу моје докторске дисертације.

Министарство Науке је кроз стипендију на докторским студијама у великој мери олакшало мој рад на тези и на тај начин заузима важно место у мом школовању. Такође, не могу заборавити ни стипендије Министарства Просвете, фонда Владе за младе таленте, Универзитета у Крагујевцу као и Града Краљева које су ми пружале финансијску подршку на основим студијама.

На крају, огромну захвалност дугујем мајци и оцу за сву пружену љубав, бригу и неопходну подршку.

Владимир Стојановић, дипл. маш. инж.
Краљево, Август 2013.

Резиме

Применом принципа црне кутије и теорија вероватноће, стохастичких процеса и математичке статистике, уз коришћење улазно/излазних мерења разматра се могућност добијања математичких модела. Оквири за добијање модела су општи јер се претпоставља да су стохастички поремећаји негаусови. Такав модел је предуслов за пројектовање широке класе индустријских регулатора.

Теорија планирања експеримента има важну улогу у повећању брзине конвергенције рекурзивних алгоритама као и у скраћењу времена идентификације. Повећана брзина конвергенције алгоритама чини их веома повољним за практичну примену. Улазни сигнали за идентификацију креирају се преко рекурзивне релације за аутоковаријациону функцију. Синтеза аутоковаријационе функције заснована је на идејама из предиктивног управљања, при чему управљачки сигнал има коначан алфабет.

Практична истраживања показују да поремећај, у општем случају, има негаусову расподелу. Посебно је важан случај када се појаве опсервације које су неконзистентне у односу на главнину популације, аутлајери (outliers). Расподеле вероватноће за тај случај су приближно нормалне (\mathcal{E} -контаминирани) и предмет су интензивног проучавања у математичкој статистици. За такав случај се предлажу робусни алгоритми идентификације, при чему робусност има статистички карактер.

Разматра се примена робусног Калмановог филтра у идентификацији модела заснованих на грешци излаза. Робусни проширени Калманов филтар се користи за идентификацију опште форме нелинеарног модела у простору стања. Идентификација процеса описаних општим моделом (непознати параметри и стања процеса) захтева увођење проширеног Масрељез-Мартиновог филтра. Увођењем предложених хеуристичких модификација повећава се флексибилност, у смислу практичне примене као и брзине конвергенције робусног филтра.

Приказана је надмоћност предложених робусних алгоритама у идентификацији система са временски променљивим параметрима, који засновани на ОЕ класи модела. Практични аспект добијених резултата потврђен је кроз експеримент на пнеуматском цилиндру који се налази у лабораторији центра за Аутоматско управљање и флуидну технику Факултета за машинство и грађевинарство у Краљеву.

Abstract

By applying the principles of black boxes and probability theory, stochastic processes and mathematical statistics, with the use of input / output measurements, the possibility of obtaining mathematical models is considered. Frames for obtaining the model are general because it is assumed that the stochastic disturbances are non-Gaussian. Such a model is a prerequisite for the design of wide range of industrial controllers.

The theory of experiment design plays an important role in increasing the speed of convergence of recursive algorithms as well as shortening the time of identification. Increased speed of convergence of algorithms makes them very favorable for practical application. The input signals for identification are created through the recursive relation for autocovariance. Design of autocovariance is based on the idea of predictive control, where the control signal has a finite alphabet.

Practical studies show that disturbances, in general, have non-Gaussian distribution. Particularly important is the case when there are observations that are inconsistent with respect to the majority of population (outliers). Probability distribution for this case is approximately normal (\mathcal{E} -contaminated) and is the subject of intensive study in mathematical statistics. In such case, the robust algorithms for identification, where robustness has a statistical nature, are proposed.

It is considered the application of robust Kalman filter in identification of output error model. Robust extended Kalman filter is used for identification of the general form of the nonlinear state-space model. Identification of the processes described by general model (the unknown parameters and states of the process) requires the introduction of extended Masreliez-Martin's filter. By introducing of the proposed heuristic modification increases the flexibility in terms of practical application and the speed of convergence of the robust filter.

The superiority of the proposed robust algorithms for system identification with time-varying parameters, which are based on OE models, has been shown. The practical aspects of the results have been confirmed by experiment on a pneumatic cylinder, which is located in the laboratory of the centre for automatic control and fluid technique of The Faculty of Mechanical and Civil Engineering in Kraljevo.

Садржај

Ознаке.....	3
Скраћенице.....	7
1 Увод.....	8
1.1 Идентификација система	8
1.2 Планирање експеримента	11
1.3 Робусна идентификација.....	12
1.4 Структура тезе по поглављима.....	15
2 Доприноси у подручју истраживања.....	17
2.1 Преглед резултата у области планирања експеримента	17
2.2 Преглед резултата у области робусне идентификације.....	18
2.3 Главни доприноси тезе.....	19
3 Планирање експеримента	21
3.1 Генерисање бинарних сигнала са задатом аутоковаријансом.....	21
3.1.1 Алгоритам.....	22
3.2 Планирање експеримента у затвореној повратној спрези	25
3.2.1 Дефинисање модела.....	25
3.2.2 Синтеза оптималног алгоритма	26
3.2.3 Адаптивна синтеза улазних сигнала	33
3.2.4 Резултати симулација	36
4 Робусна идентификација стохастичких линеарних система.....	42
4.1 Робусни Калманов филтар као естиматор параметара	42
4.2 Резултати симулација.....	49
5 Робусна идентификација стохастичких нелинеарних система.....	57
5.1 Модификовани проширени Масрељез-Мартинов филтар	57
5.1.1 Резултати симулација	61

5.2 Алгоритам естимације параметара и стања	66
5.2.1 Резултати симулација	71
6 Робусна идентификација пнеуматског цилиндра.....	81
6.1 Математички модел пнеуматског сервосистема	81
6.1.1 Једначина равнотеже сила на клипу цилиндра	82
6.1.2 Пнеуматски цилиндар као стохастички систем	84
6.2 Робусни алгоритам идентификације за системе променљивим параметрима	85
6.3 Експериментални резултати	89
6.4 Додатак	95
6.4.1 Алгоритми за идентификацију система са променљивим параметрима.....	95
6.4.2 Алгоритам за генрисање бинарних сигнала са задатом аутоковаријансом	101
7 Закључак и предлози за наставак истраживања	103
7.1 Закључак.....	103
7.2 Предлози за наставак истраживања.....	104
Литература	106

Ознаке

Ознака	Опис
\mathbb{N}	Скуп природних бројева
\mathbb{Z}	Скуп целих бројева
\mathbb{R}	Скуп реалних бројева
\mathbb{C}	Скуп комплексних бројева
j	Имагинарна јединица, $j = \sqrt{-1}$
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$A \subseteq B$	Скуп A је подскуп скупа B
X^T	Транспоноване матрице X
X^*	Коњуговано комплексно транспоноване матрице X
$ x $	Апсолутна вредност броја x
$\ X\ $	Еуклидска норма вектора X
$\det(X)$	Детерминанта матрице X
$tr(X)$	Траг матрице X
$\lambda_{\max}(X)$	Највећа сопствена вредност матрице X

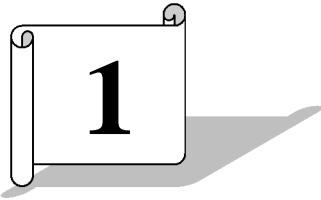
$X > 0$	Позитивно дефинитна матрица
$X \geq 0$	Позитивно полудефинитна матрица
I_n	Јединична матрица реда n
$O_{n,m}$	Нула матрица реда $n \times m$
$E\{\cdot\}$	Оператор математичког очекивања
$E_{\cdot \cdot}\{\cdot\}$	Оператор условног математичког очекивања
$r(\tau)$	Аутоковаријациона функција
ω	Кружна учестаност
$\Phi_u(\omega)$	Спектар снаге улазног сигнала
s_t	Генерисани бинарни сигнал
$\text{sgn}(x)$	Сигнум функција
$\arg \max f(x)$	Аргумент који минимизира функцију $f(x)$
σ^2	Варијанса случајног сигнала
ε	Степен контаминације
$\mathcal{N}(\cdot)$	Нормална класа расподеле
q^{-i}	Оператор померања уназад, $q^{-i}u(k) = u(k-i)$
$G(q)$	Дискретно временски преносни оператор
$u(k)$	Улаз система у k – том тренутку времена
$y(k)$	Излаз система у k – том тренутку времена
a_j, b_j	Параметри ОЕ модела, ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$)

Y	Вектор излаза, $Y = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N)]^T$
N	Број улазних / излазних података
$e(k)$	Поремећај излаза у k – том тренутку времена
$p(\cdot)$	Функција густине вероватноће случајне променљиве
$w(k)$	Поремећај система у k – том тренутку времена
$\hat{y}(k k-1)$	Предикција излаза у k – том тренутку времена заснована на прошлим мерењима
$\varepsilon(k)$	Грешка предикције, $\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k)$
$v(k)$	Трансформисани резидуал, $v(k) = T(k)\varepsilon(k)$
$T(k)$	Трансформација грешке предикције
$\rho(\cdot)$	Функција губитка
$\psi(\cdot)$	Функција утицаја, $\psi(\cdot) = \rho'(\cdot)$
$\varphi(k)$	Вектор мерења или регресије
θ	Вектор параметара система
β	Проширени вектор параметара, $\beta = [\theta \ \sigma^2]^T$
$\hat{\theta}$	Предикција вектора параметара
P	Асимптотска коваријациона матрица
$P(k k-1)$	Априорна коваријациона матрица
$P(k k)$	Апостериорна коваријациона матрица
M	Фишера матрица информација, $M = P^{-1}$
\overline{M}	Усредњена Фишера матрица информација, $\overline{M} = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/N(M)$

$\tau(t)$	Варијација температуре
$C_d(t)$	Коефицијент пражњења вентила
\dot{m}_i	Масени проток цурења између комора цилиндра
\dot{m}_i	Масени проток кроз i – ти отвор
$\alpha(t)$	Топлотни коефицијент
$\beta(t)$	Неодређени гранични параметар
p_s, p_i, p_0	Притисци: напојни, у i – тој комори цилиндра, атмосферски
m	Маса клипа и оптерећења
β_e	Коефицијент вискозног трења
k_e	Коефицијент еластичности
A_i	Ефективна површина, i – те стране клипа

Скраћенице

FIR	Коначно импулсни одзив
ARX	Ауторегресивни модел са егзогеним улазом
ARMAX	Ауторегресивни модел са помичном средином и егзогеним улазом
BJ	Box–Jenkins-ов модел
PE	Метод грешке предикције
OE	Метод грешке излаза
LS	Најмањи квадрати
RLS	Робусни најмањи квадрати
WLS	Тежински најмањи квадрати
RWLS	Робусни тежински најмањи квадрати
ML	Максимална веродостојност
KYP	Kalman-Yakubovich-Popov лема
LMI	Линеарна матрична неједнакост
MIMO	Систем са више улаза и више излаза
SISO	Систем са једним улазом и једним излазом
PRBS	Псеудо случајна бинарна поворка сигнала
MPC	Предиктивно управљање засновано на моделу
с.в.1	Са вероватноћом 1



Увод

1.1 Идентификација система

Математички модели реалних система су основа у свим научним областима и инжењерским применама. Математички модел је од нарочите важности за аутоматско управљање, где је циљ да се на бази модела пројектује регулатор који ће приморати динамички систем да се понаша на жељени начин. Обично се математички модели конструишу на основу фундаменталних закона науке. Међутим, у случају када нема довољно априорног знања о систему, или када такво моделирање захтева сувише велики утрошак времена, модел система се може идентификовати на основу експерименталних података.

Сходно томе, постоје два основна приступа дефинисања математичких модела:

- 1) **Физичко моделовање** или принцип беле кутије (White Box), где се процес се моделује на основу фундаменталних закона науке. Овај принцип је ограничен на просте случајеве (процесе).
- 2) **Идентификација система** или принцип црне кутије (Black Box), претпоставља да се модел процеса може описати одређеном математичком структуром и на основу коначног броја улазно/излазних мерења и примене статистичких техника одређују се одговарајући параметри за изабрану структуру.

Поред наведених основних принципа, постоји и хибридни приступ који представља комбинацију два основна приступа. Полу-физичко моделирање или принцип сиве кутије (Grey Box) је у основи покушај да се угради априорно знање о процесу у алгоритам идентификације. Проблем је нетривијалан.

У тези ће се разматрати идентификација система. При идентификацији система не интересује нас детаљно разумевање тачног система. Идентификацијом система долази се до разумне математичке апроксимације тачног система која се користи за пројектовање регулатора, симулацију или предикцију понашања система. Овај задатак подразумева компромис између прецизности и сложености. На пример, за регулисање индустријских процеса, често је довољно добити простији модел нижег реда. Док је за потребе детаљног увида у физички систем потребно добити сложенији и софистициранији модел.

Процедура конструкције модела, коришћењем идентификације система, састоји се од неколико фаза:

- Планирање експеримента
- Прикупљање података

- Избор структуре модела
- Процена параметара модела
- Провера тачности добијеног модела

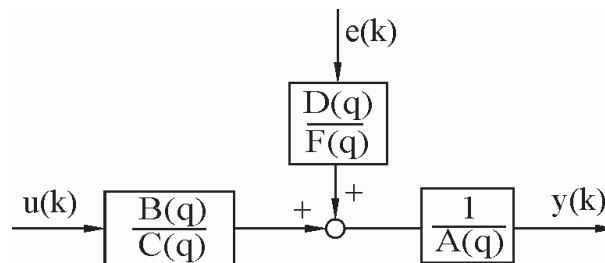
Општа форма линеарне структуре модела у временском домену гласи:

$$A(q)y(k) = \frac{B(q)}{C(q)}u(k) + \frac{D(q)}{F(q)}e(k) \quad (1.1)$$

при чему су $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ и $F(q)$ преносни полиноми док q^{-i} представља оператор померања уназад, тј. $q^{-i}x(k) = x(k-i)$, и то:

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q) &= b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} \\ D(q) &= 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_d} q^{-n_d} \\ F(q) &= 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f} \end{aligned} \quad (1.2)$$

У општој структури (1.1) улаз система је означен са $u(k)$, $y(k)$ представља одговарајући излаз, док $e(k)$ дефинише поремећај (шум).



Слика 1.1 Општа линеарна структура модела

У зависности од начина на који се моделира поремећај, структуре модела се могу сврстати у две групе: структуре засноване на грешци једначине (equation error или скраћено ЕЕ) и структуре засноване на грешци излаза (output error или скраћено ОЕ). Код структура модела засноване на грешци излаза, модел процеса и модел поремећаја не садрже заједничке параметре, што условљава да се могу независно параметризовати. Структуре модела засноване на грешци једначине претпостављају да и процес и поремећај имају исту динамику. Јасно је да ова претпоставка није реална.

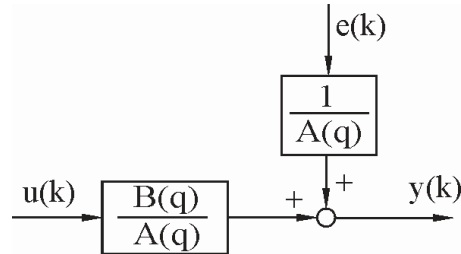
Предикција излаза се код ARX модела, који припадају структури грешке једначине, може записати на следећи начин:

$$\hat{y}(k) = \hat{\theta}^T(k)\phi(k), \quad (1.3)$$

где су вектор процене параметара и вектор мерења:

$$\hat{\theta}(k) = [\hat{a}_1 \quad \dots \quad \hat{a}_{n_a} \quad \hat{b}_1 \quad \dots \quad \hat{b}_{n_b}]^T, \quad (1.4)$$

$$\phi(k) = [y(k-1) \quad \dots \quad y(k-n_a) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-n_b)]^T. \quad (1.5)$$



Слика 1.2 ARX модел (модел типа грешке једначине)

У случају да се претпостави да се поремећај не моделира, модел система може да се представи као модел грешке излаза:

$$y(k) = \frac{B(q)}{C(q)} + e(k), \quad (1.6)$$

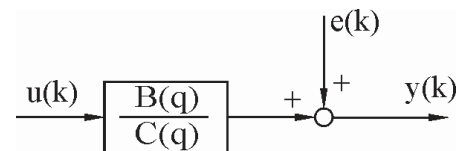
па ће одговарајући предиктор грешке излаза бити:

$$\hat{y}(k) = \hat{\theta}^T(k) \phi(k), \quad (1.7)$$

где су вектор процене параметара и вектор мерења

$$\hat{\theta}(k) = [\hat{c}_1 \quad \dots \quad \hat{c}_{n_c} \quad \hat{b}_1 \quad \dots \quad \hat{b}_{n_b}]^T, \quad (1.8)$$

$$\phi(k) = [\hat{y}(k-1) \quad \dots \quad \hat{y}(k-n_c) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-n_b)]^T. \quad (1.9)$$



Слика 1.3 Модел типа грешке излаза

У тези ће се разматрати алгоритми идентификације који су засновани на ОЕ моделима. Разлика у односу на предиктор коришћен у алгоритмима типа грешке предикције, огледа се у замени излаза система $y(k)$ са предикцијом излаза $\hat{y}(k)$ у вектору мерења (видети релације (1.5) и (1.9)).

Алгоритми идентификације који су засновани на структури грешке излаза боље одбацују утицај поремећаја (имају боље перформансе). Ово може бити објашњено чињеницом да излаз предиктора заснованог на грешци излаза не зависи директно од излазних величина система који су поремећени шумом већ индиректно, посредством адаптационог алгоритма. Како време одмиче, употребом опадајућег адаптационог појачања, ова зависност се смањује.

1.2 Планирање експеримента

Важно место у тези заузима прва фаза идентификације система – планирање експеримента. Постоје многи аспекти које треба узети у обзир при планирању експеримента за идентификацију неког система. Пројектовање оптималног улазног сигнала је једно важно питање. Теорија идентификације је заснована на претпоставци да мерења на излазу система носе информацију о процесу који се у систему одвија. Иако је ова претпоставка несумњиво тачна, поставља се питање да ли је та информација довољно богата да би се сагледало комплетно понашање система и на основу које би се одредио адекватан модел. Конкретно, циљ је пројектовати улазни сигнал који максимизира количину информације која је добијена из експеримента, будући да је прави систем априорно непознат. У тези ће бити разматрани оптимални улазни сигнали који ће се користити за идентификацију како линеарних тако и нелинеарних система.

Проблем планирања експеримента се у општем случају може дефинисати као одређивање минимума неке скаларне функције инверзне асимптотске коваријационе матрице P^{-1} , уз ограничења улазне и/или излазне снаге. Примери обично коришћених критеријума су:

$$\begin{aligned}
 A - \text{оптимални критеријум} &: \quad tr(P^{-1}) \\
 E - \text{оптимални критеријум} &: \quad \lambda_{\max}(P^{-1}) \\
 D - \text{оптимални критеријум} &: \quad \det(P^{-1}) \\
 L - \text{оптимални критеријум} &: \quad tr(WP^{-1})
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Могуће је разматрати проблем планирања експеримента како у временском тако и у фреквентном домену. У временском домену проблем се своди на нелинеарни проблем оптималног управљања са N слободних променљивих (број променљивих је једнак дужини низа одабирака). Комплексност је био један од разлога који је мотивисао истраживаче да покушају дефинисати улазни сигнал у фреквентном домену. Под претпоставком да је велики број одабирака и ограничавајући се на класу улаза који имају спектралну репрезентацију, могу се добити прикладни изрази за инверзну асимптотску коваријациону матрицу, P^{-1} . Штавише, планирање експеримента у фреквентном домену обезбеђује лакше представљање резултата.

Дакле, сви проблеми планирања експеримента могу бити формулисани као оптимизациони проблем који укључује нека **ограничења квалитета модела** као и **ограничења сигнала**. Квалитативна ограничења су обично функција асимптотске коваријационе матрице P , па је природније користити улазни спектар $\Phi_u(\omega)$ за променљиву величину оптималног улаза. Ограничења сигнала морају бити укључена да би се добио добро постављен проблем. Један од практичних проблема са којима се инжењери сусрећу је ограниченост капацитета актуатора. Поред тога, неке сигнале је тешко мерити па је ограничено добијање временске серије података. Дефинисањем ограничења улазних сигнала избегава се коришћење бесконачне улазне снаге.

Општа формулација планирања експеримента у свом првобитном облику је нерешива из више разлога:

- Ограничења су обично неконвексна и такви оптимизациони проблеми могу бити тешки за решавање

- Ограничења у многим случајевима су бесконачно димензионална, што позива на посебну пажњу при преузимању поступка оптимизације
- Такође се јавља проблем проналажења реализације улазног сигнала који има жељене спектралне особине. Овај проблем се назива факторизација улазног спектра. Дакле, употребљен алгоритам пројектовања улаза мора садржати и други корак који извршава факторизацију улазног спектра.
- Асимптотска коваријациона матрица обично зависи од тачних вредности параметара $P = P(\theta)$, који су непознати.

Помоћу спектра улазног сигнала може се утицати на квалитет модела. Највише пажње се посвећује P^{-1} , која се назива Фишера матрица информација. То је зато што се P^{-1} може обликовати уз помоћ улазног сигнала u , односно улазног спектра $\Phi_u(\omega)$. Кључни алат у пројектовању улазног сигнала је увођење коначно димензионалне параметризације спектра (нпр. сума синусоида). На тај начин прве три потешкоће пројектовања оптималног улаза се могу превазићи.

Чињеница да оптимално решење зависи од карактера система који се идентификује је Ахилова пета у пројектовању оптималног улаза. У реалним применама, ова чињеница се мора превазићи. Генерално, постоје две стратегије пројектовања побудног сигнала. Прва стратегија је ad-hoc решење, тј. коришћење неке стандардне перзистентне побуде, нпр. бели шум или псеудо случајни бинарни сигнал (PRBS). Друга стратегија је адаптивно пројектовање улазног сигнала из два дела. У првом делу је примењена нека стандардна побуда која служи за идентификацију почетне процене параметара система, која ће заменити тачне вредности које су непознате. Други део сачињава оптимални улаз који се сада може добити на основу познате процене параметара система. У овој тези је коришћена последња стратегија за креирање улазног сигнала. Пошто процес моделовања може бити веома дуготрајан, употреба оптималних улазних сигнала ће омогућити да се време трајања експеримента редукује као и да се смањи ниво улазне побуде.

1.3 Робусна идентификација

У општем случају, проблем рекурзивне идентификације састоји се проналажењу процена параметара система $\hat{\theta}$, минимизирањем критеријума перформанси, [2]:

$$\mathfrak{J}(\hat{\theta}) = E\{\varepsilon^2(k, \hat{\theta})\}, \quad \varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k), \quad (1.11)$$

при чему грешка предикције (резидуал) $\varepsilon(k, \hat{\theta})$ представља разлику излаза система $y(k)$ и излаза модела $\hat{y}(k)$, док $E\{\cdot\}$ означава оператор математичког очекивања.

Уколико поремећаји имају нормалну расподелу, алгоритам идентификације који је заснован овом критеријуму, је оптималан у смислу минималне варијансе грешке предикције $\varepsilon(k)$, [2]. Међутим, реални мерни подаци различите физичке природе, по правилу увек садрже неконзистентне опсервације у односу на главнину популације мерења, ткз. аутлајере (outliers), [12-14, 16]. Дакле, стохастички поремећај представља реализацију класе ε -контаминираних Гаусове расподеле (или класе приближно нормалних расподела), [11-13]:

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \{p(e) : p(e) = (1-\varepsilon)p_N(e) + \varepsilon q(e)\}, \quad (1.12)$$

при чему је

$$p_N(e) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad q(e) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_q^2), \quad \sigma_q^2 \gg \sigma^2. \quad (1.13)$$

где $p_N(e) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ означава нормалну функцију густине вероватноће са нултом средином и варијансом σ^2 , док $q(e)$ уобичајено представља нормалну функцију густине вероватноће са нултом средином и варијансом σ_q^2 која је знатно већа од номиналне варијансе, $\sigma_q^2 \gg \sigma^2$. Параметар $0 \leq \varepsilon < 1$ се зове степен контаминације. Ако је $\varepsilon = 0$ тада је густина вероватноће потпуно позната. У случају потпуног одсуства информације о густини вероватноће, узима се да је $\varepsilon = 1$.

Пошто критеријум идентификације (1.11) даје исту тежину свим резидуалима, те спорадичне опсервације великог интензитета имаће значајан утицај на резултујуће процене параметара. Ефикасан начин за постизање робусности, у смислу смањења утицаја ових несагласних опсервација, је модификација квадратног критеријума (1.11). Дакле, појам робусности означава способност да спорадичне реализације поремећаја великог интензитета резултирају малим променама процене параметара. У општем случају, разматра се робусни М – критеријум естимација, [13,16]:

$$\mathfrak{S}(\hat{\theta}) = E \left\{ \rho \left[\varepsilon(k, \hat{\theta}) \right] \right\}, \quad (1.14)$$

где $\rho(\cdot)$ представља нелинеарну функцију губитка (loss function), која треба “угушити” нежељене опсервације.

Из релације (1.14) произилази да је за дефинисање критеријума идентификације кључан избор функције $\rho(\cdot)$. Прва претпоставка је да је функција $\rho(\cdot)$ парна тј.

$$\rho \left[\varepsilon(k, \hat{\theta}) \right] = \rho \left[-\varepsilon(k, \hat{\theta}) \right]. \quad (1.15)$$

Софистицирана анализа показује да је, [13,19]:

$$\rho \left[\varepsilon(k, \hat{\theta}) \right] = -\ln p(e(k)) \Big|_{e(k)=\varepsilon(k, \hat{\theta})}, \quad (1.16)$$

при чему је $p(e(k))$ позната густина вероватноће поремећаја $e(k)$.

Претпоставка о тачном познавању расподеле поремећаја у пракси није испуњена. Много је реалнија претпоставка да је позната класа расподела којима поремећај припада. Сваком нивоу априорне информације о поремећају одговара одређена класа расподеле вероватноће \mathcal{P} . На класи расподела функција губитака се одређује за најнеповољнији случај. Из теорије игара за асимптотску коваријациону матрицу важи:

$$V(p_0) \leq V(p^*, p_0) \leq V(p^*), \quad (1.17)$$

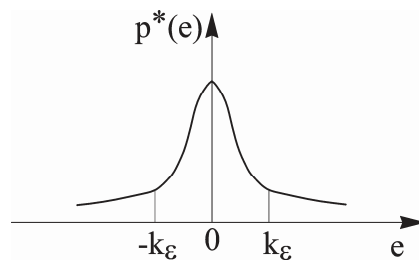
при чему је p_0 произвољна вероватноћа из класе расподела \mathcal{P} . Најнеповољнија густина вероватноће се одређује према:

$$p^*(e) = \arg \max_{p \in \mathcal{P}} V(p_0). \quad (1.18)$$

Нетривијалним поступком се показује да је најнеповољнија густина вероватноће за класу приближно нормалних расподела, [17-19]:

$$p^*(e) = \begin{cases} \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{e^2}{2}\right), & |e| \leq k_\varepsilon \\ \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-k_\varepsilon |e| + \frac{k_\varepsilon^2}{2}\right), & |e| > k_\varepsilon \end{cases} \quad (1.19)$$

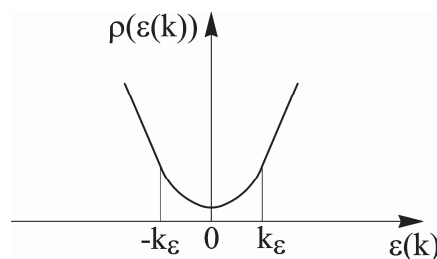
где је k_ε подесиви параметар који треба да обезбеди жељену ефикасност при номиналном поремећају.



Слика 1.4 Најнеповољнија густина вероватноће на класи приближно нормалних расподела

Аналитичка форма Хуберове функције губитака је

$$\rho(\varepsilon(k)) = \begin{cases} \frac{\varepsilon(k)^2}{2} + \ln \frac{\sqrt{2\pi}}{1-\varepsilon}, & |\varepsilon(k)| \leq k_\varepsilon \\ k_\varepsilon |\varepsilon(k)| - \frac{k_\varepsilon^2}{2} + \ln \frac{\sqrt{2\pi}}{1-\varepsilon}, & |\varepsilon(k)| > k_\varepsilon \end{cases} \quad (1.20)$$

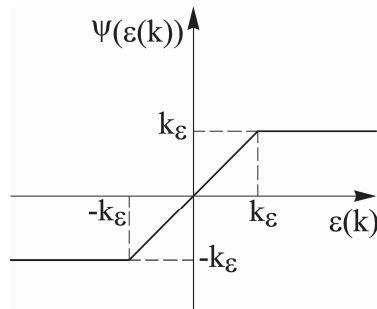


Слика 1.5 Хуберова функција губитка

Из практичних разлога, пожељно је да извод функције губитка $\psi(\cdot) = \rho'(\cdot)$, који се у статистичкој литератури назива функција утицаја (influence function), буде ограничен и непрекидан, [12-13]. Наиме, главни циљ у робусној идентификацији је да се елиминише утицај спорадичних реализација поремећаја великог интензитета које су несагласне са главнином популације мерења. Избором ограничене функције $\psi(\cdot)$ обезбеђује се да ниједна самостална несагласна опсервација нема значајан утицај у процесу идентификације. Додатним условом да функција $\psi(\cdot)$ буде и непрекидна обезбеђује се да груписане неконзистентне опсервације немају доминантан утицај на квалитет естимације. Такође,

нелинеарна функција $\psi(\cdot)$ треба да буде линеарна за податке који нису контаминирани, пошто на регуларним мерењима робусни алгоритам треба да се понаша као линеарни алгоритам најмањих квадрата. Извод Хуберове функције губитка се записује на следећи начин:

$$\psi(\varepsilon(k)) = \min\{|\varepsilon(k)|, k_\varepsilon\} \operatorname{sgn}(\varepsilon(k)). \quad (1.21)$$



Слика 1.6 Извод Хуберове функције губитака

Треба напоменути да у рекурзивним алгоритмима негаусови поремећаји уносе нелинеарну трансформацију грешке предикције која има форму $\psi(\cdot)$. Последица коришћења Хуберове функције утицаја $\psi(\cdot)$ је додељивање мањих тежина малом броју великих резидуала, тако да аутлајери неће у великој мери утицати на коначну процену, као и додељивање јединичних тежина главном делу популације мерења са умереним резидуалима. Остале функције $\psi(\cdot)$ које се уобичајено користе у робусној статистици могу се видети у [15-16].

1.4 Структура тезе по поглављима

У Поглављу 2 дат је преглед истраживачких резултата везан за планирање експеримента и робусну идентификацију динамичких система.

Први део Поглавља 3 се односи на формирање алгоритма за генерисање бинарних сигнала на бази аутоковаријационе функције шума “ $1/f$ ” ограниченог опсега, који је заснован на идејама предиктивног управљања. Алгоритам за генерисање бинарних сигнала, који је предложен у [30] уопштен је да може да генерише бинарне сигнале са произвољном очекиваном вредношћу (не мора бити 0). У другом делу овог поглавља је разматрана идентификација ОЕ (output error) модела за случај да постоји ограничење варијансе излазног сигнала. Показано је, у форми теореме, да се оптимални улазни сигнал, уз ограничења на излаз, добија применом регулатора минималне варијансе и стохастичке референце. Предложена је адаптивна двостепена процедура за генерисање улазног сигнала за идентификацију динамичких система.

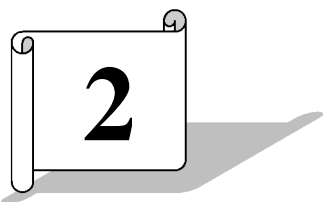
Основни фокус Поглавља 4 представља формирање алгоритма идентификације линеарних стохастичких система у присуству негаусових шумова. Као природни оквир за решавање ових проблема узет је Масрелез-Мартинов (Masreliez-Martin) филтар, који има малу осетљивост на присуство аутлајера у поређењу са стандардним Калмановим филтром (Kalman filter). Посматра се случај када шум процеса има Гаусову расподелу, а шум мерења негаусову расподелу. Промена параметара система описана је методом случајног корака у којој је одговарајући шум моделиран као Гаусов стохастички процес. Уведене хеуристичке

модификације повећавају флексибилност, у смислу практичне примене робусног Калмановог филтра.

Поглавље 5 има за циљ да представи робусни алгоритам за упоредну естимацију стања и параметара стохастичких нелинеарних система у присуству негаусових шума. У првом делу овог поглавља, формулисан је проширени Масрељез-Мартинов филтар за естимацију стања стохастичких нелинеарних система. На сличан начин, као у случају Масрељез-Мартиновог филтра, извршене су хеуристичке модификације које значајно повећавају практичну употребљивост филтра. У другом делу овог поглавља претходно добијени робусни алгоритам је узет као основа за формирање робусног алгоритма за упоредну процену стања и параметара нелинеарних стохастичких система. Промена параметара система описана је методом случајног корака у којој је одговарајући шум моделиран као Гаусов стохастички процес. Посматра се случај када шум процеса има Гаусову расподелу, а шум мерења негаусову расподелу.

Надмоћност предложених робусних алгоритама у идентификацији временски променљивих параметара приказана је у Поглављу 6. Практични аспекти добијених резултата потврђени су кроз експеримент на пнеуматском цилиндру који се налази у лабораторији Центра за аутоматско управљање и флуидну технику, Факултета за машинство и грађевинарство у Краљеву.

Закључак је изложен у Поглављу 7. У оквиру закључних разматрања, дати су предлози за наставак научноистраживачког рада на овим проблемима. Изложени предлози будућег истраживања представљају директно проширење презентованих резултата као и нове изазове.



Доприноси у подручју истраживања

Кључни проблем у синтези рекурзивних алгоритама идентификације јесте повећање брзине конвергенције алгоритама. Један од начина да се то постигне јесте примена математичке теорије планирања експеримента. Посебно важан случај је када се појаве опсервације које су неконзистентне са већином популације опсервација (аутлајери), чије присуство значајно деградира перформансе линеарних рекурзивних алгоритама. За такав случај се користе робусни алгоритми идентификације, при чему робусност има статистички карактер.

У овом поглављу су изложени главни доприноси ових истраживања заједно са главним доприносима тезе и проистеклим публикацијама.

2.1 Преглед резултата у области планирања експеримента

Пројектовање регулатора је добрим делом засновано на коришћењу математичких модела који се добијају у поступку идентификације система, [1-5]. Главни задатак теорије идентификације је извлачење максималне информације из мерења која су на располагању. Тај захтев се реализује синтезом оптималног експеримента, [24-28]. Основни приступ састоји се у минимизацији скаларне функције Фишерове информационе матрице.

Важан допринос истраживања, који су дали Мехра (Mehra) [24-25], Гудвин (Goodwin) и Пејн (Payne) [27], Зароп (Zarop) [28], био је да се пронађе скуп коначно параметризованих улаза који параметризују све доступне информационе матрице, P^{-1} . Mehra [24-25] је показао да се при ограниченој улазној снази, свака доступна информациона матрица може добити коришћењем коначне суме синусоида, која не садржи више од $p(p+1)/2+1$ компонената, где је број процењиваних параметара означен са p . Код D – оптималног критеријума, $J = -\log \det(\overline{M})$, оптимални улаз се састоји од максимално $p(p+1)/2$ синусоида, [27].

За линеарне системе са једним улазом и једним излазом, овај број синусоида се даље може редуковати искоришћењем структуре информационе матрице P^{-1} . Гудвин и Пејн [27] и Зароп [28] су показали да је за преносну функцију реда m која има $2m$ параметара довољно не више од $2m$ синусоида (једнак броју параметара).

Неке даље резултате је дао Зароп [28], где је уз геометријска разматрања заједно са теоријом Чебишевљевих (Tchebycheff) система, показао да је могуће смањити број захтеваних синусоида на m (једнак реду система). То је уједно и најмањи могући број синусоида који обезбеђује да информативна матрица буде регуларна, [2].

Учињен је напор да се унифицира приступ синтезе оптималног експеримента. Већина предложених процедура може бити формулисана са позиција конвексне оптимизације [38]. Бесконечно димензионална ограничења, која зависе од континуалне променљиве ω -угаоне фреквенције, могу се преформулисати као коначно димензионалне линеарне матричне неједнакости (LMI) користећи Калман-Јакубович-Попов (Kalman – Yakubovich – Popov или краће КЈР) лему, што дозвољава да се оптимални спектар нумерички рачуна. Основна поставка ове идеје је да се спектар апроксимује уз помоћ *FIR* филтра M -ог реда, [39-41]. Са оваквом параметризацијом ограничења се могу формулисати као коначно димензионални програм конвексне оптимизације, [49-51]. Важно је напоменути да у том подручју постоје врло ефикасни солвери, као што су CVX или YALMIP (за MATLAB окружење).

Кључни проблем у синтези оптималног улаза је то што оптимални улаз зависи од непознатих особина система које треба идентификовати. Наиме, ФишEROVA информациона матрица типично зависи од параметара система. Постоје два основна приступа за превазилажење овог проблема. Први приступ заснива се на робусној синтези оптималног експеримента. У том случају процедура је мало осетљива према неодређености априорних информација о систему [31-32]. Основна априорна знања о систему могу се добити коришћењем непараметарских фреквентних метода [33-34]. Нови резултати из овог подручја прекривају случај коначног броја параметара модела и врло великог броја мерења. Други приступ заснован је на адаптацији. Једна таква, двостепена процедура, предложена је у [35]. У првом кораку, у току кратког временског интервала, скупљају се подаци уз коришћење фиксног улаза. На основу тих података идентификује се модел система, који замењује реалан систем, у оптималној синтези улаза. У другом кораку добијени улазни сигнал се користи за генерисање новог скупа података. Адаптивна синтеза улазног сигнала за ARX моделе разматрана је у [36].

У многим практичним случајевима веома су важна ограничења на флукуацију улазних и/или излазних сигнала [21]. На пример, у индустријској производњи квалитет производа мора бити у одређеним границама (ограничења на флукуацију излазног сигнала).

При ограниченој улазној варијанси показано је да увек постоји Д-оптимално пројектовање у отвореној повратној спрези, [21, 37]. Експерименти у затвореној повратној спрези су оптимални када постоји ограничење снаге на излазу [20-22, 27, 29]. Ако је ограничење везано за варијансу излазног сигнала показује се да се улазни сигнал генерише коришћењем регулатора минималне варијансе и екстерног случајног сигнала, [21, 37]. За општи модел, регулатор минималне варијансе обезбеђује синтезу Д – оптималног експеримента за нови скуп параметара који су, преко једноставне трансформације у релацији са оригиналним параметрима.

2.2 Преглед резултата у области робусне идентификације

Робусни алгоритми идентификације, при чему је робусност статистичког карактера и односи се на девијацију усвојених претпоставки о статистичким карактеристикама поремећаја, предложени су у [76-78, 81-89]. Предложени линеарни алгоритми елиминишу утицај спорадичних великих реализација мерења и засновани су на методу грешке предикције (Prediction Error Method, или краће PEM). У општем случају, ови алгоритми минимизирају нелинеарни критеријум перформансе, који је у статистичкој литератури познат као робусни M - критеријум процене, [13]. Предложена процедура за избор

критеријумске функције заснива се на максимизацији Cramer – Rao доње међе за најнеповољнију расподелу у оквиру класе приближно нормалних расподела, која по претпоставци садржи реалну функцију расподеле вероватноће поремећаја. За сваку другу расподелу вероватноће, унутар дате класе расподела, асимптотска варијанса грешке естимације није већа него за случај најнеповољније функције расподеле вероватноће. Дакле, укупна асимптотска варијанса грешке естимације не прелази гарантовану границу у оквиру претпостављене класе расподеле поремећаја и класе алгоритама у усвојеној репрезентацији система. Показало се да је овако добијена критеријумска функција оптимална у смислу min-max укупне асимптотске варијансе грешке естимације.

2.3 Главни доприноси тезе

У референцама [6-10, 23, 73-74] разматрани су рекурзивни алгоритми идентификације и планирање експеримента засновани на грешци предикције и на претпоставци да стохастички поремећај има Гаусову расподелу.

Главни допринос тезе јесте синтеза рекурзивних алгоритама идентификације уз планирање експеримента за следећи случај који у литератури није разматран:

- Модели са грешком излаза (ОЕ модели)
- Поремећаји су негаусови при чему постоји априорна информација о класи расподеле којима поремећај припада. Применом стохастичке теорије игара одређује се најнеповољнија расподела на класи расподела за коју се врши синтеза робусног алгорита.

За генерисање улазних сигнала користи се метод генерисања коваријационе функције улаза. Добијање ове функције је реализовано применом теорије хибридних система управљања. У референци [30] улазни сигнал се генерише, независно од система, користећи идеје из предиктивног управљања заснованог на коначном улазном алфabetу. Генеришу се бинарни сигнали $\{-1, 1\}$ који имају особину да дају максималну енергију за дату амплитуду. У тези је изведен општији случај рекурзивног алгорита за генерисање улазних сигнала користећи наведене идеје. Наиме, изведена форма алгорита је проширена тако да може генерисати сигнале са очекиваном вредношћу која не мора бити нула, односно који су ограничени на произвољном интервалу $\{a, b\}$.

У тези је такође разматрана оптимална синтеза експеримента за ОЕ (output error) моделе када постоји ограничење на снагу излазног сигнала. У том случају, показано је за ARX модел да је врло важно присуство повратне спреге, [21, 27]. У тези су ти резултати, коришћењем Фишерове матрице, проширени на ОЕ модел. Показано је да се оптимални улазни сигнал добија преко регулатора минималне варијансе чија је референца бели шум са познатом варијансом. Да би се алгоритам могао реализовати примењен је адаптивни приступ. Алгоритам има два корака. У првом кораку се оцењују параметри процеса. У другом кораку, на основу тако добијених параметара, формира се регулатор минималне варијансе који генерише улазни сигнал процеса на основу којег се врши идентификација. Због референце у форми белог шума процена параметара је конзистентна (са вероватноћом 1 добијају се тачне вредности параметара). Резултати рада поткрепљени су симулацијама. Део резултата који се односи на планирање експеримента и генерисање улазних сигнала, је објављен у [52-54, 60].

Оправданост разматрања идентификације система у присуству негаусовог шума мерења потврђена је у пракси, [12]. Наиме, у мерењима постоје ретке, опсервације које су неконзистентне са већином популације опсервација (аутлајери) чије присуство може значајно деградирати перформансе линеарних рекурзивних алгоритама који су засновани на претпоставци да је шум мерења има Гаусову расподелу. Због тога је синтеза робусних алгоритама од примарног значаја, [55-58]. Синтеза је заснован на Хуберовој теорији робусних статистика, [13]. Робусност алгоритама се постиже увођењем нелинеарне трансформације грешке предикције (Хуберова функција).

У референци [55], Масрељез (Masreliez) и Мартин (Martin) за наведену ситуацију су предложили робусни Калманов филтар. Овај филтар има малу осетљивост на присуство аутлајера у поређењу са стандардним Калмановим филтром, изведеним за случај да шум процеса има Гаусову расподелу а шум мерења негаусову расподелу.

Оригинално предложени робусни Калманов филтер [55] укључује две величине које није лако одредити у практичним условима. Да би се повећала флексибилност у циљу практичне примене робусног Калмановог филтра у тези су извршене хеуристичке модификације. Ове хеуристичке модификације су потврђене интензивним симулацијама. Додатна бенефиција једне од предложених интервенција је повећање брзине конвергенције процене параметара. Разлог је повећање појачања робусног Калмановог филтра. Главни део резултата који се односи на робусни Калманов филтар, објављен је у [59-61].

Проширени Калманов филтар има изузетно широк опсег примене, не само за процену стања нелинеарног система у присуству шума процеса и мерења, већ и за истовремену процену параметара модела. Примена проширеног Калмановог филтра за естимацију параметара динамичких система има прилично дугу историју, па је и значајан број радова објављен на ову тему. Један од првих радова који се бави овим приступом је [62]. Анализа конвергенције проширеног Калмановог филтра као естиматора параметара линеарних система је разматрана у [63]. Штавише, проширени Калманов филтар је успешно примењен за естимацију параметара и стања нелинеарних стохастичких генетских регулаторних мрежа (gene regulatory networks) моделираних помоћу временских серија података (time series data) [64]. Коришћење проширеног Калмановог филтра за естимацију параметара и стања има широку примену у пракси [65-67].

У тези је разматрана примена проширеног Масрељез-Мартиновог филтра за заједничку естимацију параметара и стања у присуству неконзистентних опсервација при мерењу (аутлајера). Овај случај до сада није разматран у литератури. Уведена хеуристичка модификација повећава брзину конвергенције процене стања и параметара проширеног Масрељез-Мартиновог филтра. Бенефиције модификовано проширеног Масрељез-Мартиновог филтра илустроване су интензивним симулацијама.

Изведен је робусни алгоритам идентификације система са променљивим параметрима који припадају класи ОЕ модела. Практични аспект добијених резултата потврђен је кроз експеримент на пнеуматском цилиндру који се налази у лабораторији Центра за аутоматско управљање и флуидну технику, Факултета за машинство и грађевинарство у Краљеву. Примена робусног алгоритма заједно са примењеним побудним сигналом показала се као супериорна у односу на конвенционални линеарни алгоритам. Снимљени су упоредни одзиви система, модела добијеног применом линеарног алгоритма и модела добијеног робусним алгоритмом, одакле се јасно види да боље слагање са излазом реалног система има излаз модела добијен коришћењем предложеним робусним алгоритмом. Резултати који се односе на естимацију система са променљивим параметрима су повезани са следећим објављеним референцама [79-80].



Планирање експеримента

При синтези експеримента типично добијен оптимални улазни сигнал је одређен у зависности од аутоковаријационе функције (аутоковаријансе) или спектра улазног сигнала. Такође, при синтези експеримента је посебно важно применити улазни сигнал који у оквиру ограничења амплитуде има максималну снагу. Ово доводи до проблема реализације реалног сигнала са познатим спектралним карактеристикама. У том циљу је развијен алгоритам за решавање наведеног проблема који је заснован на коришћењу концепта помичног хоризонта (*receding horizon concept*) који се користи у предиктивном управљању.

Такође је разматрана идентификација ОЕ (*output error*) модела за случај да постоји ограничење варијансе излазног сигнала. Ограничење има веома важну улогу, у процесној индустрији, у редукцији деградације квалитета производа. Показано је, у форми теореме, да се оптимални улазни сигнал, уз ограничења на излаз, добија применом регулатора минималне варијансе и стохастичке референце. Кључни проблем је што оптимални улазни сигнал зависи од параметара система које треба идентификовати. Да би се превазишао проблем предложена је адаптивна двостепена процедура: добијање иницијалног модела коришћењем PRBS улаза; примена адаптивног регулатора минималне варијансе са стохастичком променљивом референцом за генерисање улазног сигнала за идентификацију система. Теоретски резултати илустровани су симулацијама.

3.1 Генерисање бинарних сигнала са задатом аутоковаријансом

При синтези експеримента типично добијен оптимални улазни сигнал је одређен у зависности од својих спектралних особина, [2, 25, 27-28]. Ово доводи до проблема реализације реалног сигнала са одређеном аутоковаријационом функцијом или спектром. Осим тога, уобичајено је да улаз такође буде ограничен у својој амплитуди, тј. амплитуда мора припадати неком интервалу. Такође, при синтези експеримента је посебно важно применити улазни сигнал који у оквиру свог ограничења амплитуде има максималну снагу, јер се по правилу квалитет оцене параметара повећава са повећањем односа улазни сигнал-шум. Ако се изабере сигнал са већом снагом, јасно је да се однос улазни сигнал-шум повећава. Ову жељену особину побудних сигнала имају бинарни сигнали, јер је њихова снага највећа при датом ограничењу амплитуде.

Да би се генерисао бинарни сигнал чија аутоковаријанса је што је могуће ближа некој жељеној аутоковаријанси, користе се идеје из предиктивног управљања заснованог на моделу процеса (*Model Predictive Control*), [30]. Развијен је прост поступак за решавање наведеног проблема који је заснован на коришћењу концепта помичног хоризонта (*receding horizon concept*) који се користи у предиктивном управљању. Хеуристички говорећи, идеја је да се реши, за сваки временски тренутак, оптимизациони проблем на коначном хоризонту у циљу налажења оптималне поставе следећих, рецимо T вредности низа да би тако

добијени пробни аутоковаријациони низ био близак, колико је то могуће (у прописаном смислу), жељеној аутоковаријанси. Из добијене оптималне поставе низа узима се само први члан, након чега се иде се на следећи корак и цео поступак се понавља. Према томе, идеја у позадини овог поступка је блиско повезана са управљањем на коначном помичном хоризонту, где се користи концепт помичног хоризонта за управљање линеарних објеката чији управљачки сигнал има коначан алфабет.

Алгоритам, који је представљен, је брз и лак за остваривање када се упореди са постојећим методама. Алгоритам може такође бити покренут у стварном времену, што оставља могућност извршавања адаптивних шема генерисања улаза, које могу бити корисне када се особине сигнала мењају у току времена, као у процедурама секвенцијалног планирања експеримента.

3.1.1 Алгоритам

Нека $\{r_k^d\}_{k=0}^{\infty}$ означава жељени аутоковаријациони низ, N дефинише дужину сигнала који се генерише, n представља број временских размака у $\{r_k^d\}_{k=0}^{\infty}$ који се пореде са одговарајућим временским размацима одабраног аутоковаријационог низа дизајнираног сигнала, док m представља дужину помичног хоризонта на којем се решава оптимизациони проблем. За детаље видети [30].

Најпре се изврши конверзија $\{r_k^d\}_{k=0}^{\infty}$ жељеног аутоковаријационог низа у нецентрални низ $\{0,1\}$. Та веза се дефинише:

$$\hat{r}_k^d \triangleq \frac{1}{(a-b)^2} (\hat{r}_k^d - ab), \quad k = 0, \dots, n. \quad (3.1)$$

Алгоритам генерише бинарни низ $\{\hat{s}_i\}_{i=0}^N$ који узима само вредности $\{0,1\}$, тако да за његов аутоковаријациони низ за временски размак k важи:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=k+1}^N \hat{s}_i \hat{s}_{i-k} \approx \hat{r}_k^d, \quad k = 0, \dots, n. \quad (3.2)$$

На основу релације (3.2) за $k=0$ добија математичко очекивање сигнала $\{\hat{s}_i\}_{i=0}^N$:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{s}_i \approx \hat{r}_0^d = \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

Ово имплицира да релација (3.2) условљава да одабрани низ $\{\hat{s}_i\}_{i=0}^N$ има средњу вредност $1/2$, чиме се обезбеђује да генерисани сигнал $\{s_i\}_{i=0}^N$ има очекивану вредност:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i = \frac{a+b}{2}. \quad (3.4)$$

Може се показати да је аутоковаријациони низ сигнала $\{s_t\}_{t=1}^N$ за временски размак $k=0$:

$$r_0^d = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2. \quad (3.5)$$

Лако се може поставити линеарна зависност између сигнала $\{s_t\}_{t=1}^N$ који узима вредности $\{a, b\}$ и сигнала $\{\hat{s}_t\}_{t=1}^N$ који узима вредности $\{0, 1\}$:

$$s_t = (b-a)\hat{s}_t + a, \quad t = 1, \dots, N. \quad (3.6)$$

Сада је могуће дефинисати алгоритам кроз низ корака:

Табела 3.1

- 1) Поставити $t = 1$.
- 2) Поставити низ предикција сигнала у помичном хоризонту $(\hat{s}_t, \dots, \hat{s}_{t+m-1}) = O_{1,m}$, при чему $O_{1,m}$ означава нула матрицу реда $1 \times m$.
- 3) За првих n временских размака рачуна се одабрани низ аутоковаријанси од $(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{t-1}, \hat{s}_t, \hat{s}_{t+1}, \dots, \hat{s}_{t+m-1})$ или од $(\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_m)$, ако је $t = 1$, помоћу релације:

$$\hat{r}_k := \frac{1}{t+m-1} \sum_{i=k+1}^{t+m-1} \hat{s}_i \hat{s}_{i-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

где смо сматрали $\hat{s}_i = \tilde{s}_i$, за $i = 1, \dots, t-1$.

- 4) Генерисање новог m -типла $(\hat{s}_t, \dots, \hat{s}_{t+m-1}) \in \{0, 1\}^m$ и поновити корак 3 све док сви m -типлови не буду тестирани
- 5) Поставити $\tilde{s}_t = \hat{s}_t$ за m -типл $(\hat{s}_t, \dots, \hat{s}_{t+m-1}) \in \{0, 1\}^m$ за који је $\left\| \{\hat{r}_i\}_{i=0}^n - \{\tilde{r}_i^d\}_{i=0}^n \right\|_2$ минимална. У случају да је ова норма једнака за обе вредности \hat{s} (0 или 1), узимамо $\hat{s}_t = 0$.
- 6) Ако је $t < N$, поставимо $t = t+1$ и вратити се на корак 2.
- 7) Конвертовати $\{0, 1\} N$ -типл $(\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_N)$ на $\{a, b\} N$ -типл (s_1, s_2, \dots, s_N) помоћу релације:

$$s_t = (b-a)\hat{s}_t + a, \quad t = 1, \dots, N.$$

При раду са $\{r_k^d\}_{k=0}^{\infty}$, корисник овог алгоритма мора изабрати три променљиве: N , n и m . При планирању експеримента избор обично зависи од неколико фактора као што су период одабирања, укупно време експериментисања над објектом као и од захтеване прецизности процене параметара. Променљива n зависи од карактеристика прописаног аутоковаријационог низа $\{r_k^d\}_{k=0}^{\infty}$. Особито је погодно изабрати n тако да $r_k^d \approx 0$ за свако $k > n$. Избор параметра m је компромис између прецизности и времена извршавања. Међутим, показује се да за највише практичних примена, $m=1$ даје веома добре перформансе, [30].

Избор шума са ограниченим опсегом “ $1/f$ ” као улазног сигнала је инспирисан новијим резултатима на пољу планирања експеримента, у којима се показује да је такав улазни сигнал веома погодан у робусној идентификацији, [32]. Штавише, поред тога што је робусан у односу на варијације параметара, исто тако је робусан у односу на структуру модела.

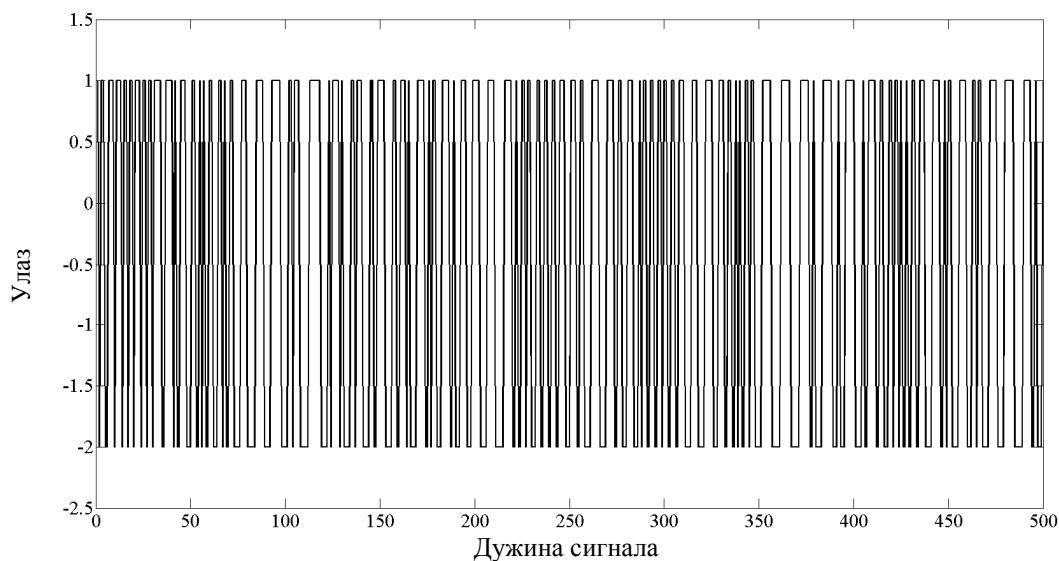
Шум “ $1/f$ ” је дефинисан следећим спектром:

$$\phi^{1/f}(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{\ln \bar{\omega} - \ln \underline{\omega}}, & \omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}] \\ 0, & \text{у осталим случајевима} \end{cases} \quad (3.7)$$

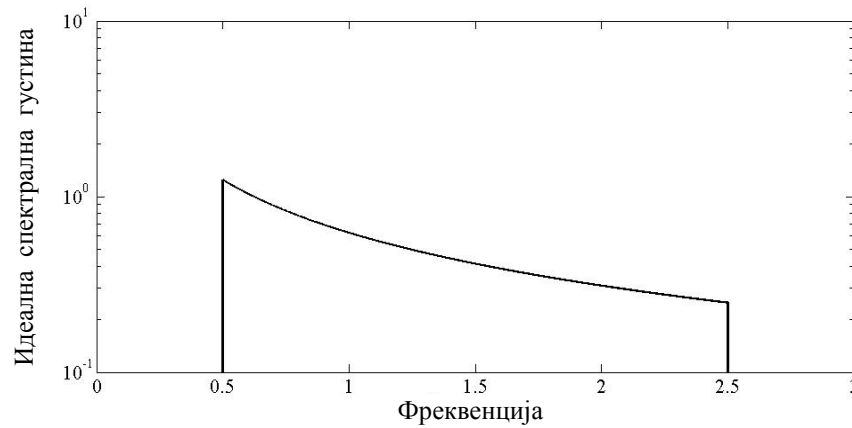
где $[\underline{\omega}, \bar{\omega}] \in \mathbb{R}^+$ ($\underline{\omega} < \bar{\omega}$). Аутоковаријациони низ овог сигнала је изражен следећом релацијом:

$$r_k^{1/f} := \frac{1}{\ln \bar{\omega} - \ln \underline{\omega}} \int_{\underline{\omega}}^{\bar{\omega}} \frac{\cos kx}{x} dx; \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.8)$$

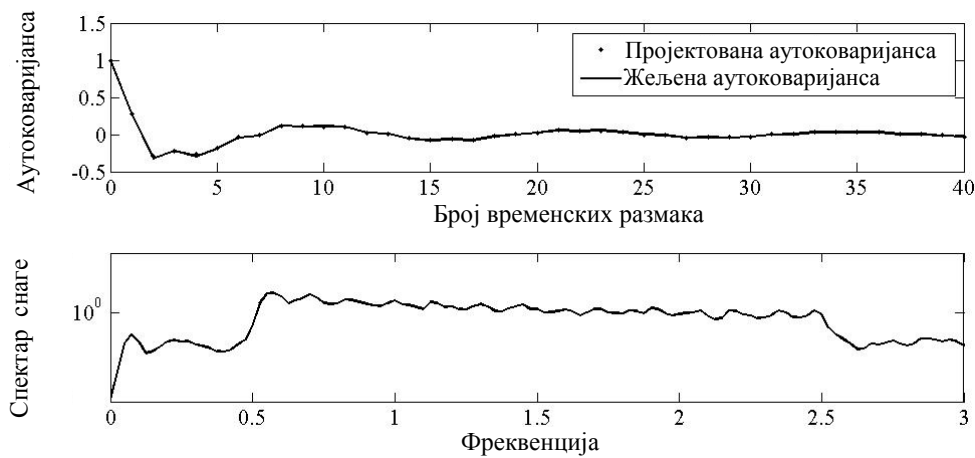
На слици 3.1 је представљен генерисани бинарни сигнал у опсегу $[-2,1]$ за $\underline{\omega}=0.5$, $\bar{\omega}=2.5$, $m=1$, $N=500$ и $n=40$. Слика 3.2 приказује идеалну спектралну густину шума ограниченог опсега „ $1/f$ ”. Слика 3.3 представља добијене карактеристике сигнала помоћу алгоритма са помичним хоризонтом.



Слика 3.1 Генерисани псеудо шум ограниченог опсега „ $1/f$ ”



Слика 3.2 Идеална спектрална густина шума ограниченог опсега „1/ f ”



Слика 3.3 Карактеристике генерисаног псеудо шума ограниченог опсега „1/ f ” за изабране параметре: $m=1$, $N=10^4$ и $n=40$

3.2 Планирање експеримента у затвореној повратној спреси

3.2.1 Дефинисање модела

Посматра се општа форма ОЕ модела:

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + e(k), \quad (3.9)$$

при чему је

$$B(q) = b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}, \quad (3.10)$$

$$F(q) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_nq^{-n}, \quad (3.11)$$

док је q^{-i} оператор помераја тј. $q^{-i}x(k) = x(k-i)$.

Стохастички поремећај $e(k)$ има нормалну расподелу $\mathcal{N}(0, \Sigma)$.

Може се увести помоћни модел

$$y_M(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k), \quad (3.12)$$

који се у регресивној форми записује на следећи начин:

$$y_M(k) = -f_1 y_M(k-1) - \dots - f_n y_M(k-n) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m). \quad (3.13)$$

Пошто су параметри $f_i (i=1, \dots, n)$ и $b_i (i=1, \dots, m)$ непознати, користе се њихове оцене па се излаз помоћног модела рачуна као:

$$\hat{y}_M(k) = -\hat{f}_1 \hat{y}_M(k-1) - \dots - \hat{f}_n \hat{y}_M(k-n) + \hat{b}_1 u(k-1) + \dots + \hat{b}_m u(k-m). \quad (3.14)$$

Ако се уведу величине

$$\hat{\theta} = [\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m]^T, \quad (3.15)$$

$$\varphi(k) = [-\hat{y}_M(k-1), \dots, -\hat{y}_M(k-n), u(k-1), \dots, u(k-m)]^T, \quad (3.16)$$

предикција излаза модела у тренутку k је

$$\hat{y}_M(k) = \hat{\theta}^T(k-1) \varphi(k). \quad (3.17)$$

Алгоритам за оцењивање параметара је

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k) \varphi(k) \cdot [y(k) - \hat{y}_M(k)], \quad (3.18)$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1) \varphi(k) \varphi^T(k) \cdot P(k-1)}{1 + \varphi^T(k) P(k-1) \varphi(k)}, \quad (3.19)$$

$$\theta(0) = 0, \quad P(0) = \rho I, \quad \rho \gg 1. \quad (3.20)$$

Алгоритам (3.18)-(3.20) предложио је Landau у [42]. Процедура произилази из адаптивних система са референтним моделом.

У тези ће се размотрити специјални случај модела (3.9):

$$y(k) = \frac{b_1 q^{-1}}{F(q)} u(k) + e(k) = \frac{b_1}{F(q)} u(k-1) + e(k). \quad (3.21)$$

У овом случају се оцењују параметри b_1 и $f_i (i=1, \dots, n)$.

3.2.2 Синтеза оптималног алгоритма

Посматрајмо систем (3.21). На основу N мерења излаза може се оформити вектор

$$Y = [y(1) \quad \dots \quad y(N)]^T. \quad (3.22)$$

Уз помоћ вектора Y може се дефинисати Фишера информационе матрице

$$M = E_{Y|\beta} \left\{ \left(\frac{\partial \log p(Y|\beta)}{\partial \beta} \right)^T \left(\frac{\partial \log p(Y|\beta)}{\partial \beta} \right) \right\}, \quad (3.23)$$

при чему је E_{\cdot} ознака за условно математичко очекивање и $M \in R^{N \times N}$. Вектор параметара β има форму:

$$\beta = [\theta^T \quad \sigma^2]^T, \quad (3.24)$$

при чему је

$$\theta^T = [f_1 \quad \dots \quad f_n \quad b_1]^T. \quad (3.25)$$

док је σ^2 варијанса поремећаја $e(k)$.

У раду ће се користити средња вредност Фишерове матрице (3.23):

$$\bar{M} = \frac{1}{N} M. \quad (3.26)$$

У општем случају, критеријум за синтезу оптималних улазних сигнала има форму:

$$\mathfrak{J} = E_{\beta} \Phi(\bar{M}), \quad \Phi: R^{N \times N} \rightarrow R^1. \quad (3.27)$$

Овде ће се користити следећа форма критеријума (3.27):

$$\mathfrak{J} = -\log \det \bar{M}. \quad (3.28)$$

Критеријум се може интерпретирати као запремина области највеће густине вероватноће (the volume of highest probability density region), [43]. Важна особина критеријума (3.28) је да је он независан на нелинеарна пресликавања, један на један (one to one), параметара. Сада ће се навести два помоћна резултата у форми лема.

Лема 1 [[44], pp. 232]. Нека је дат простор вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Претпоставиће се такође, да постоји \mathcal{F}_1 подалгебра ($\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$). Тада је

$$E \{ E(\xi | \mathcal{F}_1) \} = E\xi \quad \blacksquare \quad (3.29)$$

Лема 2 [[27], pp. 244]. Нека је \bar{M} позитивно дефинитна матрица за чије дијагоналне елементе важи

$$\bar{M}_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тада матрица M добија максималну вредност за $M = I$ ■

Сада ће се формулисати главни резултат у форми теореме.

Теорема 3.1 Претпоставимо да су за ОЕ модел (3.21) испуњени следећи услови

1° Стохастички поремећај $e(k)$ има расподелу

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \{p(e) : p(e) = (1 - \varepsilon)p_N(e) + \varepsilon q(e)\}, \quad (3.30)$$

при чему се надаље посматра случај

$$p_N(e) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad q(e) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_q^2), \quad \sigma_q^2 \gg \sigma^2, \quad \varepsilon = 0. \quad (3.31)$$

2° Ограничење на излазни сигнал је

$$E y^2(k) \leq W, \quad W \in (0, \infty) \quad (3.32)$$

$$3^\circ \quad E y^2(k) > \sigma^2. \quad (3.33)$$

Тада критеријум $-\log \det \overline{M}$ добија минималну вредност ако је улазни сигнал $u(k)$ генерисан регулатором минималне варијансе чија је референца стохастички процес $\{\eta(k)\}$ са густином вероватноће

$$p(\eta) = \frac{b_1}{\sqrt{2\pi W}} e^{-\frac{(\eta b_1)^2}{2W}} \quad \blacksquare \quad (3.34)$$

Доказ: Дефинишимо величину $\omega(k)$ као:

$$\omega(k) = y(k) + f_1 y_M(k-1) + \dots + f_n y_M(k-n) - b_1 u(k-1). \quad (3.35)$$

На основу услова 1° теореме следи

$$p(Y|\beta) = \frac{1}{\sigma^N (2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N \omega^2(k)}. \quad (3.36)$$

Из релације (3.36) се добија

$$\frac{\partial \log p(Y|\beta)}{\partial \beta} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \omega(k)}{\partial \beta} \omega(k) - \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \beta} \left(N - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N \omega^2(k) \right). \quad (3.37)$$

Фишерава количина информација добија се као

$$M = E_{Y|\beta} \left\{ \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \omega(k)}{\partial \beta} \omega(k) - \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \beta} \left(N - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \omega^2(k) \right) \right]^T \cdot \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{s=1}^N \frac{\partial \omega(s)}{\partial \beta} \omega(s) - \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \beta} \left(N - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{s=1}^N \omega^2(s) \right) \right] \right\} \quad (3.38)$$

Уведимо следеће чињенице

$$E_{Y|\beta} \omega(k) = 0, \quad (3.39)$$

$$E_{Y|\beta} \{ \omega(k)\omega(s) \} = \begin{cases} \sigma^2, & k = s \\ 0, & k \neq s \end{cases}. \quad (3.40)$$

Користећи ове чињенице, након сређивања, релација (3.38) се може изразити као:

$$M = E_{Y|\beta} \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \omega(k)}{\partial \beta} \right)^T \frac{\partial \omega(k)}{\partial \beta} \right\} + \frac{N}{2\sigma^4} \left(\frac{\partial \sigma^2}{\partial \beta} \right)^T \frac{\partial \sigma^2}{\partial \beta}. \quad (3.41)$$

Средња вредност Фишерове матрице има форму

$$\overline{M} = E_{Y|\beta} \left\{ \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \omega(k)}{\partial \beta} \right)^T \frac{\partial \omega(k)}{\partial \beta} \right\} + \frac{1}{2\sigma^4} \left(\frac{\partial \sigma^2}{\partial \beta} \right)^T \frac{\partial \sigma^2}{\partial \beta}. \quad (3.42)$$

На основу релација (3.24) и (3.35) произилази

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(k)}{\partial f_i} &= y_M(k-i), \quad i = \overline{1, n} \\ \frac{\partial \omega(k)}{\partial b_1} &= -u(k-1) \\ \frac{\partial \omega(k)}{\partial \sigma^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Из последње релације произилази

$$\frac{\partial \omega(k)}{\partial \beta} = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial \omega(k)}{\partial f} & \frac{\partial \omega(k)}{\partial b_1} & \frac{\partial \omega(k)}{\partial \sigma^2} \end{array} \right] \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \omega(k)}{\partial \beta} = [y_M(k-1) \quad \dots \quad y_M(k-n) \quad -u(k-1) \quad 0]$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \beta} = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial \sigma^2}{\partial f} & \frac{\partial \sigma^2}{\partial b_1} & \frac{\partial \sigma^2}{\partial \sigma^2} \end{array} \right] = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 1]. \quad (3.45)$$

На основу релација (3.42), (3.44) и (3.45) добија се на основу Леме 1

$$\overline{M} = \frac{1}{\sigma^2} E \left[\begin{array}{ccc|cc} y_M(k-1)^2 & \dots & y_M(k-1) \cdot y_M(k-n) & -u(k-1)y_M(k-1) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_M(k-n) \cdot y_M(k-1) & \dots & y_M(k-n)^2 & -u(k-1)y_M(k-n) & 0 \\ \hline -u(k-1)y_M(k-1) & \dots & -u(k-1)y_M(k-n) & u(k-1)^2 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 1/2\sigma^4 \end{array} \right] \quad (3.46)$$

Релација (3.46) може се написати у компактнијој форми

$$\overline{M} = \frac{1}{\sigma^2} \left[\begin{array}{c|c|c} A & B & 0 \\ \hline B^T & C & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/2\sigma^4 \end{array} \right]. \quad (3.47)$$

Следећи задатак је да се одреде елементи матрице \overline{M} у релацији (3.47).

Корак 1 (Одређивање матрице A)

Дефинишимо

$$E\{y_M(k-i)y_M(k-j)\} \triangleq \rho_{|i-j|}. \quad (3.48)$$

На основу релације (3.48) матрица A може бити представљена у следећој форми

$$A = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & \rho_0 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \cdots & \rho_0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Корак 2 (Одређивање матрице B)

На основу релација (3.9) и (3.12) добија се

$$y(k) = -f_1 y_M(k-1) - \dots - f_n y_M(k-n) + b_1 u(k-1) + e(k). \quad (3.50)$$

После множења релације (3.50) са

$$y_M(k-i), \quad i=1, \dots, n. \quad (3.51)$$

Добија се следећи систем од n једначина

$$\begin{aligned} y(k)y_M(k-1) &= -f_1 y_M(k-1)^2 - \dots - f_n y_M(k-n)y_M(k-1) + \\ &\quad + b_1 u(k-1)y_M(k-1) + e(k)y_M(k-1) \\ y(k)y_M(k-2) &= -f_1 y_M(k-1)y_M(k-2) - \dots - f_n y_M(k-n)y_M(k-2) + \\ &\quad + b_1 u(k-1)y_M(k-2) + e(k)y_M(k-2) \\ &\vdots \\ y(k)y_M(k-n) &= -f_1 y_M(k-1)y_M(k-n) - \dots - f_n y_M(k-n)^2 + \\ &\quad + b_1 u(k-1)y_M(k-n) + e(k)y_M(k-n) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Применом оператора математичког очекивања на релације (3.52) добија се

$$V = -Af + Bb_1, \quad (3.53)$$

где је $f^T = [f_1 \ \dots \ f_n]$, $V = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_n]^T$.

Коначно се из релације (3.53) добија

$$B = \frac{1}{b_1}(Af + V). \quad (3.54)$$

Корак 3 (Одређивање скалара C)

Из релације (3.12) добија се улазни сигнал $u(\cdot)$

$$u(k-1) = \frac{1}{b_1} [y_M(k) + f_1 y_M(k-1) + \dots + f_n y_M(k-n)]. \quad (3.55)$$

Скалар C је дефинисан као

$$\begin{aligned} C = E\{u(k-1)^2\} &= \frac{1}{b_1^2} E \left[y_M(k)^2 + f_1 y_M(k-1) y_M(k) + \dots + f_n y_M(k-n) y_M(k) + \right. \\ &+ f_1 y_M(k) y_M(k-1) + f_1^2 y_M(k-1)^2 + \dots + f_1 f_n y_M(k-1) y_M(k-n) + \\ &\vdots \\ &\left. + f_n y_M(k-n) y_M(k) + f_n f_1 y_M(k-1) y_M(k-n) + \dots + f_n^2 y_M(k-n)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Посматрајући појединачне чланове последње релације, уз примену оператора математичког очекивања, добија се:

$$E\{y_M(k)^2\} \triangleq \rho_0 \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} 2f_1 E\{y_M(k-1) y_M(k)\} + \dots + 2f_n E\{y_M(k-n) y_M(k)\} = \\ 2f_1 \rho_1 + \dots + 2f_n \rho_n = 2[f_1 \quad \dots \quad f_n] \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} = 2fV^T \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} f_1^2 E\{y_M(k-1)^2\} + \dots + f_1 f_n E\{y_M(k-1) y_M(k-n)\} + \\ \vdots \\ + f_n f_1 E\{y_M(k-1) y_M(k-n)\} + \dots + f_n^2 E\{y_M(k-n)^2\} = \\ f_1^2 \rho_0 + \dots + f_1 f_n \rho_{n-1} + \\ \vdots \\ + f_n f_1 \rho_{n-1} + \dots + f_n^2 \rho_0 = \\ = [f_1 \quad \dots \quad f_n] \begin{bmatrix} \rho_0 & \dots & \rho_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \dots & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = f^T A f \end{aligned} \quad (3.59)$$

Коришћењем релација (3.57) - (3.59) коначно се добија израз за скалар C

$$C = E\{u(k-1)^2\} = \frac{1}{b_1^2} (\rho_0 + 2fV^T + f^T A f). \quad (3.60)$$

Пошто су сада познати сви елементи матрице \overline{M} (релација (3.47)) добија се

$$\det \overline{M} = \frac{1}{2\sigma^6} \det \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sigma^6} \det A \cdot \det (C - B^T A^{-1} B). \quad (3.61)$$

На основу последње релације следи:

$$-\log \det \overline{M} = \log 2\sigma^6 - \log (\det A) - \log \det (C - B^T A^{-1} B). \quad (3.62)$$

Израз $B^T A^{-1} B$ може се написати у форми

$$\begin{aligned} B^T A^{-1} B &= \frac{1}{b_1^2} (V^T + f^T A) A^{-1} (V + Af) = \\ &= \frac{1}{b_1^2} (V^T A^{-1} + f^T) (V + Af) = \frac{1}{b_1^2} (V^T A^{-1} V + 2f^T V + f^T Af) \end{aligned} \quad (3.63)$$

На основу релација (3.60) - (3.63) добија се

$$\begin{aligned} -\log \det \bar{M} &= \log 2\sigma^6 - \log(\det A) - \log \det \left(\frac{1}{b_1^2} [\rho_0 - V^T A^{-1} V] \right) = \\ &= \log 2\sigma^6 - \log(\det A) - \log(\rho_0 - V^T A^{-1} V) + \log b_1^2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Сагласно услову 2° теореме

$$\rho_0 = W, \quad (3.65)$$

па су дијагонални елементи матрице A фиксни.

На основу Леме 2 произилази да $-\log(\det A)$ има минималну вредност када је A дијагонална матрица. То значи да је

$$\rho_i = 0, \quad i > 0. \quad (3.66)$$

Услов (3.66) даје

$$V = 0. \quad (3.67)$$

Због (3.67), трећи члан у релацији (3.64) има минималну вредност, која се на основу релације (3.65), записује

$$-\log(W). \quad (3.68)$$

Коначно се добија

$$\min \left\{ -\log \det \bar{M} \right\} = \log 2\sigma^6 - \log W^n - \log W + \log b_1^2 = \log \frac{2\sigma^6 b_1^2}{W^{n+1}}. \quad (3.69)$$

Да би се постигло да је $\rho_i = 0, \quad i > 0$ потребно је да буде испуњен следећи услов: $\{y(k)\}$ је некорелисана секвенца. Овај услов је испуњен ако је улазни сигнал изабран у форми

$$u(k) = \frac{1}{b_1} [f_1 y_M(k) + \dots + f_n y_M(k-n+1)] + \eta(k), \quad (3.70)$$

при чему је $\eta(k)$ референтни сигнал који представља бели шум са варијансом W/b_1^2 .

Релација (3.70) представља регулатор минималне варијансе за модел (3.21). Тиме је теорема доказана. ■

Главни резултат теореме је чињеница да се синтеза улазних сигнала, који индукују унапред задату снагу излазног сигнала, врши коришћењем повратне спреге. У овом случају повратна

спрега састоји се од регулатора минималне варијансе и стохастичке референце. Резултат, такође, показује да синтеза оптималног улазног сигнала захтева знање тачних параметара система. У практичним условима, међутим, такав захтев је контрадикторан јер се синтеза оптималних улазних сигнала врши да би се убрзао процес идентификације (одређивање параметара модела). Па ипак резултат теореме има следеће важне импликације:

- а) шта се у најбољем случају може постићи са оптималним улазним сигналом,
- б) примена филозофије адаптације за креирање практичног алгоритма за синтезу улазних сигнала.

Напомена 3.1: У току експеримента на реалним процесима није дозвољено превелико одступање величина од њихових номиналних вредности, јер доводи до деградације квалитета производа, смањењу профита а понекад и до прекида производње. Зато је врло важно одредити промене величина у задатим границама. Када је у питању систем један-улаз један-излаз ограничење промене излазне величине постиже се применом повратне спреге (у нашем случају то је регулатор минималне варијансе). Важно је напоменути да се задата промене улазне величине система, применом метода оптимизације, постиже без коришћења повратне спреге.

Напомена 3.2: Референца [27] разматра оптимални експеримент за ARX системе када постоји ограничење на снагу излазног сигнала. Овде се разматра ОЕ модел. Адаптивна синтеза улазног сигнала за ARX моделе разматрана је у [36] и заснована је на синтези адаптивног FIR (finite impulse response) филтра. Процедура је реализована у отвореној повратној спрези. Овде се, генерисање улазних сигнала, уз ограничење на излаз система, заснива на повратној спрези (регулатор минималне варијансе).

3.2.3 Адаптивна синтеза улазних сигнала

У практичним условима, тачни параметри система (3.21) су непознати. Пре тога уочимо да се из релације (3.21) и (3.70) може добити

$$y_M(k+1) = b_1 \eta(k). \quad (3.71)$$

У раду ће се користити двостепена процедура:

- а) Применом PRBS сигнала као улазних сигнала одређује се, кроз N_{init} итерација, иницијални модел процеса
- б) После тога примењује се адаптација за регулатор дефинисаним у Теорему 1.

У делу посвећеном симулацијама упоређује се двостепени алгоритам са алгоритмом за идентификацију система у отвореној повратној спрези када су улазни сигнали PRBS сигнали.

Сада се наводи комплетан алгоритам двостепене процедуре за идентификацију система.

Табела 3.2

Фаза А

1) Дефинишу се почетни услови за алгоритам (3.18) - (3.19), $\theta(0) = 0$, $P(0) = 10^4 I$

2) Дефинише се број итерација N_{init} за генерисање иницијалног модела

3) Постави се $k = 1$

4) Одређује се излаз система $y(k)$ за улазни PRBS сигнал

5) Формира се вектор мерења

$$\varphi(k) = [-\hat{y}_M(k-1) \quad \dots \quad -\hat{y}_M(k-n) \quad u(k-1)]^T$$

$$y_M(k) = -f_1(k)y_M(k-1) - \dots - f_n(k)y_M(k-n) + b_1(k)u(k-1)$$

6) Одређује се матрица појачања

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k) \cdot P(k-1)}{1 + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}$$

7) Рачуна се грешка предикције

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{\theta}(k-1)^T \varphi(k)$$

$$\hat{\theta}(k) = [\hat{f}_1(k) \quad \dots \quad \hat{f}_n(k) \quad \hat{b}_1(k)]^T$$

8) Рачуна се излаз помоћног модела

$$\hat{y}_M(k) = \hat{\theta}(k)^T \varphi(k)$$

9) Поставља се $k = k + 1$

10) Ако је $k < N_{init}$, иде се на корак 4

Фаза Б

1) Задаје се број итерација N_{opt}

2) Задаје се ниво снаге излазног сигнала W

3) Тестира се вредност оцене параметара $\hat{b}_1(k)$

$$\hat{b}_1^+(k) = \begin{cases} \hat{b}_1(k), & \hat{b}(k) \neq 0 \\ b \ (b > 0), & \hat{b}(k) = 0 \end{cases}$$

4) Дефинише се стохастичка референца

$$p(\eta(k)) = \frac{b_1^+(k)}{\sqrt{2\pi W}} e^{-\frac{\eta^2(k)(b_1^+(k))^2}{2W}}$$

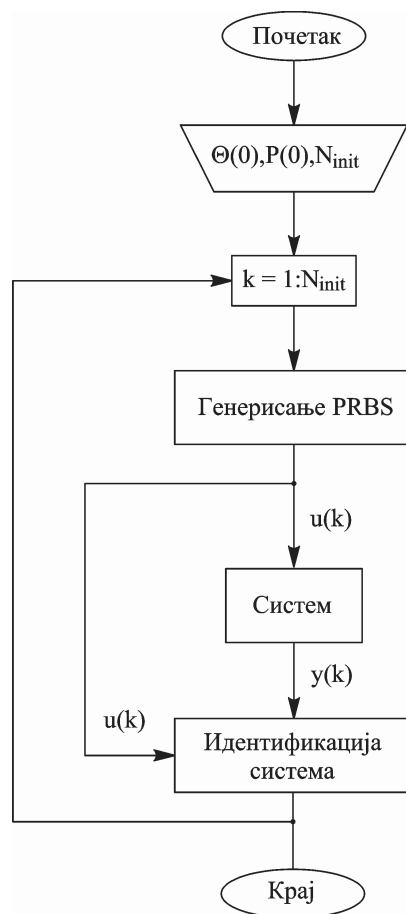
5) Рачуна се управљачки сигнал

$$u(k) = \frac{1}{\hat{b}_1^+(k)} \left[\hat{f}_1(k)y_M(k) + \dots + \hat{f}_n(k)y_M(k-n+1) \right] + \eta(k)$$

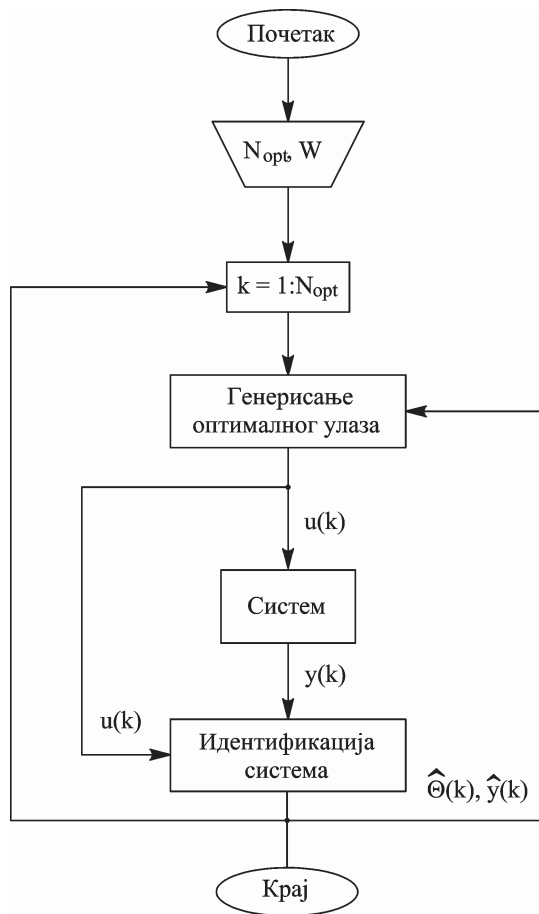
6) Спроводи се рачунање величина као у тачкама 4-8 Фазе А

7) Поставља се $k = k + 1$

8) Ако је $k < N_{opt}$, иде се на корак 3



Слика 3.4 Фаза А: Добијање иницијалног модела применом PRBS сигнала



Слика 3.5 Фаза Б: Идентификација система применом оптималног улазног сигнала

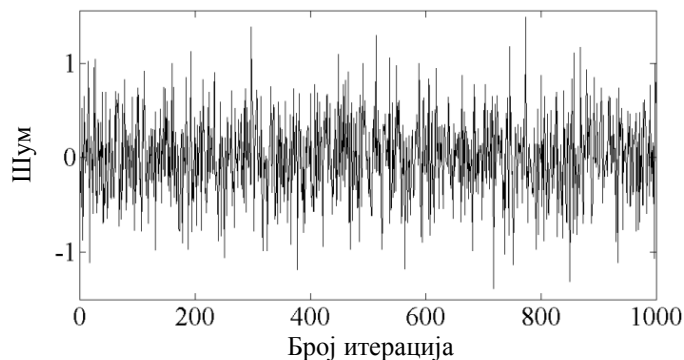
3.2.4 Резултати симулација

У циљу приказивања практичног аспекта предложеног двостепеног алгоритма идентификације, урађене су симулације. Предложени двостепени алгоритам идентификације је тестиран на следећем ОЕ моделу:

$$y(k) = \frac{0.5q^{-1}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}} u(k) + e(k). \quad (3.72)$$

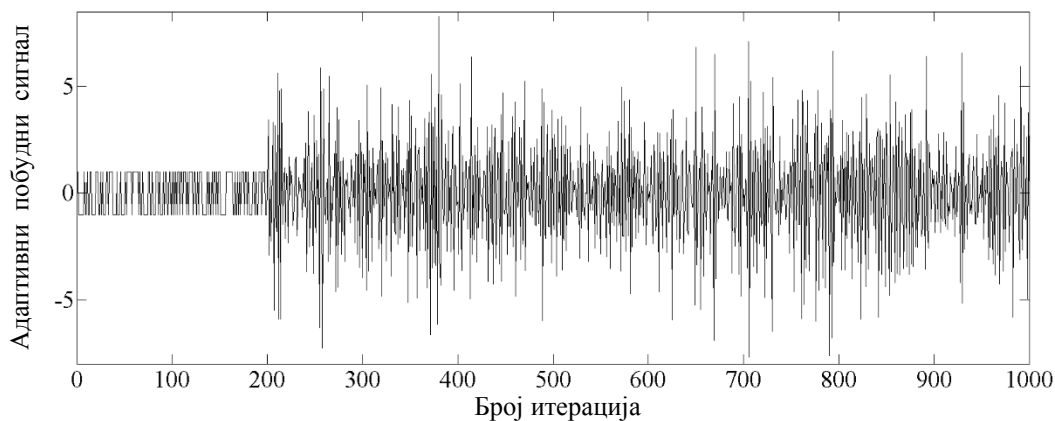
Током симулација прикупљено је 1000 улазно-излазних података. Посматра се случај када номинални члан ε – контаминираних расподеле има следећу Гаусову расподелу (видети слику 3.6):

$$p_N(e) \sim \mathcal{N}(0, 0.2). \quad (3.73)$$

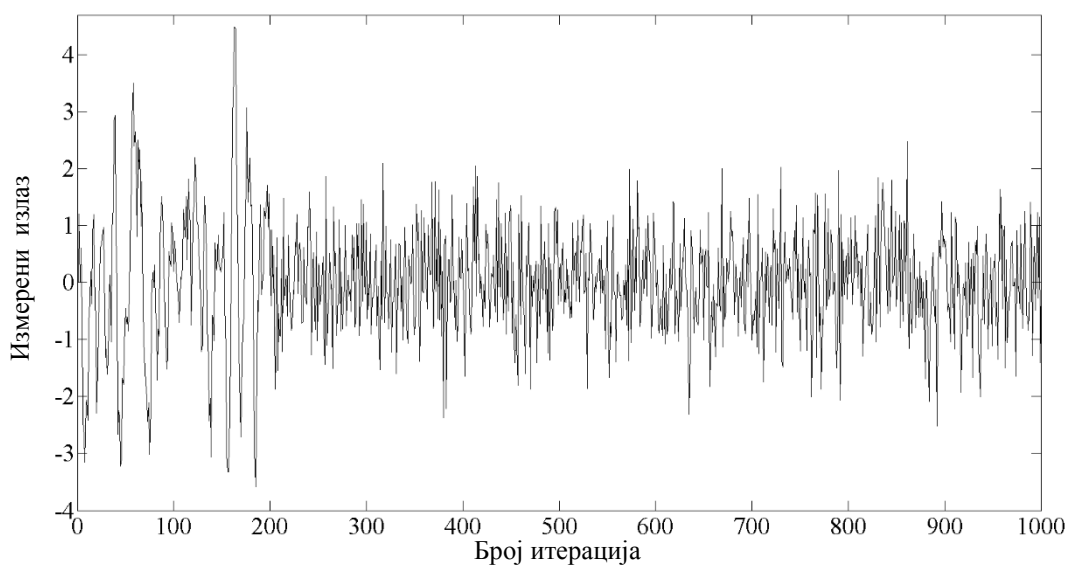


Слика 3.6 Приказ шума

Слике 3.7 и 3.8 показују улаз система и одговарајући излаз када се користи предложени двостепени алгоритам идентификације. Првих 200 итерација систем ради у отвореној спрези, при чему је PRBS улазни сигнал. Након тога се укључује повратна спрега (регулатор минималне варијансе) у опсегу итерација 200 - 1000. Може се видети да се након укључења повратне спреге смањује варијанса излазног сигнала.



Слика 3.7 Адаптивни побудни сигнал



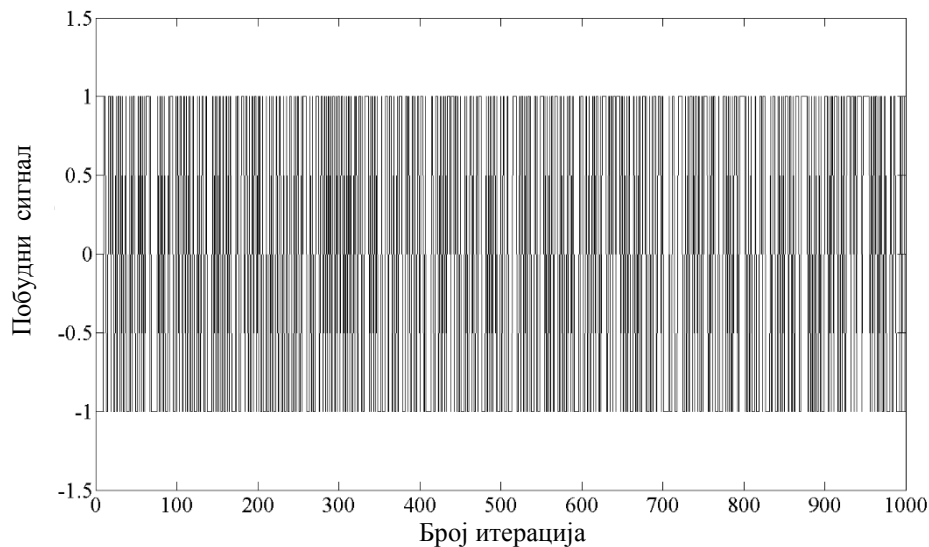
Слика 3.8 Излаз система користећи адаптивни побудни сигнал

Да би се демонстрирала супериорност предложеног двостепеног алгоритма идентификације, прави се поређење са алгоритмом идентификације у отвореној спрези, када је улазни сигнал PRBS.

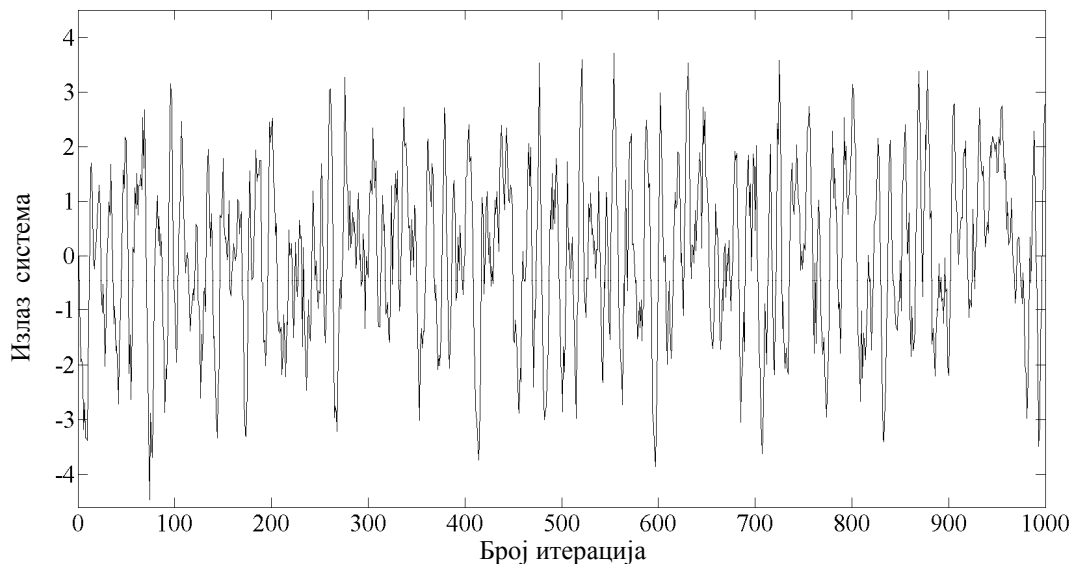
Слике 3.9 и 3.10 показују улаз система и одговарајући одзив када се користи алгоритам идентификације у отвореној спрези.

Резултати симулације су поређени у смислу квадратне грешке, дефинисане као:

$$SE = \ln \left(\left\| \hat{\theta}(k) - \theta(k) \right\|^2 \right). \quad (3.74)$$

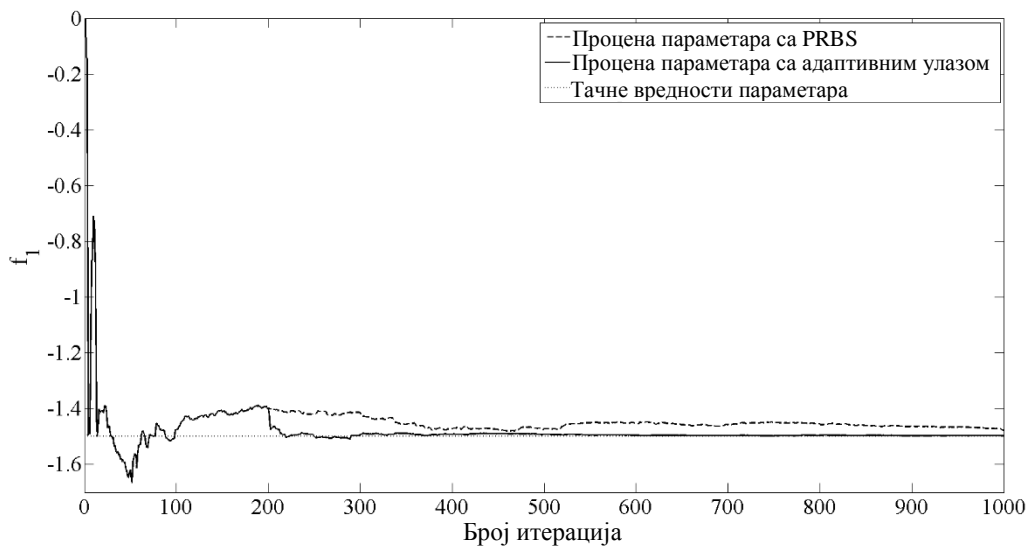
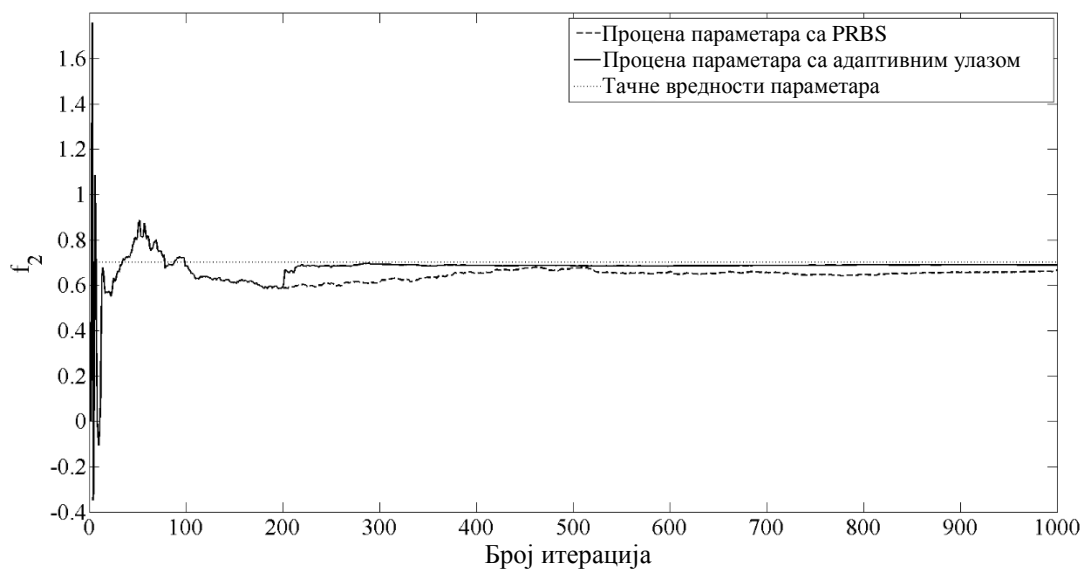


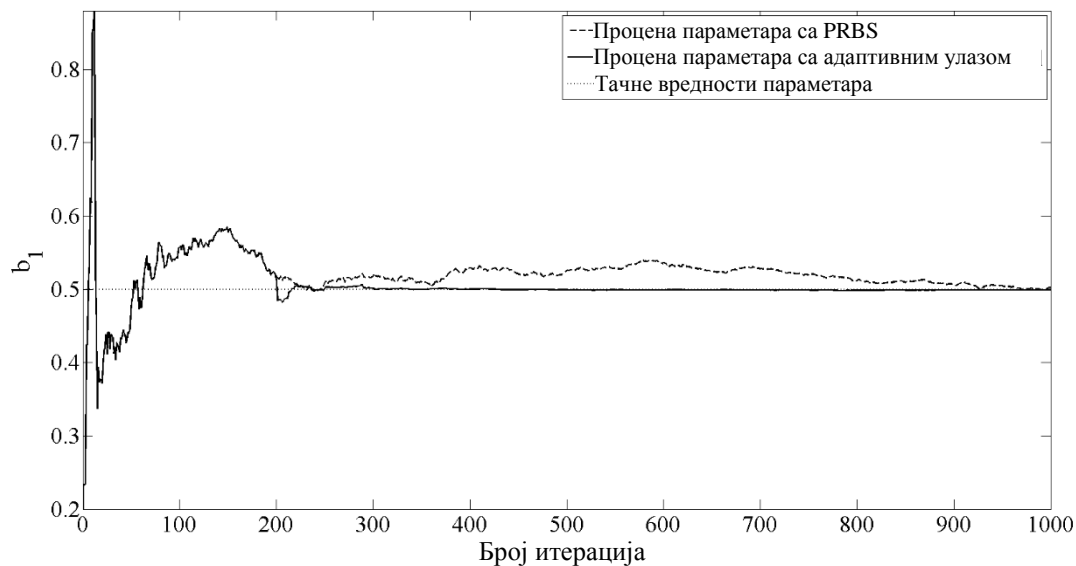
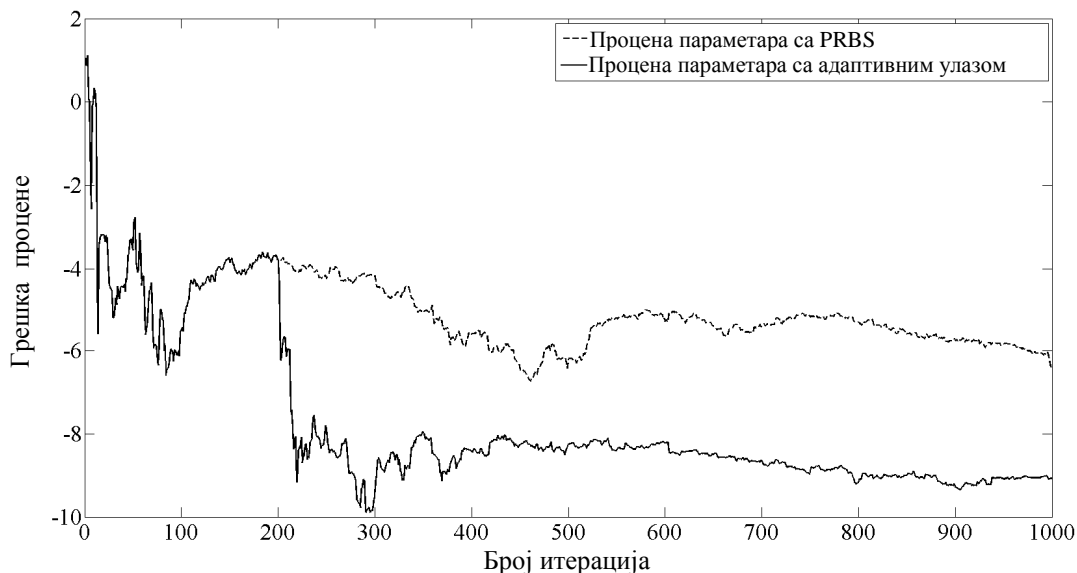
Слика 3.9 PRBS побудни сигнал



Слика 3.10 Излаз система користећи PRBS побудни сигнал

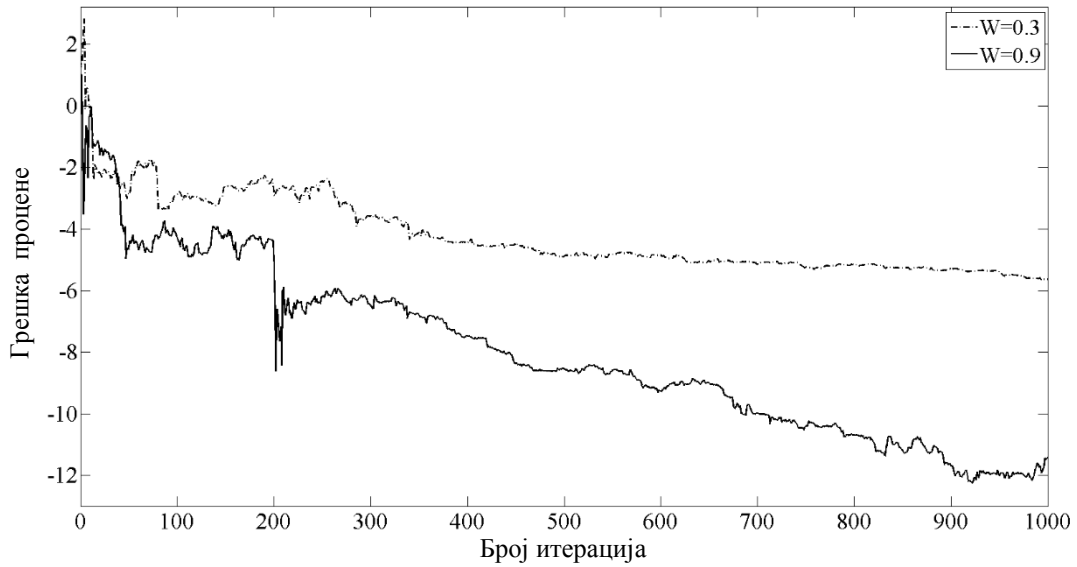
Слике 3.11 - 3.14 приказују оцене параметара и квадратне грешке за случај када варијанса излаза не може бити већа од $W = 0.5$.

Слика 3.11 Процена параметра f_1 Слика 3.12 Процена параметра f_2

Слика 3.13 Процена параметра b_1 

Слика 3.14 Грешка процене

На основу ових слика, може се закључити да синтеза експеримента повећава брзину конвергенције параметара ка тачним вредностима, у складу са датом границом варијансе излаза W . Такође, интензивним симулацијама је показано да релаксацијом ограничења на излаз смањује се грешка процене параметара. Овај закључак се јасно види са слике 3.15.



Слика 3.15 Грешка процене при различитим вредностима ограничења варијансе излаза

У раду је разматран чист дискретни модел. У том случају поређење алгоритама се врши у тренуцима k ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$). Ако се модел добије дискретизацијом континуалног модела поређење алгоритама се врши у тренуцима kT_s , где је T_s периода одабирања.



Робусна идентификација стохастичких линеарних система

У овом делу се разматра естимација параметара стохастичких линеарних система са временски променљивим параметрима. Промена параметара описана је методом случајног корака у којој је одговарајући шум моделиран као Гаусов стохастички процес. Посматраће се случај када шум процеса има Гаусову расподелу, а шум мерења негаусову расподелу. Као оквир за реализацију оваквог алгоритма узет је Масрељез-Мартинов филтар (робусни Калманов филтар). Извршене су хеуристичке модификације Масрељез-Мартиновог филтра које значајно повећавају његову практичну употребљивост. Супериорност предложеног робусног алгоритма идентификације над стандардним Калмановим филтром је илустрована кроз симулације. При идентификацији користио се оптимални улазни сигнал који је генерисан применом алгоритма са помичним хоризонтом.

4.1 Робусни Калманов филтар као естиматор параметара

У општем случају, посматраће се системи са временски променљивим параметрима. Претпоставиће се да промена параметара има форму случајног корака:

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \omega(k), \quad (4.1)$$

при чему је стохастички процес $\omega(k)$ Гаусов са средњом вредношћу нула и коваријационом матрицом $W(k)$.

Напомена 4.1: Модел (4.1) могуће је представити у општијој форми

$$\theta(k+1) = C\theta(k) + \omega(k), \quad (4.2)$$

при чему је C априори позната несингуларна матрица. Ова матрица је погодна за уношење априорних информација о феномену чија се идентификација врши.

Из релације (4.2) произилази и могућност моделовања детерминистички променљивих параметара:

$$\theta(k+1) = C\theta(k). \quad (4.3)$$

Означићемо са $y_n(k)$ излаз модела без поремећаја. Динамика модела је у том случају описана као:

$$y_n(k) = -a_1(k)y_n(k-1) - \dots - a_n(k)y_n(k-n) + b_1(k)u(k-1) + \dots + b_m(k)u(k-m). \quad (4.4)$$

Уведимо следеће векторе

$$\theta(k) = [a_1(k), \dots, a_n(k), b_1(k), \dots, b_m(k)]^T, \quad (4.5)$$

$$\varphi_0(k) = [-y_n(k-1), \dots, -y_n(k-n), u(k-1), \dots, u(k-m)]^T. \quad (4.6)$$

У том случају динамика система са поремећајем је дата следећом релацијом

$$y(k) = \theta^T(k)\varphi_0(k) + e(k). \quad (4.7)$$

Поремећај $e(k)$ је негаусов, тј. укључује присуство аутлајера. Густина вероватноће поремећаја $p(e)$ припада приближно нормалној класи расподела:

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \{p(e) : p(e) = (1-\varepsilon)p_N(e) + \varepsilon q(e)\}, \quad (4.8)$$

при чему важи

$$p_N(e) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad q(e) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_q^2), \quad \sigma_q^2 \gg \sigma^2. \quad (4.9)$$

где $p(\cdot)$ означава густину вероватноће. Другим речима, густина вероватноће $p(e)$ представља смешу нормалне (Гаусове) расподеле

$$p_N(e) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (4.10)$$

и произвољне густине вероватноће $q(e)$, при чему σ^2 означава дисперзију а параметар ε означава степен контаминације.

Проблем са релацијом (4.6) је што се величине $y_n(k-i)$, ($i=1, 2, \dots, n$) не могу мерити. Зато се ове величине рачунају коришћењем текућих оцена параметара θ . Добија се

$$\hat{y}_n(k) = -\hat{a}_1(k)\hat{y}_n(k-1) - \dots - \hat{a}_n(k)\hat{y}_n(k-n) + \hat{b}_1(k)u(k-1) + \dots + \hat{b}_m(k)u(k-m). \quad (4.11)$$

Ако се уведу вектори

$$\hat{\theta}(k) = [\hat{a}_1(k), \dots, \hat{a}_n(k), \hat{b}_1(k), \dots, \hat{b}_m(k)]^T, \quad (4.12)$$

$$\varphi(k) = [-\hat{y}_n(k-1), \dots, -\hat{y}_n(k-n), u(k-1), \dots, u(k-m)]^T, \quad (4.13)$$

добиа се релација

$$\hat{y}_n(k) = \hat{\theta}^T(k)\varphi(k). \quad (4.14)$$

У тренутку k , пре него што је позната оцена $\hat{\theta}(k)$, предикција модела је [45]:

$$\hat{y}(k) = \hat{\theta}^T(k-1)\varphi(k). \quad (4.15)$$

Природна дефиниција грешке предикције је

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k). \quad (4.16)$$

У зависности од усвојеног критеријума идентификације, коришћењем релација (4.7) и (4.13) -(4.15) могу се добити различити рекурзивни алгоритми идентификације.

Уочимо да се вектор $\varphi_0(k)$ из релације (4.6) замењује са вектором $\varphi(k)$ из релације (4.13), како би се рекурзивни алгоритам могао реализовати.

Претпоставимо да се систем у простору стања може описати као

$$x(k+1) = F(k)x(k) + w(k), \quad (4.17)$$

$$y(k) = H(k)x(k) + e(k), \quad (4.18)$$

при чему су

$$x(\cdot) \in R^n, F(\cdot) \in R^{n \times n}, w(\cdot) \in R^n,$$

$$y(\cdot) \in R^1, H(\cdot) \in R^{1 \times n}, e(\cdot) \in R^1.$$

Величина $x(\cdot)$ је вектор стања, $y(\cdot)$ је излаз система, а $w(\cdot)$ и $e(\cdot)$ су шум процеса и шум мерења. Претпоставља се да је шум процеса Гаусов $N(0, W(k))$ где је $W(k)$ коваријациона матрица а $e(\cdot)$ је шум мерења који има негаусову расподелу дефинисану релацијом (4.8).

У референци [55] Масрељез и Мартин за наведену ситуацију предложили су робусни Калманов филтар. Овај филтар има малу осетљивост на присуство аутлајера у поређењу са стандардним Калмановим филтром изведеним за случај да величине $w(\cdot)$ и $e(\cdot)$ имају Гаусову расподелу.

Једначине филтра су

$$\hat{x}(k|k) = F(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) + P(k|k-1)H^T(k)T(k)\psi[v(k)], \quad (4.19)$$

$$P(k|k-1) = F(k-1)P(k-1|k-1)F^T(k-1) + W(k-1), \quad (4.20)$$

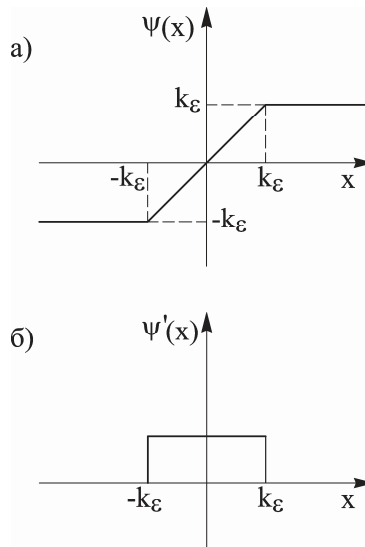
$$P(k|k) = P(k|k-1) - P(k|k-1)H^T(k)T^2(k)H(k)P(k|k-1)E_{\mathcal{F}_k} \{ \psi'(v(k)) \}. \quad (4.21)$$

У релацији (4.19) $v(k)$ представља трансформисане резидуале

$$v(k) = T(k) [y(k) - H(k)F(k-1)\hat{x}(k-1|k-1)]. \quad (4.22)$$

Пошто је једначина мерења (4.18) скаларна, онда је $T(k)$ такође скалар. Трансформација $T(k)$ уведена је због тога да би иновациона променљива $v(k)$ задовољила услове симетричности одређених густина вероватноће као и услове за маргиналне вероватноће, [55].

Нелинеарна функција $\psi(\cdot)$ је за класу ε -контраминираних расподела вероватноћа Хуберова функција и добија се применом теорије игара у статистици, [13]. Она се дефинише на основу најнеповољније расподеле вероватноће за задату класу расподела вероватноће.



Слика 4.1 Нелинеарна функција резидуала

а) Хуберова функција

б) Извод Хуберове функције

Оригинално предложени робусни Калманов филтер [55] (релације (4.19)-(4.22)) укључује две величине које није лако одредити у практичним условима. То су скаларна трансформација $T(k)$ као и члан у апостериорној коваријационој матрици $E_{\varphi_\varepsilon} \{ \psi'(v(k)) \}$. Наведени члан представља Фишерову количину информација за најнеповољнију густину вероватноће [88]:

$$I(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2(\zeta)}{p(\zeta)} d\zeta. \quad (4.23)$$

Сагласно референци [55], показује се да је:

$$\begin{aligned} E_{\varphi_\varepsilon} \{ \psi'(\cdot) \} &= (1 - \varepsilon) [\Phi(k) - \Phi(-k)] = \\ &= (1 - \varepsilon) [2\Phi(k) - 1], \quad 1 \leq k \leq 3 \end{aligned} \quad (4.24)$$

где величина $\Phi(k)$ означава функцију стандардне нормалне расподеле:

$$\Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (4.25)$$

Узимајући у обзир (4.17), (4.18), (4.8), долази се до следеће релације:

$$T^2(k) [H(k)P(k|k-1)H^T(k) + \sigma_N^2] = 1, \quad (4.26)$$

одакле се лако може изразити скаларна трансформација $T(k)$:

$$T(k) = [H(k)P(k|k-1)H^T(k) + \sigma_N^2]^{-1/2}. \quad (4.27)$$

Након замене члана $E_{\varphi_\varepsilon} \{ \psi'(v(k)) \}$ са реализацијом $\psi'(v(k))$, алгоритам (4.19)-(4.22) има следећу, модификовану форму:

$$\hat{x}(k|k) = F(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) + P(k|k-1)H^T(k)T(k)\psi[v(k)], \quad (4.28)$$

$$P(k|k-1) = F(k-1)P(k-1|k-1)F^T(k-1) + W(k-1), \quad (4.29)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - P(k|k-1)H^T(k)T^2(k)H(k)P(k|k-1)\psi'(v(k)), \quad (4.30)$$

$$v(k) = T(k)[y(k) - H(k)F(k-1)\hat{x}(k-1|k-1)]. \quad (4.31)$$

Важно је уочити да ова хеуристичка модификација повећава брзину конвергенције на почетним итерацијама. Наиме, из релација (4.28)-(4.31) за појачање робусног Калмановог филтра добија се:

$$K(k) = F(k-1)[P(k|k-1) - P(k|k-1)H^T(k)T^2(k)H(k)P(k|k-1)\psi'(v(k))] \cdot F^T(k-1)H^T(k)T(k) + W(k-1)H^T(k)T(k) \quad (4.32)$$

Уколико је

$$|v(k)| > k_\epsilon, \quad (4.33)$$

релација (4.32) постаје

$$K(k) = F(k-1)P(k|k-1)F^T(k-1)H^T(k)T(k) + W(k-1)H^T(k)T(k), \quad (4.34)$$

јер уз услов (4.33) важи $\psi'(v(k)) = 0$ (видети слику 4.1).

Упоређујући релације (4.32) и (4.34) види се да је појачање $K(k)$ у другом случају веће. То значи да кад код су грешке оцењивања веће, појачање филтра се повећава и самим тим повећава брзину конвергенције оцена.

Упоређујући релације (4.1) и (4.7) са релацијама (4.17) и (4.18) водећи рачуна да се вектор $\varphi_0(k)$ замени са $\varphi(k)$ и заменом величина:

$$F(k) = I, \quad H(k) = \varphi^T(k), \quad \hat{x}(k|k) = \hat{\theta}(k),$$

у релације (4.28) - (4.31) добија се рекурзивни алгоритам за процену временски променљивих параметара. Ради прегледности, алгоритам ћемо представити у форми табеле.

Алгоритам за идентификацију система са временским променљивим параметрима

Табела 4.1

Модел промене параметара

$$\theta(k+1) = \theta(k) + w(k)$$

Модел мерења

$$y(k) = \theta^T(k)\varphi_0(k) + e(k)$$

А приори подаци

$$w(k) \sim \mathcal{N}(0, W(k))$$

$$e(k) \sim (1-\varepsilon)\mathcal{N}(0, \sigma^2) + \varepsilon\mathcal{N}(0, \sigma_{N1}^2), \quad \sigma_{N1}^2 \gg \sigma^2$$

$$\theta(0) \sim \mathcal{N}(\bar{\theta}, \Sigma_\theta)$$

$$\text{cov}(w(k)e(k)) = \text{cov}(\theta(0)w(k)) = \text{cov}(\theta(0)e(k)) = 0$$

Замена у робусном Калмановом филтру (4.28)-(4.31)

$$F(k) = I, \quad H(k) = \varphi^T(k), \quad \hat{x}(k|k) = \hat{\theta}(k)$$

Оцењивање параметара

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k|k-1)\varphi(k)T(k)\psi[v(k)]$$

Коефицијент појачања

$$K(k) = P(k|k-1)\varphi(k)T(k)$$

Априорна коваријациона матрица

$$P(k|k-1) = P(k-1|k-1) + W(k-1)$$

Апостериорна коваријациона матрица

$$P(k|k) = P(k|k-1) - P(k|k-1)\varphi(k)T^2(k)\varphi^T(k)P(k|k-1)\psi'(v(k))$$

Почетни услови

$$\hat{\theta}(0|0) = \hat{\theta}(0) = \bar{\theta}, \quad P(0|0) = \Sigma_\theta$$

Напомена 4.2: Важно је нагласити да се у случају мале коваријационе матрице параметара, утицај трансформације резидуала $T(k)$ може занемарити и тиме додатно повећати практичну употребљивост предложеног алгоритма идентификације. Наиме, мерењем брзине извршавања алгоритма на рачунару, може се видети да се алгоритам са апроксимацијом $T(k)=1$ извршава брже од Масрељез-Мартиновог филтра, јер се током итерација не троши време на срачунавање матрице трансформације (4.27). Интензивне симулације су оправдале овакве интервенције. Конкретно, на примеру система четвртог реда (4.35)-(4.38), за 1000 итерација, комплетно модификовани алгоритам је 2.2 пута бржи од оригиналног Масрељез-Мартиновог филтра. Резултати су добијени симулацијама на рачунару са процесором Intel(R) Core(TM) i3 2120 CPU 3.3 GHz, са 4GB RAM инсталиране меморије, који ради под 64-bit оперативним системом. Понашање овако модификованог алгоритма биће илустровано на следећем проблему оцене стања:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.012 & 0.001 & -0.001 \\ -0.005 & 0.98 & -0.001 & 0.005 \\ -0.001 & 0.01 & 1 & -0.001 \\ 0.01 & 0.001 & -0.002 & 1 \end{bmatrix} x(k) + w(k), \quad (4.35)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x(k) + e(k). \quad (4.36)$$

Шум процеса је Гаусов са нултом средином и коваријационом матрицом:

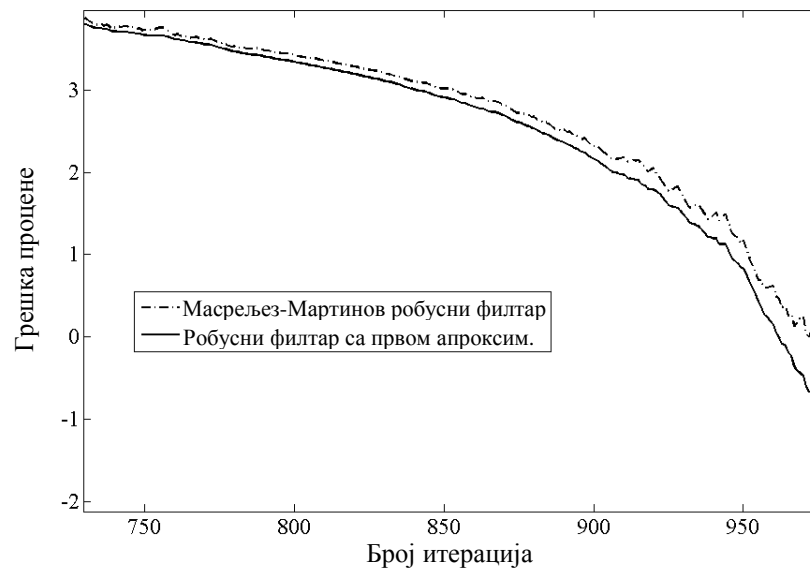
$$W = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

Шум мерења има негаусову расподелу дефинисану као, (4.8):

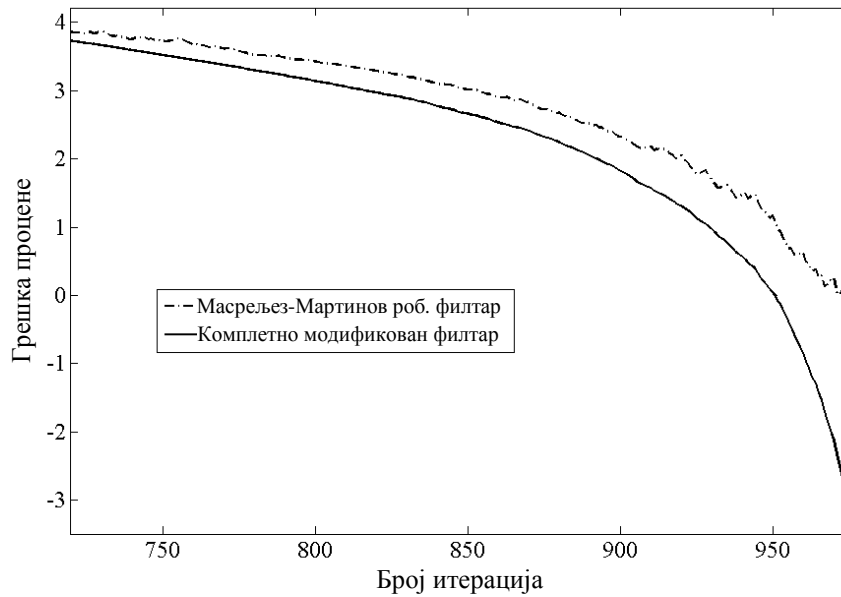
$$\mathcal{P}_e = \{p(e) : p(e) = (1-0.1) \cdot \mathcal{N}(0;0.1) + 0.1 \cdot \mathcal{N}(0;10)\}. \quad (4.38)$$

Грешка процене параметара је дефинисана у смислу квадратне грешке као:

$$SE = \ln \left(\left\| \hat{\theta}(k) - \theta(k) \right\|^2 \right). \quad (4.39)$$



Слика 4.2 Упоредни приказ грешке алгоритма после прве модификације и оригиналног Масрељез-Мартиновог филтра, добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon = 0.1$



Слика 4.3 Упоредни приказ грешке коначно модификованог алгоритма и оригиналног Масрељез-Мартиновог филтара, добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon = 0.1$

4.2 Резултати симулација

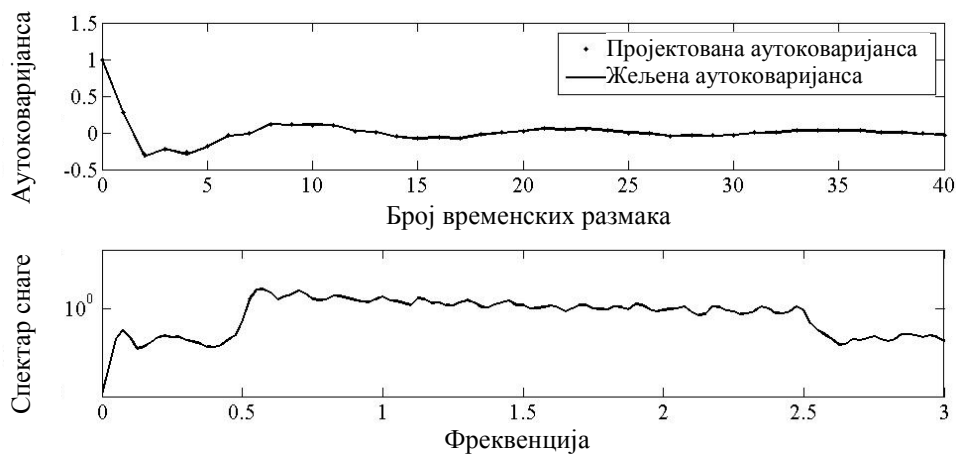
Већ је назначено да промена параметара има форму случајног корака, видети (4.1). Да би илустровали перформансе предложене робусне процедуре за оцену параметара, разматра се модел четвртог реда чији временски променљив вектор параметара има очекивану вредност, [47-48, 60]:

$$\bar{\theta} = [-0.9131 \quad -0.3523 \quad 0.1118 \quad 0.2318 \quad -0.0413 \quad 0.0766 \quad 0.0115 \quad 0.0647]^T. \quad (4.40)$$

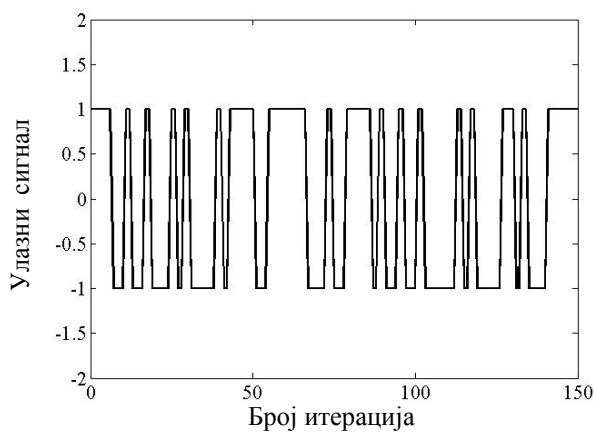
У примеру идентификације биће посматран случај када коваријациона матрица шума процеса $w(k)$ има следећу форму:

$$W(k) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,2 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,2 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5 \cdot 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Улазни сигнал је бинарни низ $[-1,1]$ генерисан помоћу алгоритма са помичним хоризонтом, са изабраним параметрима $m=1$, $N=10^4$ и $n=40$, $\underline{\omega}=0.5$, $\bar{\omega}=2.5$, видети слику 4.3.



Слика 4.4 Карактеристике генерисаног псеудо шума ограниченог опсега „ $1/f$ ” за изабране параметре: $m=1$, $N=10^4$ и $n=40$

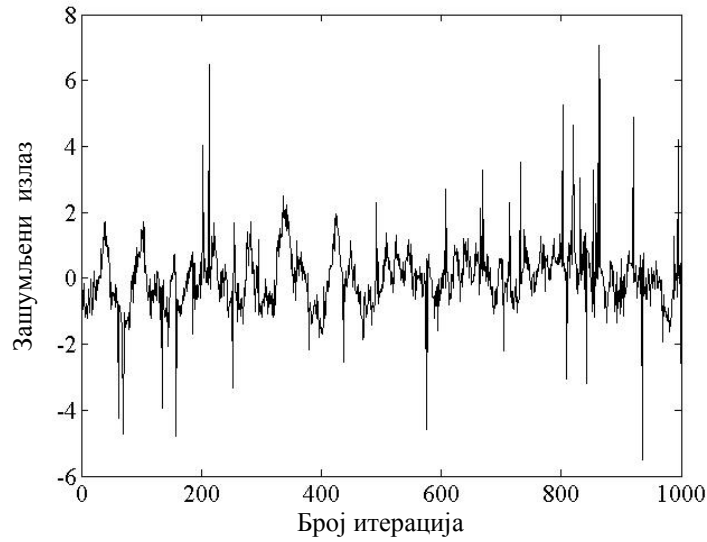


Слика 4.5 Улазни бинарни сигнал генерисаног псеудо шума са ограниченим опсегом „ $1/f$ ”, за параметре $m=1$, $N=10^4$ и $n=40$

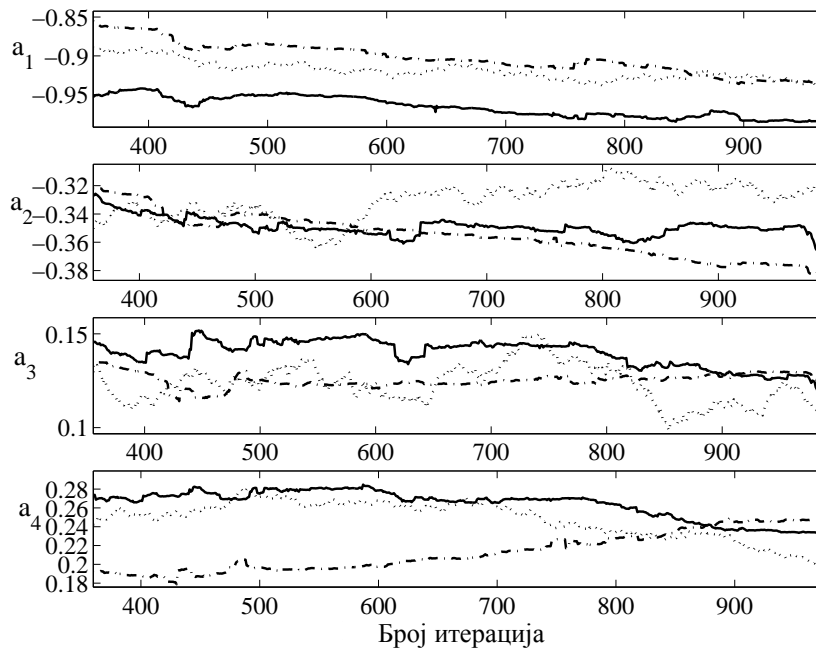
Током симулација претпостављено је да шум има негаусову расподелу, (4.8):

$$e(k) \sim (1-\varepsilon)\mathcal{N}(0,0.1) + \varepsilon\mathcal{N}(0,10). \quad (4.42)$$

Слике 4.5 - 4.8 приказују мерени излаз система, процене параметара и грешку процене, у случају контаминације $\varepsilon=0.05$.

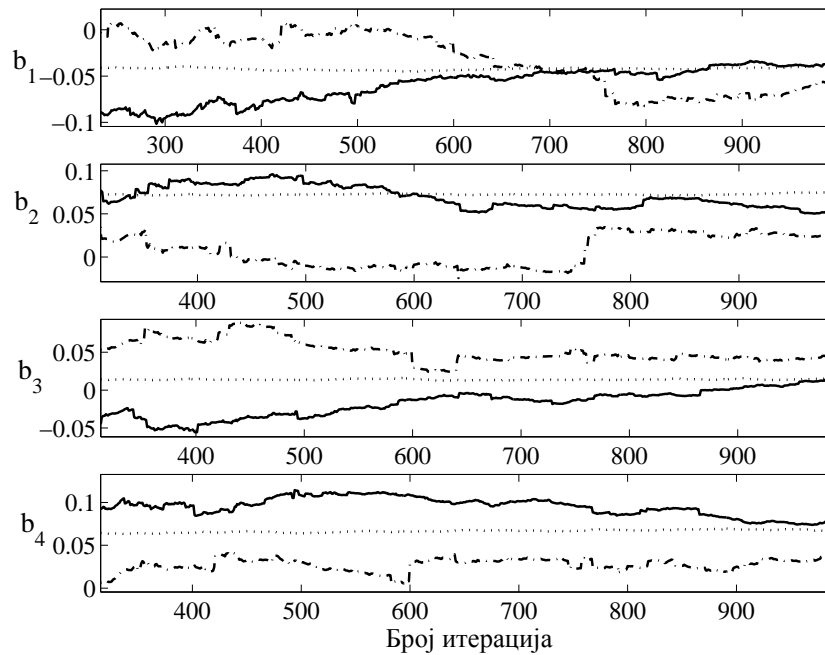


Слика 4.6 Измерени излаз система при контаминацији $\varepsilon = 0.05$



Слика 4.7 Процене параметара a_i ($i = \overline{1,4}$) добијене при контаминацији $\varepsilon = 0.05$

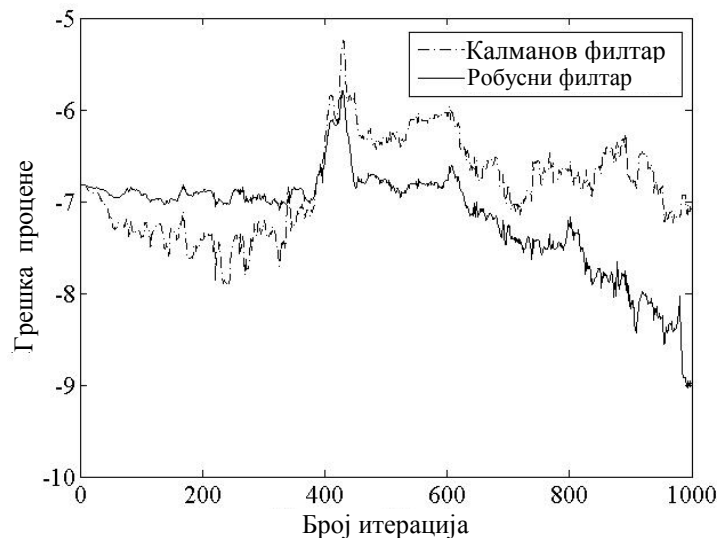
- (—): Робусни филтар,
- (-): Калманов филтар,
- (..): Тачне вредности параметара



Слика 4.8 Процене параметара $b_i (i = \overline{1,4})$ добијене при контаминацији $\varepsilon = 0.05$
 (—): Робусни филтар,
 (-.): Калманов филтар,
 (..): Тачне вредности параметара

Резултати симулација су поређени у смислу квадратне грешке, дефинисане као:

$$SE = \ln \left(\left\| \hat{\theta}(k) - \theta(k) \right\|^2 \right). \quad (4.43)$$

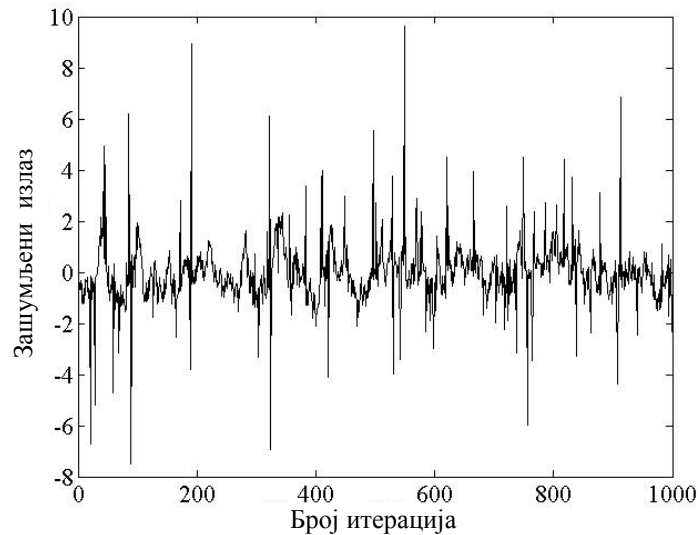


Слика 4.9 Грешка процене, добијена у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon = 0.05$

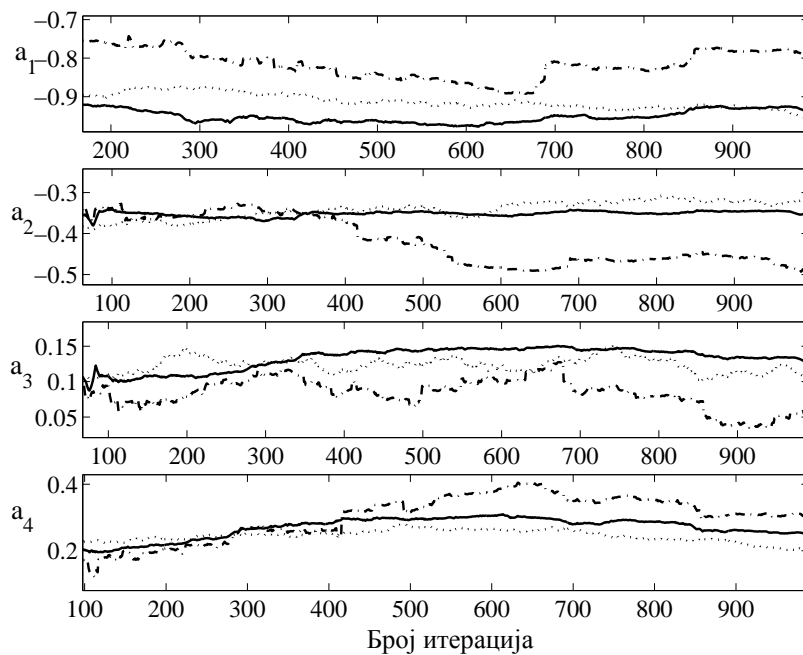
Изложени резултати показују да је класичан Калманов филтар веома осетљив на присуство негаусовог шума мрења, на супрот предложеном робусном Калмановом филтру.

Предложени робусни Калманов филтар даје сличне резултате уобичајеном Калмановом филтру, у случају стационарног чистог Гаусовог шума.

Слике 4.9 - 4.12 приказују мерени излаз система, процене параметара и грешку процене, у случају контаминације $\varepsilon = 0.1$.

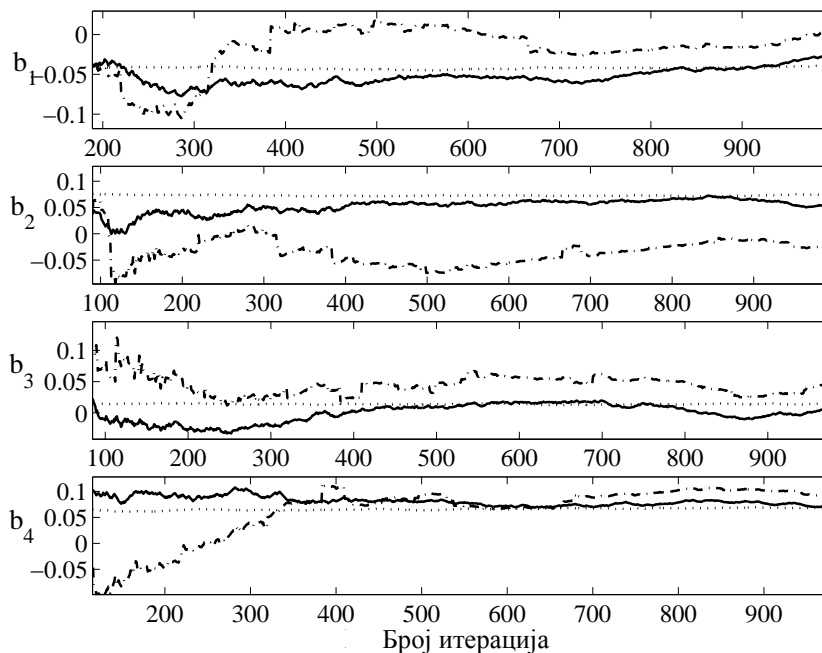


Слика 4.10 Измерени излаз система при контаминацији $\varepsilon = 0.1$

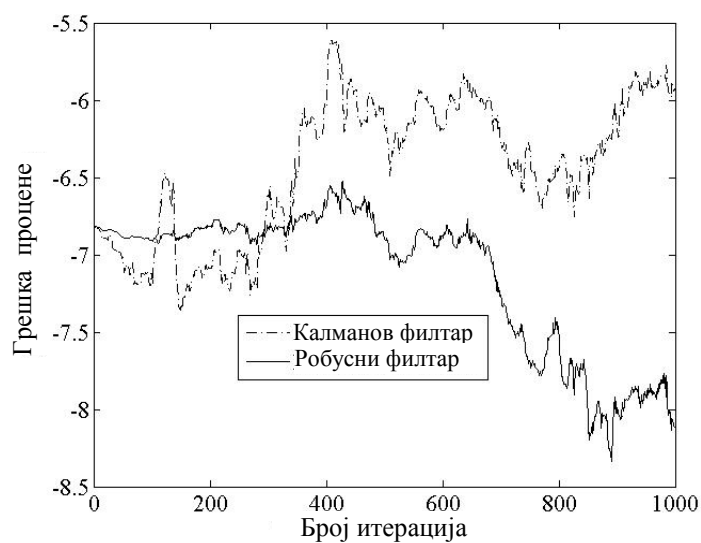


Слика 4.11 Процене параметара a_i ($i = \overline{1,4}$) добијене при контаминацији $\varepsilon = 0.1$

- (—): Робусни филтар,
- (-): Калманов филтар,
- (..): Тачне вредности параметара

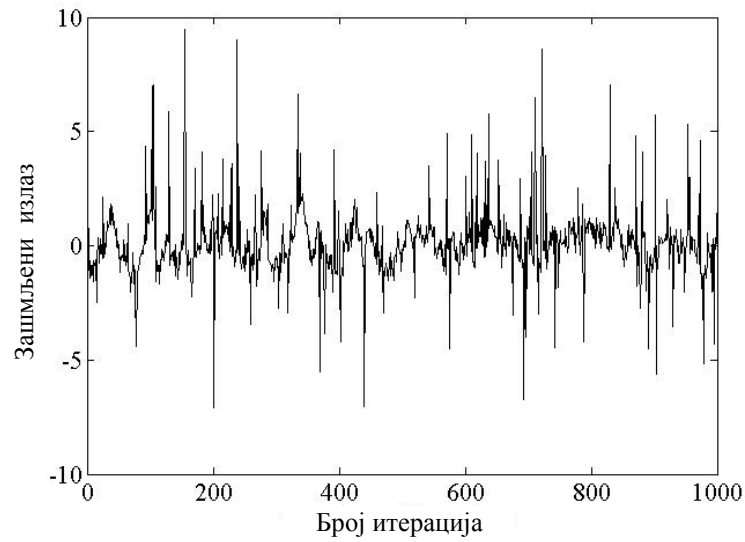


Слика 4.12 Процене параметара $b_i (i = \overline{1,4})$ добијене при контаминацији $\varepsilon = 0.1$
 (—): Робусни филтар,
 (-.): Калманов филтар,
 (..): Тачне вредности параметара

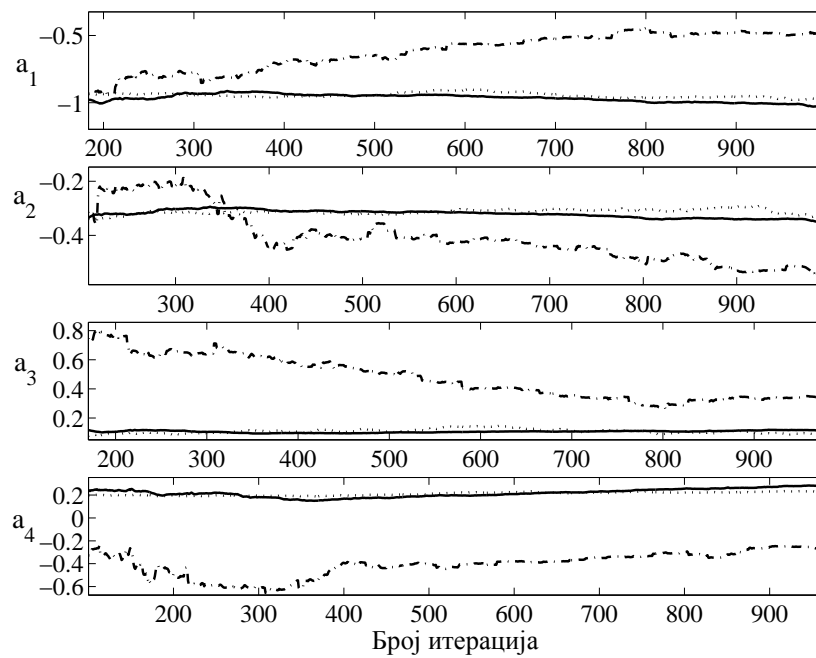


Слика 4.13 Грешка процене, добијена у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon = 0.1$

Слике 4.14 - 4.17 приказују мерени излаз система, процене параметара и грешку процене, у случају контаминације $\varepsilon = 0.15$.

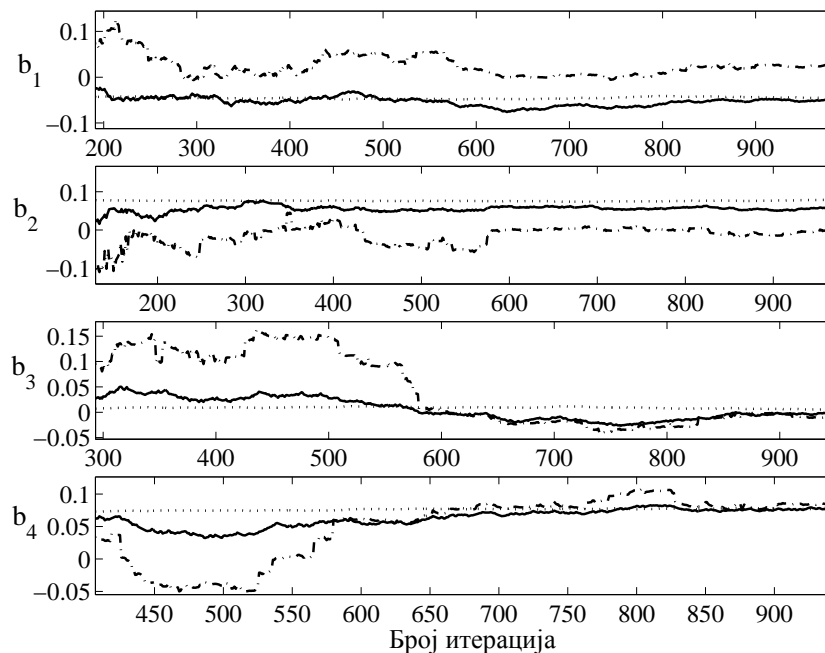


Слика 4.14 Измерени излаз система при контаминацији $\varepsilon = 0.15$



Слика 4.15 Процене параметара $a_i (i = \overline{1,4})$ добијене при контаминацији $\varepsilon = 0.15$

- (—): Робусни филтар,
- (-): Калманов филтар,
- (..): Тачне вредности параметара



Слика 4.16 Процене параметара $b_i (i = \overline{1,4})$ добијене при контаминацији $\varepsilon = 0.15$

- (—): Робусни филтар,
- (-.): Калманов филтар,
- (..): Тачне вредности параметара



Слика 4.17 Грешка процене, добијена у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon = 0.15$

Поређењем грешака процене при различитим степенима контаминације, јасно се види да супериорност предложеног робусног филтра у односу на Калманов филтар расте са повећањем контаминације, видети слике 4.9, 4.13, 4.17.



Робусна идентификација стохастичких нелинеарних система

У овом делу се разматра естимација стања и параметара мултиваријабилних стохастичких нелинеарних система са временски променљивим параметрима. Промена параметара описана је методом случајног корака у којој је одговарајући шум моделиран као Гаусов стохастички процес. Посматраће се случај када шум процеса има Гаусову расподелу, а шум мерења негаусову расподелу. Као оквир за реализацију оваквог алгоритма узет је Масрељез-Мартинов филтар (робусни Калманов филтар). Да би се повећала флексибилност, у смислу практичне примене робусног Калмановог филтра, извршена је хеуристичка модификација. Резултати симулација су показали да тако модификовани проширени Масрељез-Мартинов филтар превазилази перформансе филтра без уведених модификација.

5.1 Модификовани проширени Масрељез-Мартинов филтар

Посматра се нелинеарни, стохастички мултиваријабилни систем описан следећим једначинама стања и мерења:

$$x(k) = f_{k-1}(x(k-1), u(k-1), \theta(k-1), w(k-1)), \quad (5.1)$$

$$y(k) = h_k(x(k), \theta(k), e(k)). \quad (5.2)$$

Величина $x(\cdot)$ је вектор стања, $y(\cdot)$ је вектор излаза система, а $w(\cdot)$ и $e(\cdot)$ су шум процеса и шум мерења. Претпоставља се да је шум процеса Гаусов $w(k) \sim \mathcal{N}(0, Q(k))$ где је $Q(k)$ коваријациона матрица.

Шум мерења $e(k)$ је негаусов, односно припада приближно нормалној класи расподела:

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \{p(e) : p(e) = (1-\varepsilon)p_N(e) + \varepsilon q(e)\}, \quad (5.3)$$

при чему $p(\cdot)$ означава густину вероватноће. Као у претходном поглављу, густина вероватноће $p(e)$ представља смешу нормалне (Гаусове) расподеле

$$p_N(e) \sim \mathcal{N}(0, R_1(k)), \quad (5.4)$$

и произвољне густине вероватноће $q(e)$

$$q(e) \sim \mathcal{N}(0, R_2(k)), \quad (5.5)$$

где су $R_1(k)$ и $R_2(k)$ коваријационе матрице номиналног и контаминирајућег члана негаусове расподеле (5.3), респективно, а параметар ε означава степен контаминације.

Након развијања једначине стања у Тејлоров ред у околини тачке $x(k-1) = \hat{x}(k-1|k-1)$, добија се:

$$x(k) = F(k-1)x(k-1) + f_{k-1}(\hat{x}(k-1|k-1), u(k-1), \theta(k-1), 0) - F(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) + L(k-1)w(k-1) \quad (5.6)$$

односно,

$$x(k) = F(k-1)x(k-1) + \tilde{u}(k-1) + \tilde{w}(k-1), \quad (5.7)$$

где су Јакобијеве матрице нелинеарне функције стања f_k :

$$F(k) = \frac{\partial f_k}{\partial x} \Big|_{\hat{x}(k|k)}, \quad L(k) = \frac{\partial f_k}{\partial w} \Big|_{\hat{x}(k|k)}. \quad (5.8)$$

Познати сигнал $\tilde{u}(k-1)$ и сигнал шума $\tilde{w}(k)$ су дефинисани на следећи начин:

$$\tilde{u}(k) = f_k(\hat{x}(k|k), u(k), \theta(k), 0) - F(k)\hat{x}(k|k), \quad (5.9)$$

$$\tilde{w}(k) = L(k)w(k). \quad (5.10)$$

Пошто се зна да је $w(k) \sim \mathcal{N}(0, Q(k))$, то ће бити

$$E\{\tilde{w}(k)\} = L(k)E\{w(k)\} = 0, \quad (5.11)$$

$$E\{\tilde{w}(k)\tilde{w}(j)^T\} = E\{L(k)w(k)w^T(j)L^T(k)\} = L(k)Q(k)L^T(k). \quad (5.12)$$

Сада се може линеаризовати једначина мерења око $x(k) = \hat{x}(k|k-1)$

$$y(k) = H(k)x(k) + h_k(\hat{x}(k|k-1), \theta(k), 0) - H(k)\hat{x}(k|k-1) + V(k)e(k), \quad (5.13)$$

$$y(k) = H(k)x(k) + z(k) + \tilde{v}(k), \quad (5.14)$$

где су Јакобијеве матрице нелинеарне функције мерења h_k :

$$H(k) = \frac{\partial h_k}{\partial x} \Big|_{\hat{x}(k|k-1)}, \quad V(k) = \frac{\partial h_k}{\partial v} \Big|_{\hat{x}(k|k-1)}. \quad (5.15)$$

Сигнал $z(k)$ и сигнал шума $\tilde{v}(k)$ су дефинисани на следећи начин:

$$z(k) = h_k(\hat{x}(k|k-1), \theta(k), 0) - H(k)\hat{x}(k|k-1), \quad (5.16)$$

$$\tilde{v}(k) = V(k)e(k). \quad (5.17)$$

Линеарна једначина стања (5.6) и линеарна једначина мерења (5.13) се могу представити на следећи начин:

$$x(k) = F(k-1)x(k-1) + \tilde{u}(k-1) + \tilde{w}(k-1), \quad (5.18)$$

$$y(k) = H(k)x(k) + z(k) + \tilde{v}(k). \quad (5.19)$$

У референци [55], Масрељез и Мартин за наведену ситуацију предложили су робусни Калманов филтар. Овај филтар има малу осетљивост на присуство аутлајера у поређењу са стандардним Калмановим филтром изведеним за случај да величине $w(\cdot)$ и $e(\cdot)$ имају Гаусову расподелу.

Применом Масрељез-Мартиновог филтра на линеарне једначине (5.18)-(5.19), добићемо проширени Масрељез-Мартинов филтар. Дакле, проширени Масрељез-Мартинов филтар за нелинеарни систем дефинисан релацијама (5.1)-(5.2) има следећу форму:

$$\hat{x}(k|k-1) = f_{k-1}(\hat{x}(k-1|k-1), u(k-1), \theta(k-1), 0), \quad (5.20)$$

$$P(k|k-1) = F(k-1)P(k-1|k-1)F^T(k-1) + L(k-1)Q(k-1)L^T(k-1), \quad (5.21)$$

$$K(k) = P(k|k-1)H^T(k)T^T(k), \quad (5.22)$$

$$v(k) = T(k)[y(k) - h_k(\hat{x}(k|k-1), \theta(k), 0)], \quad (5.23)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\Psi(v(k)), \quad (5.24)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k)K^T(k)E_{\mathcal{P}_k}\{\psi'(v(k))\}, \quad (5.25)$$

при чему су

$$F(k) = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x} \right|_{\hat{x}(k|k)}, \quad L(k) = \left. \frac{\partial f_k}{\partial w} \right|_{\hat{x}(k|k)}, \quad H(k) = \left. \frac{\partial h_k}{\partial x} \right|_{\hat{x}(k|k-1)}, \quad V(k) = \left. \frac{\partial h_k}{\partial v} \right|_{\hat{x}(k|k-1)}. \quad (5.26)$$

Трансформација $T(k)$ уведена је због тога да би иновациона променљива $e(k)$ задовољила услове симетричности одређених густина вероватноће као и услове за маргиналне вероватноће [55].

Нелинеарна функција $\psi(\cdot)$ је за класу ε -контаминираних расподела вероватноћа Хуберова функција и добија се применом теорије игара у статистици [13]. Она се дефинише на основу најнеповољније расподеле вероватноће за задату класу расподела вероватноће, погледати слику 4.1.

Најпре је потребно дефинисати трансформациону матрицу $T(k)$. Нетрансформисани резидуал гласи

$$\varepsilon(k) = y(k) - H(k)\hat{x}(k|k-1). \quad (5.27)$$

Математичко очекивање и коваријациона матрица резидула (5.27) су:

$$E\{\varepsilon(k)\} = E\{y(k)\} - H(k)E\{\hat{x}(k|k-1)\} = 0, \quad (5.28)$$

$$E\{\varepsilon(k)\varepsilon^T(k)\} = R(k) + H(k)P(k|k-1)H^T(k). \quad (5.29)$$

при чему су $R(k) = E\{y(k)y^T(k)\}$ и $P(k|k-1) = E\{\hat{x}(k|k-1)\hat{x}^T(k|k-1)\}$. Пошто шум мерења има негаусову расподелу:

$$p(e(k)) = (1 - \varepsilon)\mathcal{N}(0, R_1(k)) + \varepsilon\mathcal{N}(0, R_2(k)), \quad (5.30)$$

уз коришћење (5.17), добија се да је коваријациона матрица шума $\tilde{v}(k)$ у линеарној једначини мерења (5.19):

$$R(k) = (1 - \varepsilon)V(k)R_1(k)V^T(k) + \varepsilon V(k)R_2(k)V^T(k). \quad (5.31)$$

Трансформисани резидуал гласи

$$v(k) = T(k)\varepsilon(k). \quad (5.32)$$

Математичко очекивање и коваријациона матрица трансформисаног резидуала су:

$$E\{v(k)\} = T(k)E\{\varepsilon(k)\} = 0, \quad (5.33)$$

$$E\{v(k)v^T(k)\} = T(k)\left[R(k) + H(k)P(k|k-1)H^T(k)\right]T^T(k). \quad (5.34)$$

У случају да трансформациона матрица има облик

$$T(k) = \left[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.35)$$

коваријациона матрица трансформисаног резидуала (5.34) биће I , па ће трансформисани резидуал имати нормалну расподелу $\mathcal{N}(0, I)$. На основу релације (5.35), види се да трансформација $T(k)$ зависи од контаминиране расподеле која није априори позната, па га је стога тешко практично имплементирати. Зато се усваја следећа форма трансформационе матрице

$$T(k) = \left[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R_1(k)\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.36)$$

Следећи корак је дефинисање $E_{\mathcal{Q}_\varepsilon}\{\psi'(\cdot)\}$. Сагласно референци [55], добија се да је

$$E_{\mathcal{Q}_\varepsilon}\{\psi'(\cdot)\} = (1 - \varepsilon)[\Phi(k) - \Phi(-k)] = (1 - \varepsilon)[2\Phi(k) - 1], \quad 1 \leq k \leq 3. \quad (5.37)$$

Величина $\Phi(k)$ је функција стандардне нормалне расподеле

$$\Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (5.38)$$

Основни недостатак оригинално предложеног Масрељез-Мартиновог филтра [55] је што укључује две величине које није лако одредити у практичним условима. То су скаларна трансформација $T(k)$ као и члан $E_{\mathcal{Q}_\varepsilon}\{\psi'(v(k))\}$ у апостериорној коваријационој матрици, (слично скаларном случају у претходном поглављу, видети релацију (4.23)).

Такође, при гаусовим шумовима оригинални Масрељез-Мартинов филтар се не понаша тако добро као стандардни Калманов филтар.

За повећање практичне вредности алгоритма (5.20)-(5.25), извршене је следећа хеуристика:

- Члан $E_{\mathcal{Q}_\varepsilon}\{\psi'(v(k))\}$ апроксимиран је реализацијом $\Psi'(v(k))$.

Сада алгоритам (5.20)-(5.25) добија следећу, модификовану форму:

$$\hat{x}(k|k-1) = f_{k-1}(\hat{x}(k-1|k-1), u(k-1), \theta(k-1), 0), \quad (5.39)$$

$$P(k|k-1) = F(k-1)P(k-1|k-1)F^T(k-1) + L(k-1)Q(k-1)L^T(k-1), \quad (5.40)$$

$$K(k) = P(k|k-1)H^T(k)T^T(k), \quad (5.41)$$

$$v(k) = T(k) \left[y(k) - h_k(\hat{x}(k|k-1), \theta(k), 0) \right], \quad (5.42)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\Psi(v(k)), \quad (5.43)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k)\Psi'(v(k))K^T(k), \quad (5.44)$$

$$\Psi'(v(k)) = \begin{bmatrix} \psi'(v_1(k)) & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \psi'(v_r(k)) \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

$$T(k) = \left[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R_1(k) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.46)$$

при чему су:

$$F(k) = \frac{\partial f_k}{\partial x} \Big|_{\hat{x}(k|k)}, \quad L(k) = \frac{\partial f_k}{\partial w} \Big|_{\hat{x}(k|k)}, \quad H(k) = \frac{\partial h_k}{\partial x} \Big|_{\hat{x}(k|k-1)}, \quad V(k) = \frac{\partial h_k}{\partial v} \Big|_{\hat{x}(k|k-1)}. \quad (5.47)$$

5.1.1 Резултати симулација

Алгоритам (5.39) - (5.47) омогућава значајно поједностављену примену робусних филтера у пракси. Интензивне симулације оправдале су овакве интервенције. Понашање алгоритма са предложеним модификацијама биће разматрано на проблему естимације стања нелинеарног система другог реда који је представљен следећим једначинама у простору стања:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) + 0.001x_2^2(k) \\ x_2(k) + 0.001(-x_1(k) + (x_1^2(k) + x_2^2(k) - 1) \cdot x_2(k)) \end{bmatrix} + w(k-1), \quad (5.48)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \cdot x_2(k) \\ x_1(k)e^{-x_2(k)} \end{bmatrix} + e(k). \quad (5.49)$$

Шум процеса $w(k)$ има Гаусову расподелу са нултом средњом вредношћу и коваријационом матрицом

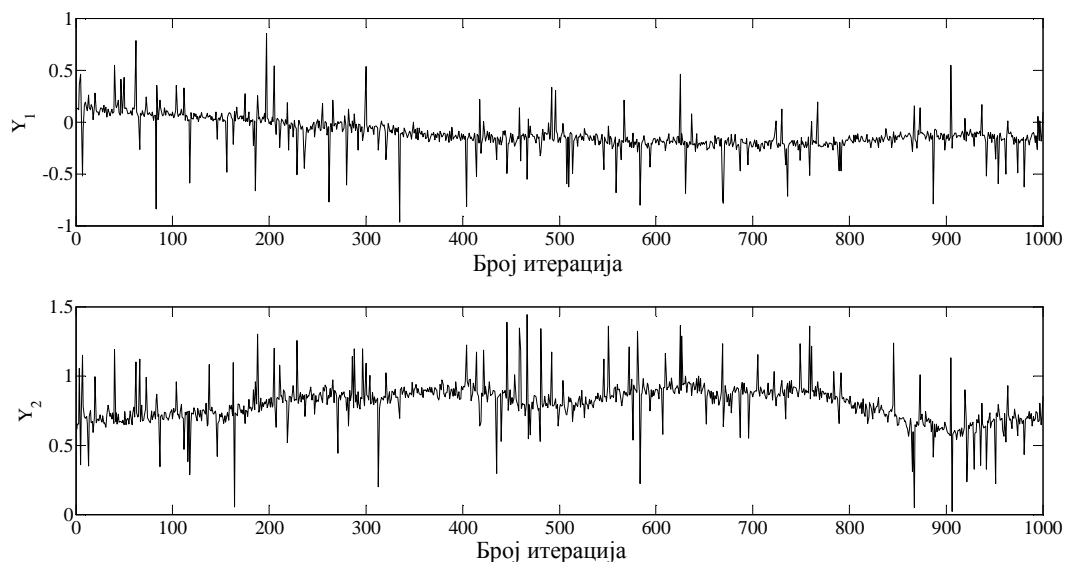
$$Q(k) = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

Шум мерења $e(k)$ има негаусову расподелу дефинисану као:

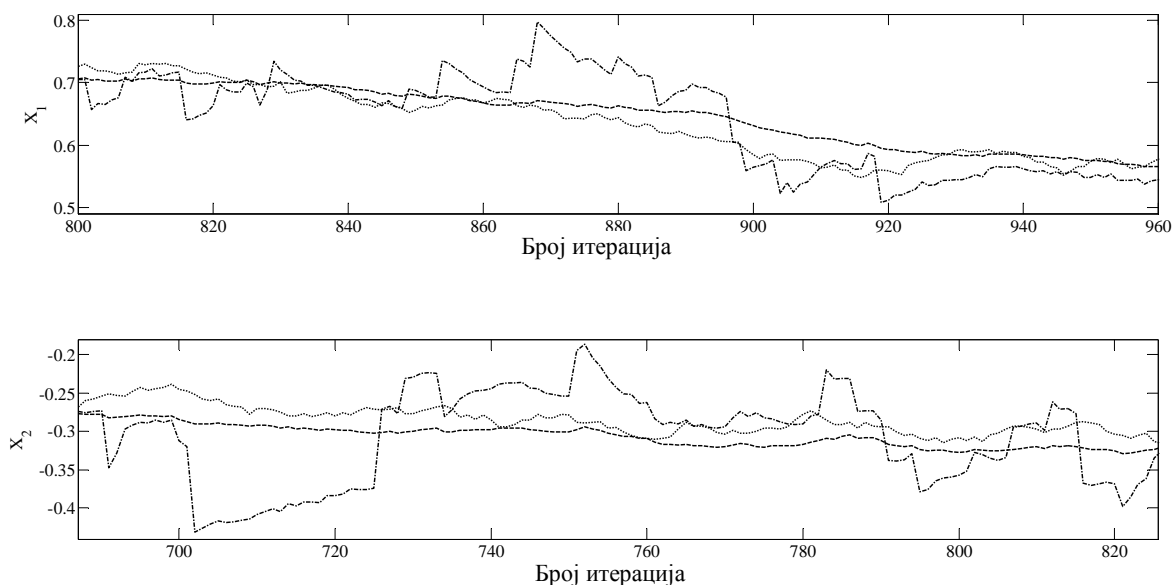
$$\mathcal{P}_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} p(e_1) = (1 - \varepsilon_1) \cdot \mathcal{N}(0; 0.1) + \varepsilon_1 \cdot \mathcal{N}(0; 10), \\ p(e_2) = (1 - \varepsilon_2) \cdot \mathcal{N}(0; 0.1) + \varepsilon_2 \cdot \mathcal{N}(0; 10) \end{array} \right\}. \quad (5.51)$$

Најпре су упоређени проширени Масрељез-Мартинов филтар (5.20)-(5.25) и стандардни проширени Калманов филтар.

Слике 5.1-5.3 показују излазе система, процене стања и квадратну грешку за случај када су вредности контаминацијама $\varepsilon_1 = 0.1$ и $\varepsilon_2 = 0.15$.



Слика 5.1 Излази система при контаминацијама $\varepsilon_1 = 0.1$ и $\varepsilon_2 = 0.15$



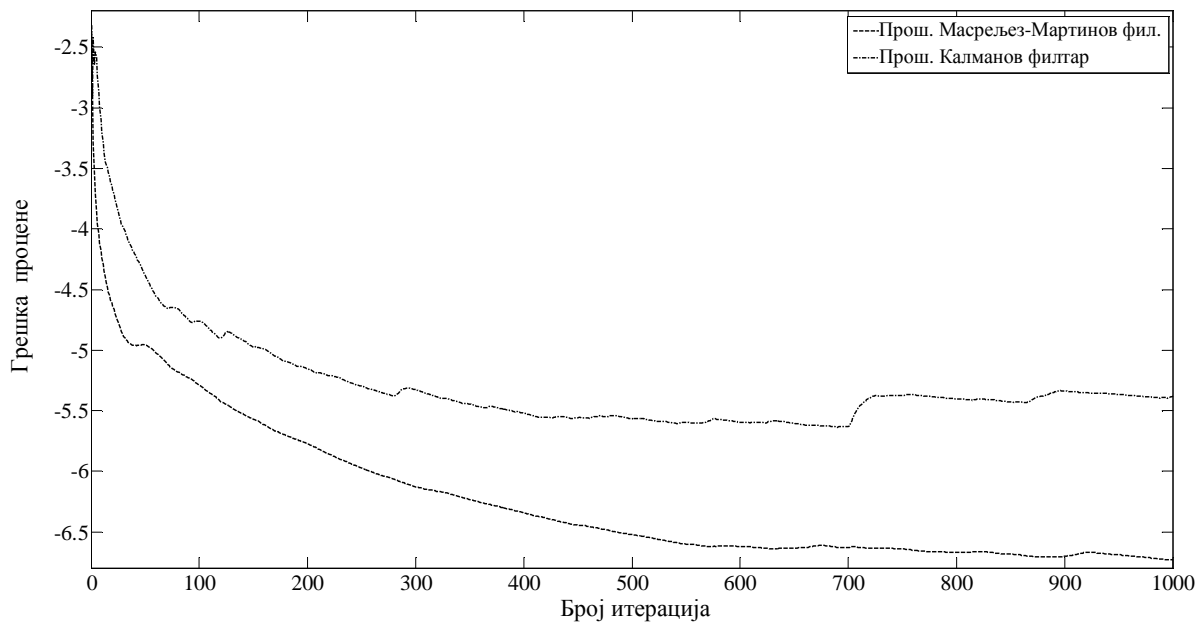
Слика 5.2 Процене стања x_i ($i = 1, 2$) добијене у присуству негаусовог шума при

контаминацијама $\varepsilon_1 = 0.1$ и $\varepsilon_2 = 0.15$

(-): Проширени Калманов филтар,

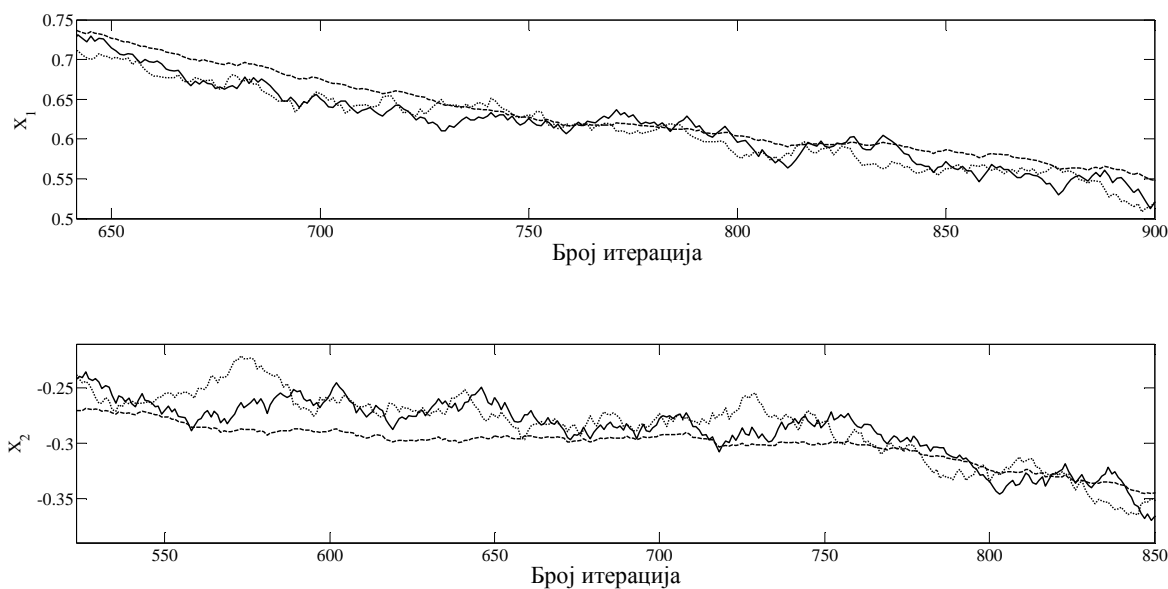
(--): Проширени Масрељез-Мартинов филтар,

(..): Тачне вредности стања



Слика 5.3 Грешка процене, добијена у присуству негаузовог шума при контаминацијама $\varepsilon_1 = 0.1$ и $\varepsilon_2 = 0.15$

У другом кораку се пореде проширени Масрељез-Мартинов филтар (5.20) - (5.25) и предложени алгоритам са апроксимацијом $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \psi'(\cdot) \} \cong \psi'(\cdot)$ (5.39)-(5.47). На сликама 5.4 и 5.5 су приказане процене стања и квадратне грешке за случај када су контаминације $\varepsilon_1 = 0.1$ и $\varepsilon_2 = 0.15$.

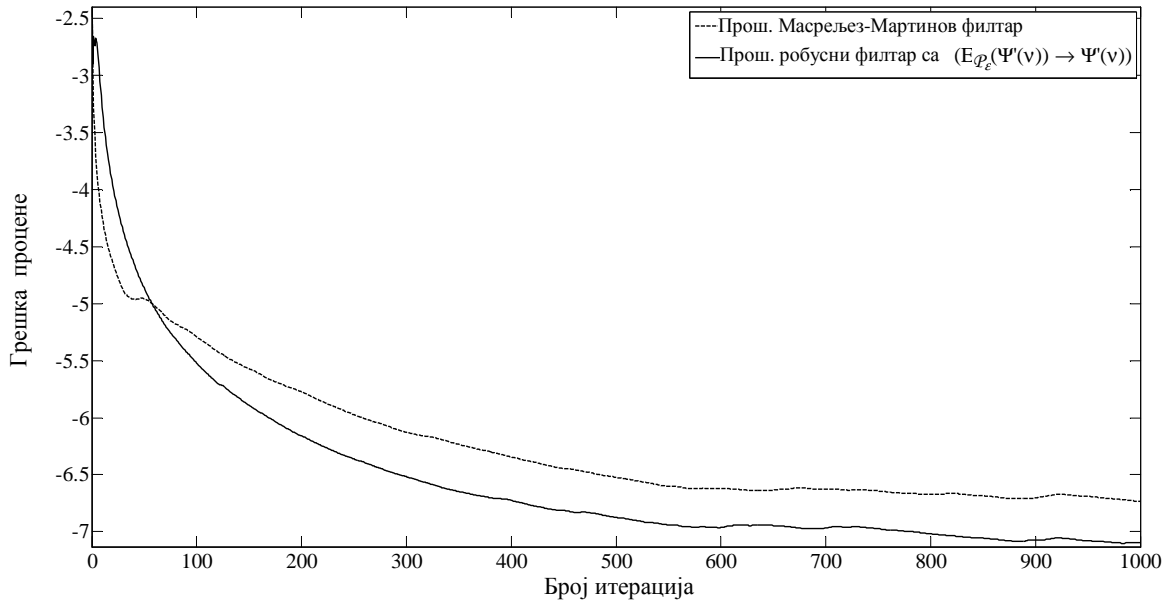


Слика 5.4 Процене стања x_i ($i = 1, 2$) добијене у присуству негаузовог шума при контаминацијама $\varepsilon_1 = 0.1$ и $\varepsilon_2 = 0.15$

(-): Проширени Масрељез-Мартинов филтар са $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \psi'(\cdot) \} \cong \psi'(\cdot)$,

(--): Проширени Масрељез-Мартинов филтар,

(..): Тачне вредности стања



Слика 5.5 Грешка процене, добијена у присуству негаусовог шума при контаминацијама $\varepsilon_1 = 0.1$ и $\varepsilon_2 = 0.15$

Важно је уочити да предложена хеуристичка модификација $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \psi'(\cdot) \} \cong \psi'(\cdot)$ повећава брзину конвергенције (5.39)-(5.47) на почетним итерацијама. Наиме, из релација (5.40), (5.41) и (5.44) за појачање робусног Калмановог филтра добија се:

$$K(k) = \left[F(k-1)P(k-1|k-2)F^T(k-1) - F(k-1)K(k-1)\Psi'(v(k-1))K^T(k-1)F^T(k-1) + L(k-1)Q(k-1)L^T(k-1) \right] H^T(k)T^T(k) \quad (5.52)$$

Уколико је

$$|v(k)| > k_\varepsilon, \quad v(k) = T(k) \left[y(k) - h_k(\hat{x}(k|k-1), \theta(k), 0) \right], \quad (5.53)$$

релација (5.52) постаје

$$K(k) = \left[F(k-1)P(k-1|k-2)F^T(k-1) + L(k-1)Q(k-1)L^T(k-1) \right] H^T(k)T^T(k), \quad (5.54)$$

јер је уз услов (5.53) $\psi'(v(k)) = 0$ (видети слику 4.1).

Упоређујући релације (5.52) и (5.54) види се да је појачање $K(k)$ у другом случају веће. То значи да кад код су грешке оцењивања веће, појачање филтра се повећава и самим тим повећава брзину конвергенције оцена.

Важно је нагласити да се у случају мале коваријационе матрице параметара, утицај трансформације резидуала $T(k)$ може занемарити и тиме додатно повећати практична употребљивост предложеног алгоритма идентификације. Наиме, мерењем брзине извршавања алгоритма на рачунару, може се видети да се алгоритам са додатном апроксимацијом $T(k) = I$ извршава брже од Масрељез-Мартиновог филтра, јер се током итерација не троши време на срачунавање матрице трансформације (5.46). Интензивне симулације су оправдале овакве интервенције. Конкретно, на примеру (5.48)-(5.49), за 1000

итерација, комплетно модификовани алгоритам је 3 пута бржи од проширеног Масрељез-Мартиновог филтра. Такође као за случај модификованог Масрељез-Мартиновог филтра, резултати су добијени симулацијама на рачунару са процесором Intel(R) Core(TM) i3 2120 CPU 3.3 GHz, са 4GB RAM инсталиране меморије, који ради под 64-bit оперативним системом.

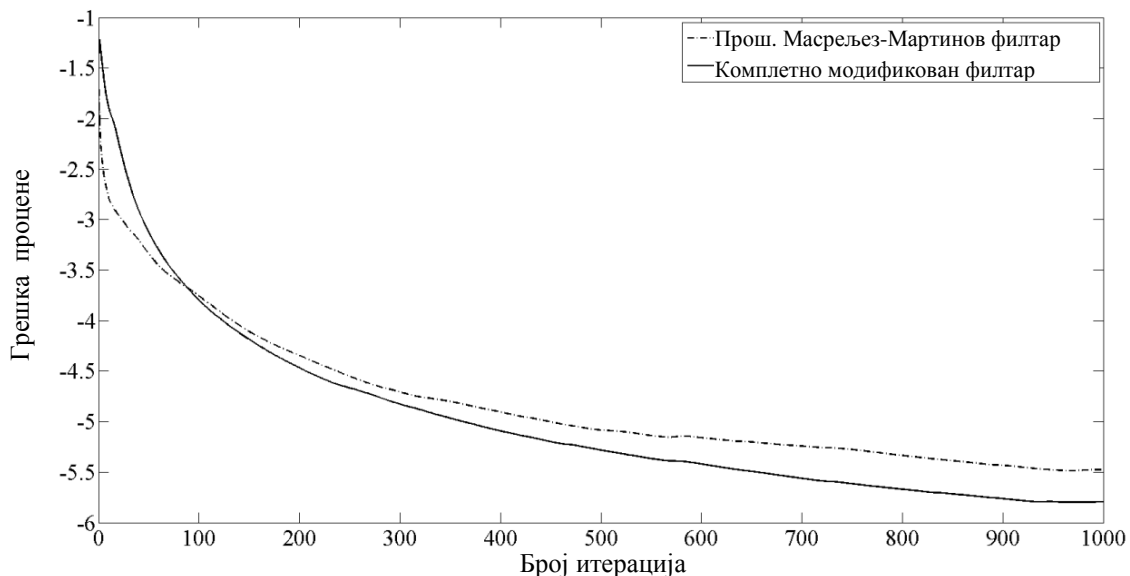
Посматрајмо систем (5.48)-(5.49) у случају да шум процеса $w(k)$ има Гаусову расподелу са нултом средњом вредношћу и коваријационом матрицом:

$$Q(k) = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Шум мерења $e(k)$ има негаусову расподелу дефинисану помоћу релације:

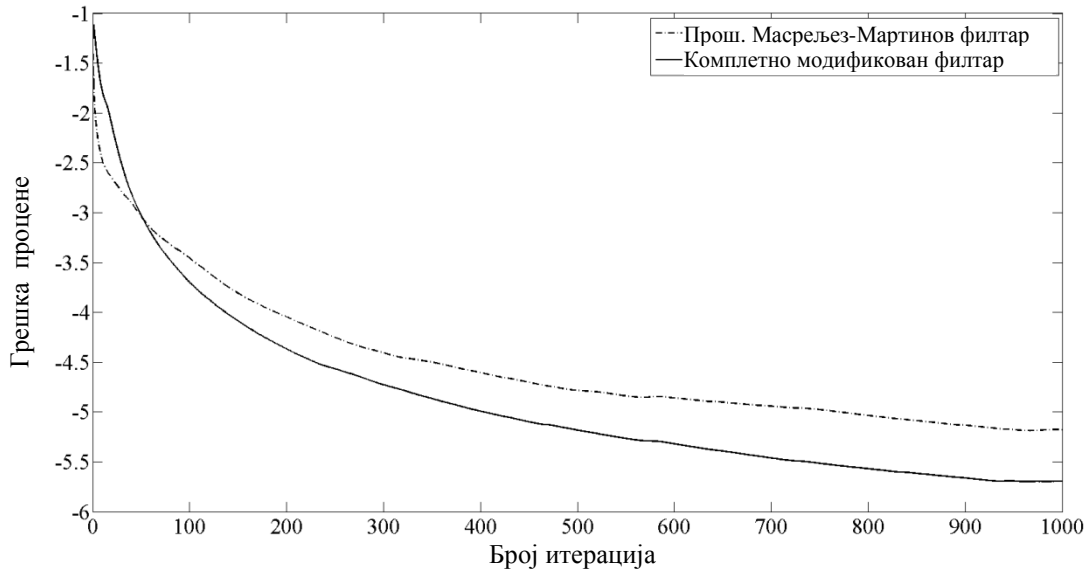
$$\mathcal{P}_e = \left\{ \begin{array}{l} p(e_1) = (1 - \varepsilon_1) \cdot \mathcal{N}(0; 0.1) + \varepsilon_1 \cdot \mathcal{N}(0; 10), \\ p(e_2) = (1 - \varepsilon_2) \cdot \mathcal{N}(0; 0.1) + \varepsilon_2 \cdot \mathcal{N}(0; 10) \end{array} \right\}. \quad (5.56)$$

На Слици 5.6 су упоређене грешке процене у случају када се естимација параметара врши са проширеним Масрељез-Мартиновим филтром и у случају када је примењен предложени проширени робусни филтар са обе извршене модификације ($E_{\mathcal{P}_e} \{ \psi'(\cdot) \} \equiv \psi'(\cdot)$ и $T(k) = I$). Посматра се случај при степену контаминација $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$.



Слика 5.6 Упоредни приказ грешке коначно модификованог алгоритма и оригиналног Масрељез-Мартиновог алгоритма, добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$

Са слике 5.6 се јасно види да је естимација прецизнија (мања грешка) у случају када се користи предложени проширени робусни филтар. Такође, може се закључити да је предложени робусни алгоритам идентификације робуснији од уобичајеног Масрељез-Мартиновог алгоритма, јер се са повећавањем степена контаминације значајно не мењају перформансе алгоритма, видети слику 5.7.



Слика 5.7 Упоредни приказ грешке коначно модификованог алгоритма и оригиналног Масрељез-Мартиновог алгоритма, добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2$

5.2 Алгоритам естимације параметара и стања

Прво ћемо описати промену параметара посматраног нелинеарног система. Могуће је увести различите промене параметара (скоковите, континуалне). Претпоставићемо да промена параметара има форму случајног корака

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \omega(k), \quad (5.57)$$

при чему је стохастички процес $\omega(k)$ Гаусов са средњом вредношћу нула и коваријационом матрицом $W(k)$.

Слично напомени 4.1, модел (5.57) је такође могуће представити у општијој форми:

$$\theta(k+1) = C\theta(k) + \omega(k), \quad (5.58)$$

при чему је C априори позната несингуларна матрица. Ова матрица је погодна за уношење априорних информација о феномену чија се идентификација врши. Из релације (5.58) произилази и могућност моделовања детерминистички променљивих параметара:

$$\theta(k+1) = C\theta(k). \quad (5.59)$$

Да би проширени робусни Калманов филтар могли да користимо за процену параметара, потребно је вектор стања $x(t)$ проширити са вектором параметара $\theta(t)$, па долазимо до следеће проширене форме:

$$z(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k-1}(x(k-1), u(k-1), \theta(k-1), w(k-1)) \\ g_{k-1}(\theta(k-1), \eta(k-1)) \end{bmatrix}, \quad (5.60)$$

што се краће записује

$$z(k) = q_{k-1}(z(k-1), u(k-1), \theta(k-1), \xi(k-1)). \quad (5.61)$$

при чему смо са ξ_{k-1} означили проширени вектор поремећаја

$$\xi(k-1) = [w^T(k-1) \quad \eta^T(k-1)]^T. \quad (5.62)$$

У најопштијем случају се разматра случај да су параметри временски променљиви где $\eta(k)$ представља некорелисани Гаусов шум

$$\eta(k) \sim \mathcal{N}(0, \Phi(k)). \quad (5.63)$$

После проширења вектора стања са вектором параметара, једначина излаза постаје

$$y(k) = h_k(z(k), \theta(k), e(k)). \quad (5.64)$$

Дакле, сада ће проширени нелинеарни модел бити дефинисан једначинама:

$$z(k) = q_{k-1}(z(k-1), u(k-1), \theta(k-1), \xi(k-1)), \quad (5.65)$$

$$y(k) = h_k(z(k), \theta(k), e(k)), \quad (5.66)$$

где су :

$$\xi(k) \sim N(0, \Xi(k)),$$

$$\Xi(k) = \begin{bmatrix} Q(k) & 0 \\ 0 & \Phi(k) \end{bmatrix}.$$

Сагласно релацијама (5.39)-(5.47) лако се може показати да проширени Масрељез-Мартинов филтар за проширени нелинеарни систем (5.65) има следећу форму:

$$\hat{z}(k|k-1) = q_{k-1}(\hat{z}(k-1|k-1), u(k-1), \theta(k-1), 0), \quad (5.67)$$

$$P(k|k-1) = F(k-1)P(k-1|k-1)F^T(k-1) + L(k-1)\Xi(k-1)L^T(k-1), \quad (5.68)$$

$$K(k) = P^T(k|k-1)H^T(k)T^T(k), \quad (5.69)$$

$$v(k) = T(k)[y(k) - h_k(\hat{z}(k|k-1), \theta(k), 0)], \quad (5.70)$$

$$\hat{z}(k|k) = \hat{z}(k|k-1) + K(k)\Psi(v(k)), \quad (5.71)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k)\Psi'(v(k))K^T(k), \quad (5.72)$$

$$\Psi'(v(k)) = \begin{bmatrix} \psi'(v_1(k)) & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \psi'(v_r(k)) \end{bmatrix}, \quad (5.73)$$

$$T(k) = [H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R_1(k)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.74)$$

при чему су:

$$F(k) = \frac{\partial q_k}{\partial z} \Big|_{\hat{z}(k|k)}, \quad L(k) = \frac{\partial q_k}{\partial \xi} \Big|_{\hat{z}(k|k)}, \quad H(k) = \frac{\partial h_k}{\partial z} \Big|_{\hat{z}(k|k-1)}, \quad V(k) = \frac{\partial h_k}{\partial v} \Big|_{\hat{z}(k|k-1)}. \quad (5.75)$$

Ако претпоставимо да нелинеарне функције система g_k и f_k имају следећу форму

$$g_k(\theta(k), \eta(k)) = \theta(k) + \eta(k), \quad (5.76)$$

$$f_k(x(k), u(k), \theta(k), w(k)) = f_k(x(k), u(k), \theta(k)) + w(k). \quad (5.77)$$

тада се матрице (5.75) могу свести на следећи облик:

$$F(k) = \frac{\partial q_k}{\partial z} \Big|_{\hat{z}(k|k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial x} & \frac{\partial f_k}{\partial \theta} \\ 0 & I_p \end{bmatrix}_{\hat{x}(k|k), \hat{\theta}(k|k)} = \begin{bmatrix} F_x(k) & F_\theta(k) \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad L(k) = \frac{\partial q_k}{\partial \xi} \Big|_{\hat{z}(k|k)} = I_{n+p} \quad (5.78)$$

$$H(k) = \frac{\partial h_k}{\partial z} \Big|_{\hat{z}(k|k-1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial x} & \frac{\partial h_k}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{\hat{x}(k|k-1), \hat{\theta}(k|k-1)} = [H_x(k) \mid H_\theta(k)], \quad V(k) = \frac{\partial h_k}{\partial v} \Big|_{\hat{z}(k|k-1)} = I_r$$

Почетни услови су:

$$\hat{z}_0^+ = 0, \quad (5.79)$$

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} P(x_0) & 0 \\ 0 & P(\theta_0) \end{bmatrix}. \quad (5.80)$$

Услед структуре проширеног вектора стања $z(k)$, кога чине вектор стања $x(k)$ и вектор параметара $\theta(k)$, природно је да уведемо следећу блок структуру матрице појачања и коваријационе матрице :

$$\hat{z}(k|k-1) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k-1) \\ \hat{\theta}(k|k-1) \end{bmatrix}, \quad \hat{z}(k|k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k) \\ \hat{\theta}(k|k) \end{bmatrix}, \quad (5.81)$$

$$K(k) = \begin{bmatrix} N(k) \\ M(k) \end{bmatrix}, \quad (5.82)$$

$$P(k|k) = \begin{bmatrix} P_1(k|k) & P_2(k|k) \\ P_2^T(k|k) & P_3(k|k) \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$

Узимајући у обзир представљање (5.81) и (5.82), једначине (5.67) и (5.71) се могу записати на следећи начин:

$$\hat{z}(k|k-1) = \begin{bmatrix} f_{k-1}(\hat{x}(k-1|k-1), u(k-1), \hat{\theta}(k-1|k-1)) \\ \hat{\theta}(k-1|k-1) \end{bmatrix}, \quad (5.84)$$

$$\hat{z}(k|k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k-1) \\ \hat{\theta}(k|k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N(k) \\ M(k) \end{bmatrix} [\Psi(v(k))], \quad (5.85)$$

На основу (5.84) и (5.85) добија се:

$$\hat{x}(k|k) = f_{k-1}(\hat{x}(k-1|k-1), u(k-1), \hat{\theta}(k-1|k-1)) + N(k)\Psi(v(k)), \quad (5.86)$$

$$\hat{\theta}(k|k) = \hat{\theta}(k-1|k-1) + M(k)\Psi(v(k)). \quad (5.87)$$

Почетне вредности $\hat{x}(0|0)$ и $\hat{\theta}(0|0)$ представљају неко априорно знање о вектору стања и вектору параметара. У случају да априорне информације нису доступне, бира се $\hat{x}(0|0) = 0$ и $\hat{\theta}(0|0) = 0$.

Такође, користећи усвојене блок структуре (5.78), (5.82)-(5.83), лако се може показати да релације (5.68), (5.69), (5.72) и (5.74) имају следећу форму

$$P(k|k-1) = \left[\begin{array}{c|c} P_1(k|k-1) & P_2(k|k-1) \\ \hline P_2^T(k|k-1) & P_3(k|k-1) \end{array} \right] \quad (5.88)$$

где су:

$$P_1(k|k-1) = F_x(k-1)P_1(k-1|k-1)F_x^T(k-1) + F_\theta(k-1)P_2^T(k-1|k-1)F_x^T(k-1) + F_x(k-1)P_2(k-1|k-1)F_\theta^T(k-1) + F_\theta(k-1)P_3(k-1|k-1)F_\theta^T(k-1) + Q(k-1) \quad (5.89)$$

$$P_2(k|k-1) = F_x(k-1)P_2(k-1|k-1) + F_\theta(k-1)P_3(k-1|k-1) \quad (5.90)$$

$$P_2^T(k|k-1) = P_2^T(k-1|k-1)F_x^T(k-1) + P_3^T(k-1|k-1)F_\theta^T(k-1)$$

$$P_3(k|k-1) = P_3(k-1|k-1) + \Phi(k-1) \quad (5.91)$$

$$K(k) = \left[\begin{array}{c|c} P_1(k|k-1)H_x^T(k)T^T(k) + P_2(k|k-1)H_\theta^T(k)T^T(k) & \\ \hline P_2^T(k|k-1)H_x^T(k)T^T(k) + P_3(k|k-1)H_\theta^T(k)T^T(k) & \end{array} \right] \quad (5.92)$$

$$P(k|k) = \left[\begin{array}{c|c} P_1(k|k-1) - N(k)\Psi'(v(k))N^T(k) & P_2(k|k-1) - N(k)\Psi'(v(k))M^T(k) \\ \hline P_2^T(k|k-1) - M(k)\Psi'(v(k))N^T(k) & P_3(k|k-1) - M(k)\Psi'(v(k))M^T(k) \end{array} \right] \quad (5.93)$$

$$T(k) = \left[H_x(k)P_1(k|k-1)H_x^T(k) + H_\theta(k)P_2^T(k|k-1)H_x^T(k) + H_x(k)P_2(k|k-1)H_\theta^T(k) + H_\theta(k)P_3(k|k-1)H_\theta^T(k) + R_1(k) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.94)$$

Ради прегледности, алгоритам ћемо представити у форми Табеле 5.1.

Табела 5.1

 Априорне процене параметара и стања

$$\hat{x}(k|k-1) = f_{k-1}(\hat{x}(k-1|k-1), u(k-1), \hat{\theta}(k-1|k-1))$$

$$\hat{\theta}(k|k-1) = \hat{\theta}(k-1|k-1)$$

 Јакобијеве матрице нелинеарних функција f_k и h_k

$$F(k) = \frac{\partial q_k}{\partial z} \Big|_{\hat{z}(k|k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial x} & \frac{\partial f_k}{\partial \theta} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \Big|_{\hat{x}(k|k), \hat{\theta}(k|k)} = \begin{bmatrix} F_x(k) & F_\theta(k) \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad L(k) = \frac{\partial q_k}{\partial \xi} \Big|_{\hat{z}(k|k)} = I_{n+p}$$

$$H(k) = \frac{\partial h_k}{\partial z} \Big|_{\hat{z}(k|k-1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial x} & \frac{\partial h_k}{\partial \theta} \end{bmatrix} \Big|_{\hat{x}(k|k-1), \hat{\theta}(k|k-1)} = [H_x(k) \mid H_\theta(k)], \quad V(k) = \frac{\partial h_k}{\partial v} \Big|_{\hat{z}(k|k-1)} = I_r$$

 Елементи априорне коваријационе матрице

$$P_1(k|k-1) = F_x(k-1)P_1(k-1|k-1)F_x^T(k-1) + F_\theta(k-1)P_2^T(k-1|k-1)F_x^T(k-1) + F_x(k-1)P_2(k-1|k-1)F_\theta^T(k-1) + F_\theta(k-1)P_3(k-1|k-1)F_\theta^T(k-1) + Q(k-1)$$

$$P_2(k|k-1) = F_x(k-1)P_2(k-1|k-1) + F_\theta(k-1)P_3(k-1|k-1)$$

$$P_3(k|k-1) = P_3(k-1|k-1) + \Phi(k-1)$$

 Матрица трансформисања

$$T_k = \left[H_x(k)P_1(k|k-1)H_x^T(k) + H_\theta(k)P_2^T(k|k-1)H_x^T(k) + H_x(k)P_2(k|k-1)H_\theta^T(k) + H_\theta(k)P_3(k|k-1)H_\theta^T(k) + R_1(k) \right]^{\frac{1}{2}}$$

 Блокови матрице појачања

$$N_k = P_1(k|k-1)H_x^T(k)T^T(k) + P_2(k|k-1)H_\theta^T(k)T^T(k)$$

$$M_k = P_2^T(k|k-1)H_x^T(k)T^T(k) + P_3(k|k-1)H_\theta^T(k)T^T(k)$$

 Трансформисани резидуал

$$v(k) = T(k) \left[y(k) - h_k(\hat{x}(k|k-1), \theta(k), 0) \right]$$

 Нелинеарна функција

$$\Psi(v(k)) = \begin{bmatrix} \psi(v_1(k)) \\ \vdots \\ \psi(v_r(k)) \end{bmatrix}$$

 Елементи модификоване апостериорне коваријационе матрице

$$P_{1k}^+ = P_1(k|k-1) - N(k)\Psi'(v(k))N^T(k)$$

$$P_{2k}^+ = P_2(k|k-1) - N(k)\Psi'(v(k))M^T(k)$$

$$P_{3k}^+ = P_3(k|k-1) - M(k)\Psi'(v(k))M^T(k)$$

 Апостериорне процене стања и параметара

$$\hat{x}(k|k) = f_{k-1}(\hat{x}(k-1|k-1), u(k-1), \hat{\theta}(k-1|k-1)) + N(k)\Psi(v(k))$$

$$\hat{\theta}(k|k) = \hat{\theta}(k-1|k-1) + M(k)\Psi(v(k))$$

 Почетни услови

$$\hat{x}(0|0) = 0, \quad \hat{\theta}(0|0)_0 = 0$$

$$P_1(0|0) = P(x_0) = 10^4 I_n$$

$$P_2(0|0) = 0$$

$$P_3(0|0) = P(\theta_0) = 10^4 I_p$$

5.2.1 Резултати симулација

Перформансе предложеног алгоритма за процену параметара и стања биће приказане на следећем примеру нелинеарног система:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} p_1 \cdot x_2(k) \cdot e^{-p_2 x_1(k)} \\ p_3 \cdot x_1^2(k) + \sin(x_2) \end{bmatrix} + w(k). \quad (5.95)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) + p_4 \cdot x_2^2(k) \\ p_5 x_2(k) e^{-x_1(k)} \end{bmatrix} + e(k). \quad (5.96)$$

Већ је напоменуто да промена параметара посматраног нелинеарног система има форму случајног корака (видети (5.57)) чији вектор временски променљивих параметара има очекивану вредност:

$$\bar{\theta} = [0.5001 \quad 0.1862 \quad 0.4023 \quad 0.6712 \quad 0.3124]^T. \quad (5.97)$$

Овде ће бити разматран случај када коваријациона матрица шума процеса $w(k)$ има форму

$$Q(k) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 2 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad (5.98)$$

док коваријанса шума параметара има облик:

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}. \quad (5.99)$$

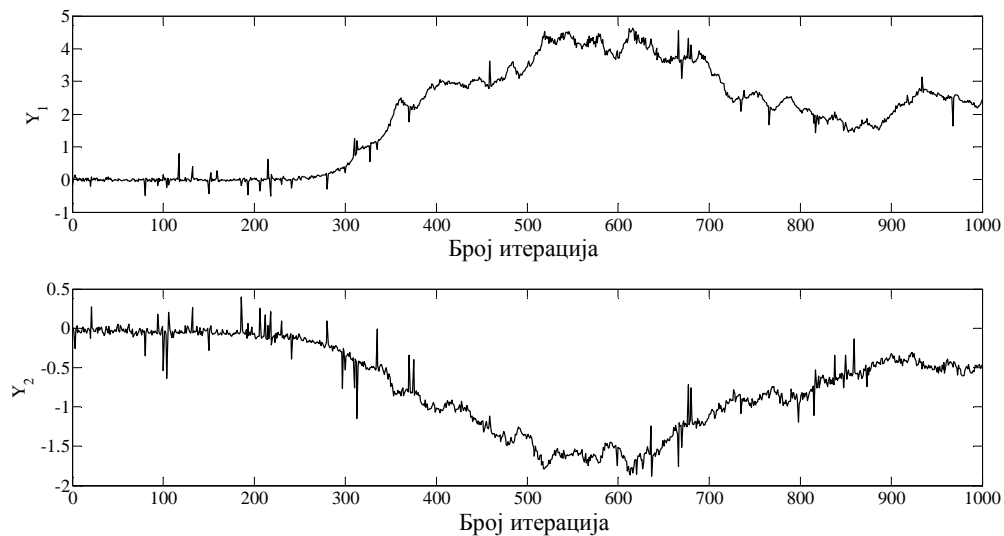
Током симулација претпоставља се да шум мерења $v(k)$ има негаусову расподелу:

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} p(e_1) = (1 - \varepsilon_1) \cdot \mathcal{N}(0; 0.1) + \varepsilon_1 \cdot \mathcal{N}(0; 10), \\ p(e_2) = (1 - \varepsilon_2) \cdot \mathcal{N}(0; 0.1) + \varepsilon_2 \cdot \mathcal{N}(0; 10) \end{array} \right\}. \quad (5.100)$$

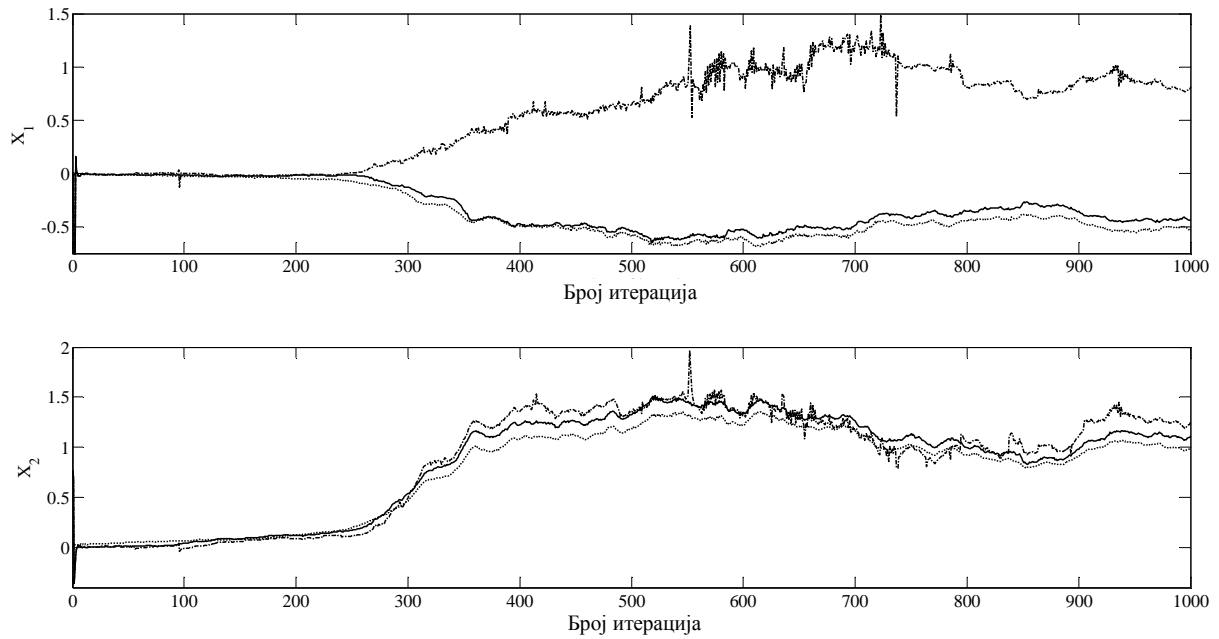
Симулацијом описаног нелинеарног система са променљивим параметрима (5.95)-(5.100), измерено је 1000 улазних и излазних података који су учитани у Матлаб форми. Слике 5.8-5.11 показују излазе система, процене стања, процене параметара и квадратну грешку за случај када су степени контаминације $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$.

Резултати симулација су упоређени у смислу средње квадратне грешке, која је дефинисана као:

$$E_{MS} = \ln E \left\| \hat{\theta}(k) - \theta(k) \right\|^2. \quad (5.101)$$



Слика 5.8 Излази система при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$.

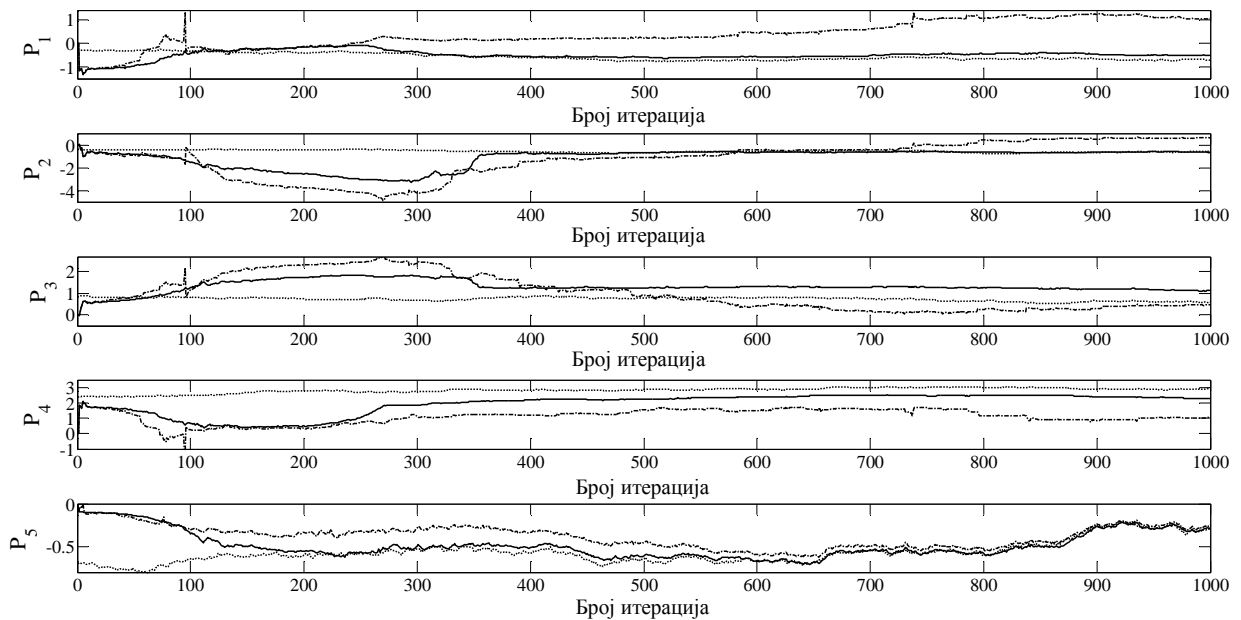


Слика 5.9 Процене стања x_i ($i = 1, 2$) добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$

(-): Проширени робусни филтар са $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \Psi'(\cdot) \} \cong \Psi'(\cdot)$,

(-): Проширени Калманов филтар,

(..): Тачне вредности стања

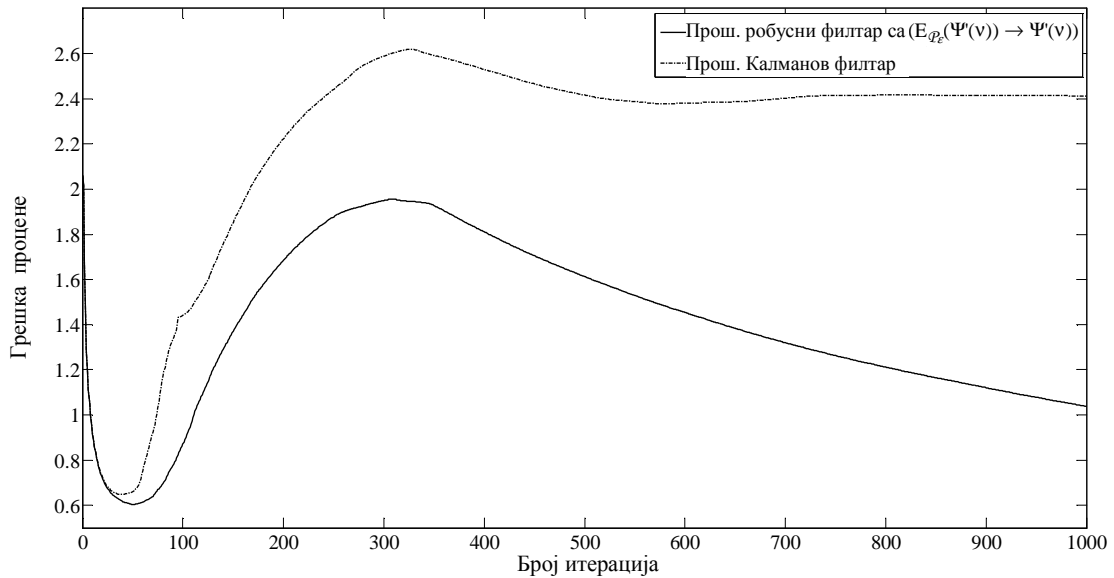


Слика 5.10 Процене параметара p_i ($i = 1, 5$) добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$

(-): Проширени робусни филтар са $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \Psi'(\cdot) \} \cong \Psi'(\cdot)$,

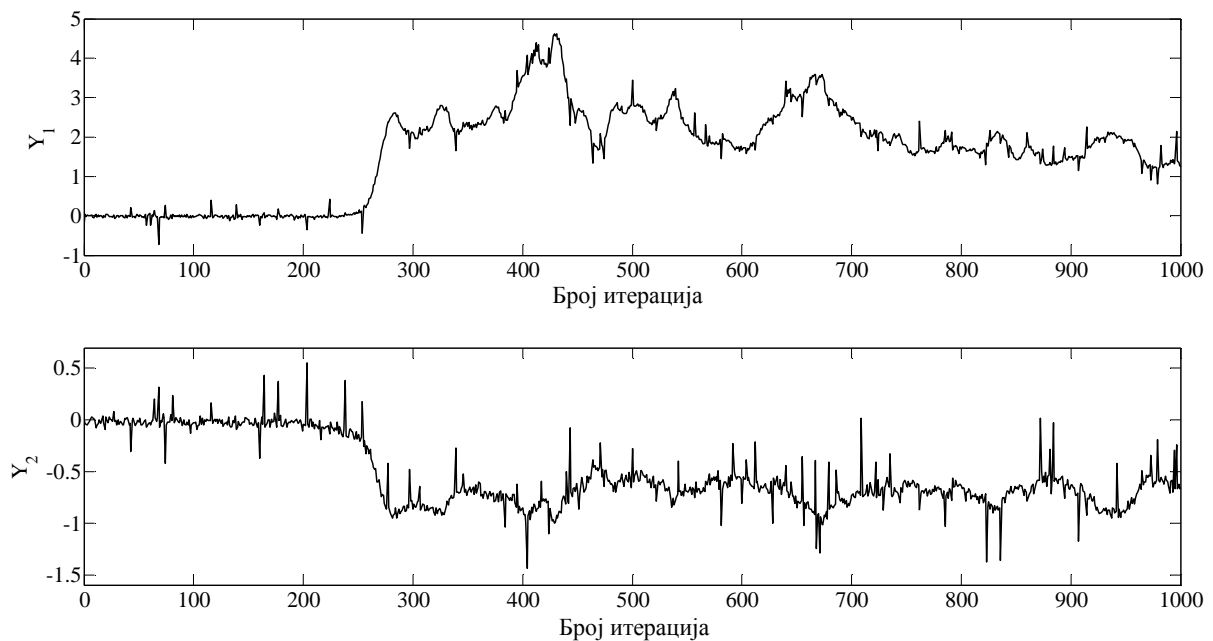
(-): Проширени Калманов филтар,

(..): Тачне вредности стања

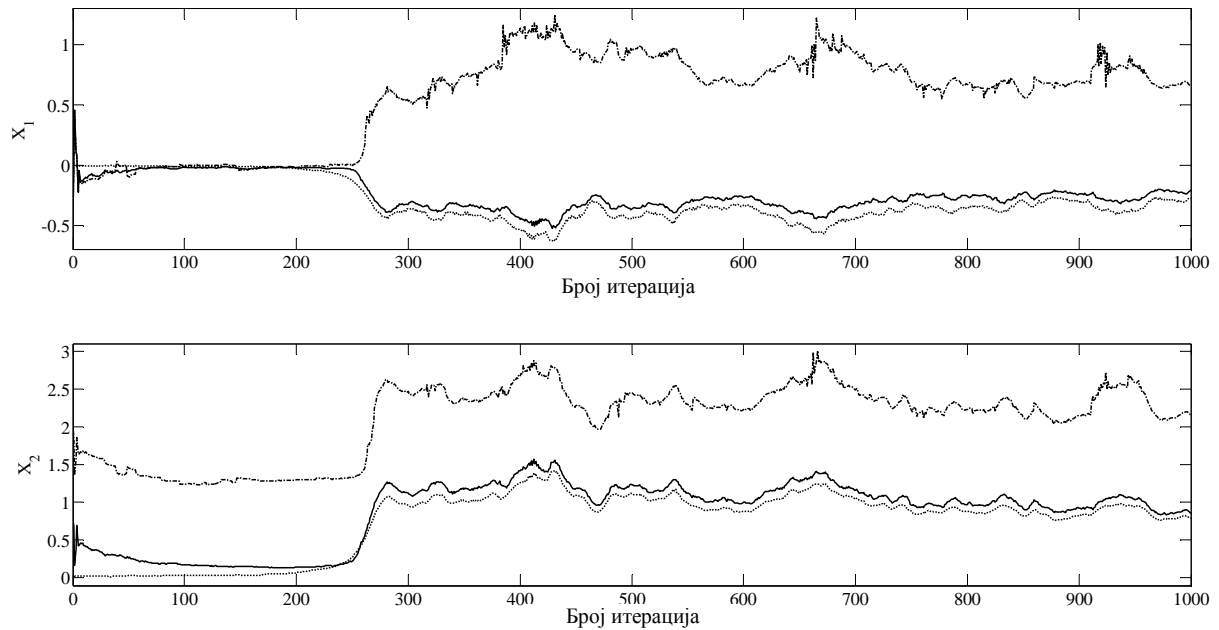


Слика 5.11 Грешка процене, добијена у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$

Слике 5.12 – 5.15 показују излазе система, процене стања, процене параметара и квадратну грешку за случај када је контаминација $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$



Слика 5.12 Излаз система при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$

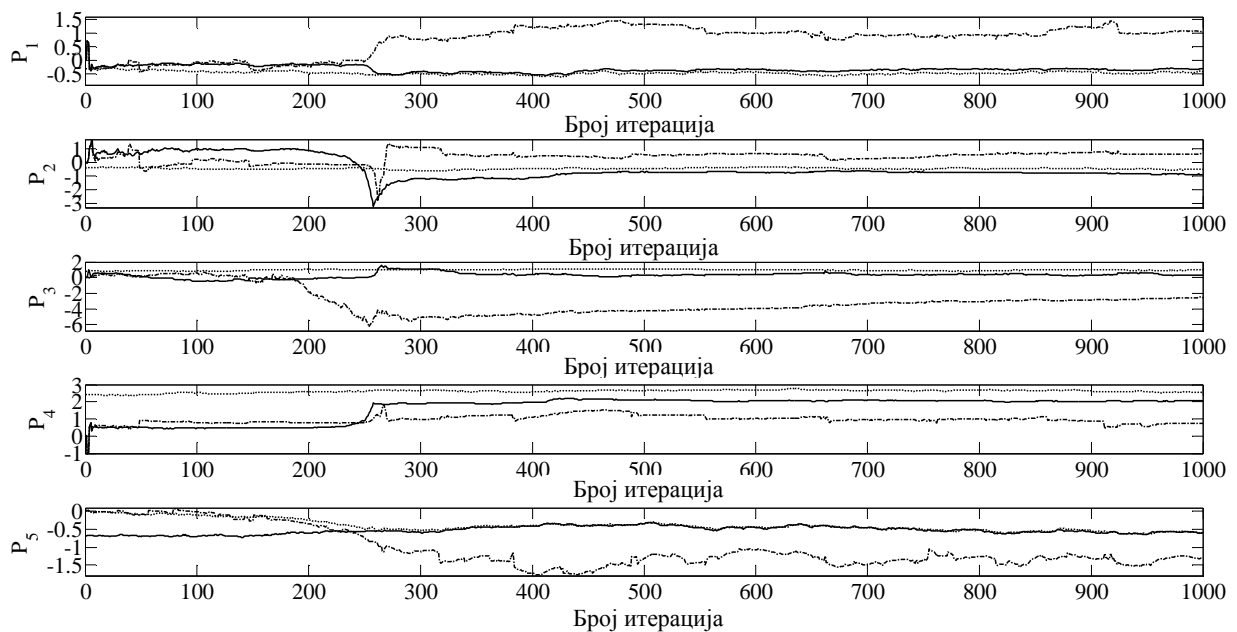


Слика 5.13 Процене стања x_i ($i=1,2$) добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$

(-): Проширени робусни филтар са $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \Psi'(\cdot) \} \cong \Psi'(\cdot)$,

(-): Проширени Калманов филтар,

(..): Тачне вредности стања

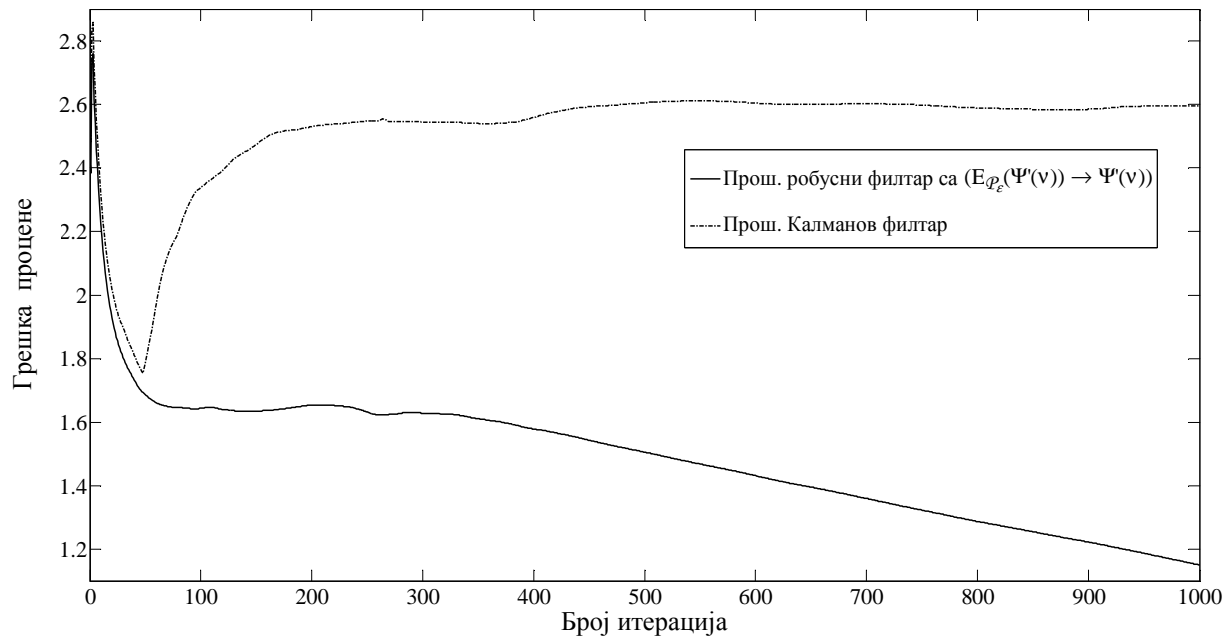


Слика 5.14 Процене параметара p_i ($i=1,5$) добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$

(-): Проширени робусни филтар са $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \Psi'(\cdot) \} \cong \Psi'(\cdot)$,

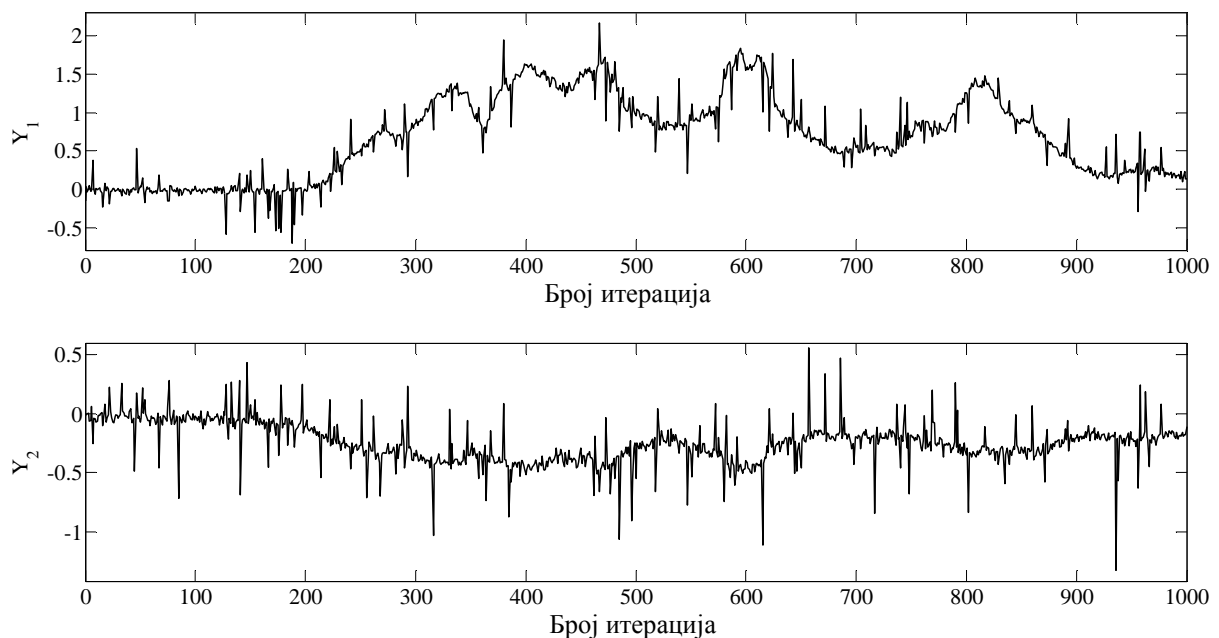
(-): Проширени Калманов филтар,

(..): Тачне вредности стања

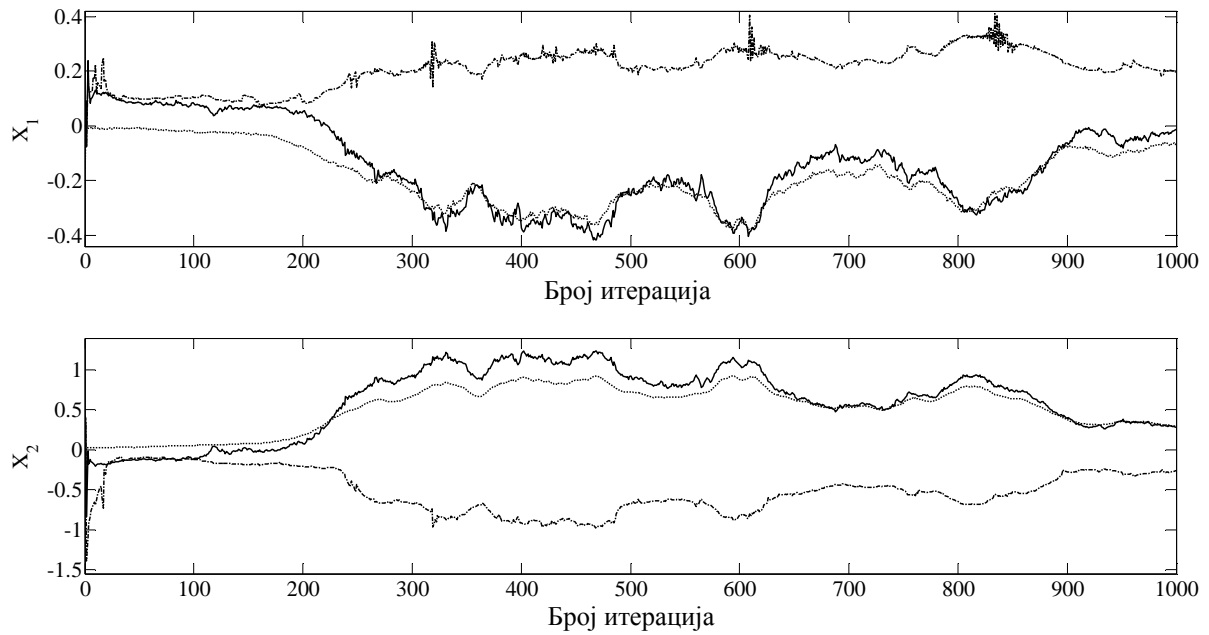


Слика 5.15 Грешка процене, добијена у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon = 0.1$

Слике 5.16 - 5.19 показују излазе система, процене стања, процене параметара и квадратну грешку за случај када је контаминација $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.15$

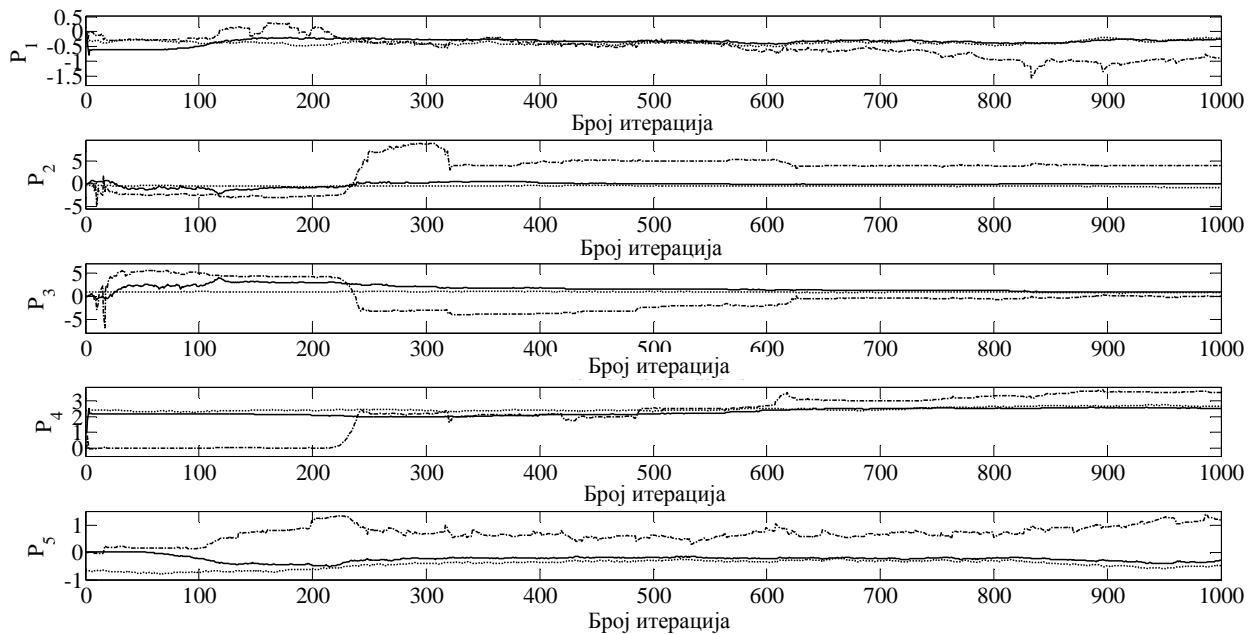


Слика 5.16 Излаз система при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.15$



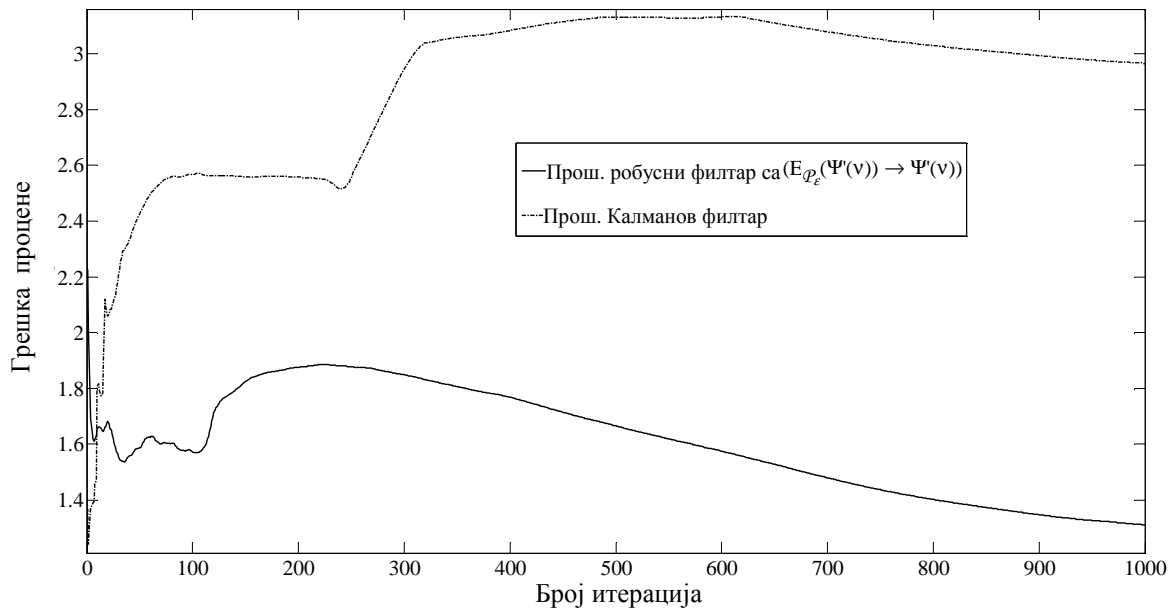
Слика 5.17 Процене стања x_i ($i=1,2$) добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.15$

- (-): Проширени робусни филтар са $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \Psi'(\cdot) \} \cong \Psi'(\cdot)$,
- (-): Проширени Калманов филтар,
- (..): Тачне вредности стања



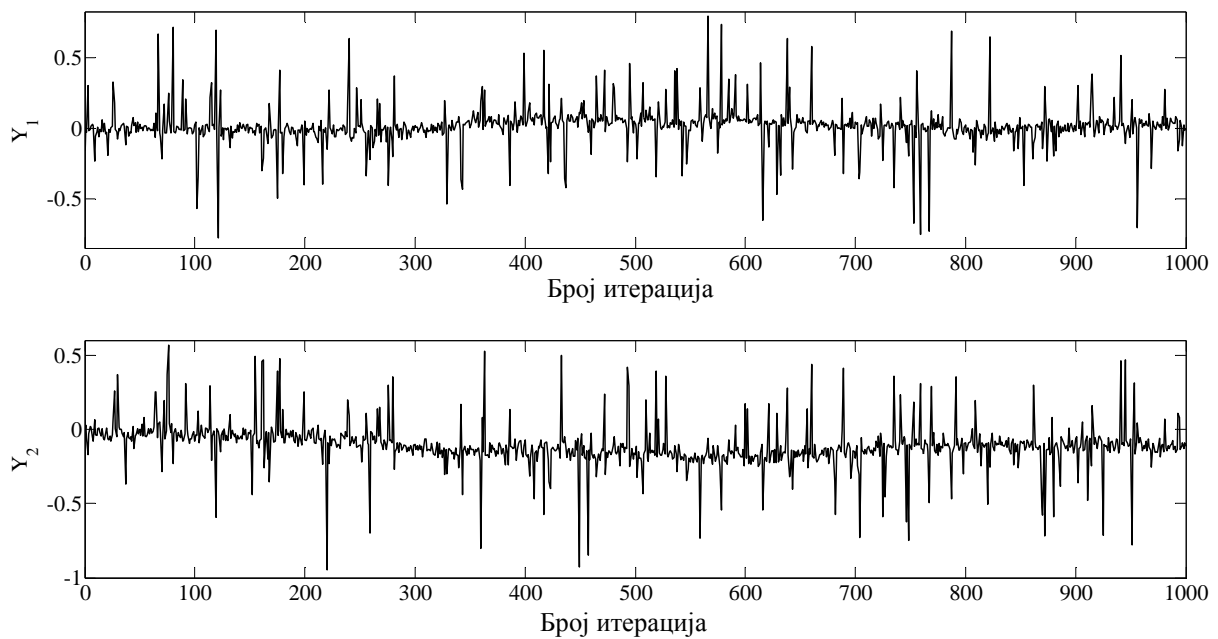
Слика 5.18 Процене параметара p_i ($i=1,5$) добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.15$

- (-): Проширени робусни филтар са $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \Psi'(\cdot) \} \cong \Psi'(\cdot)$,
- (-): Проширени Калманов филтар,
- (..): Тачне вредности стања

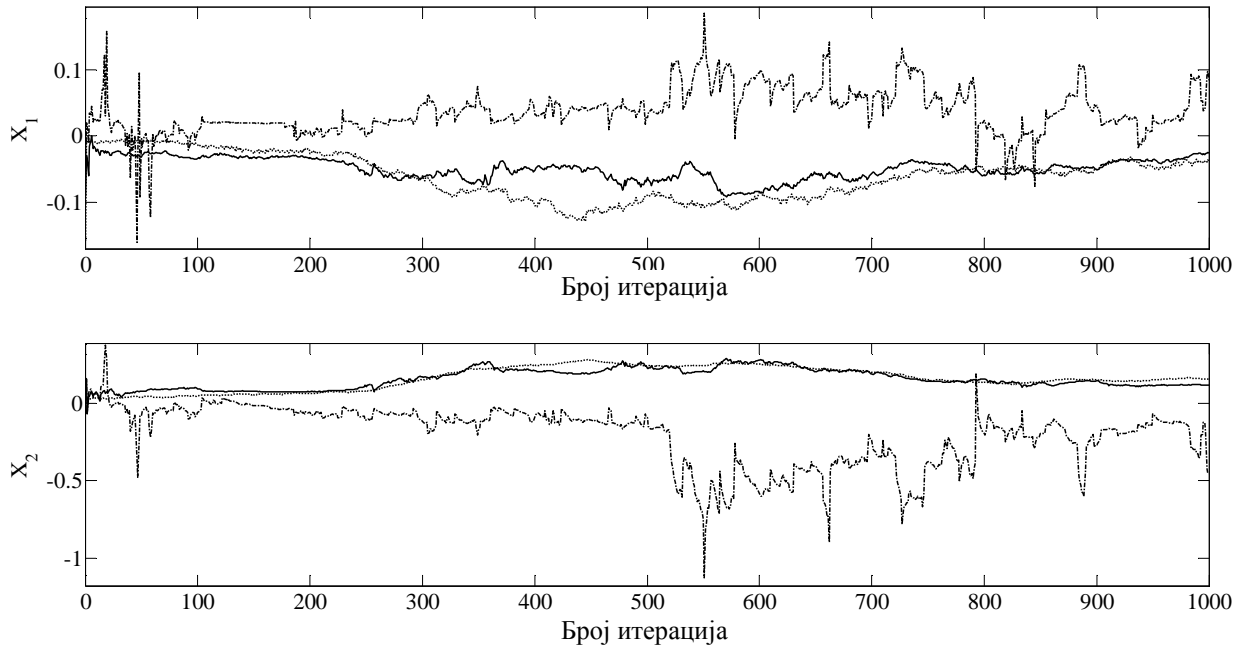


Слика 5.19 Грешка процене, добијена у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.15$

Слике 5.20 – 5.23 показују излазе система, процене стања, процене параметара и квадратну грешку за случај када је контаминација $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2$

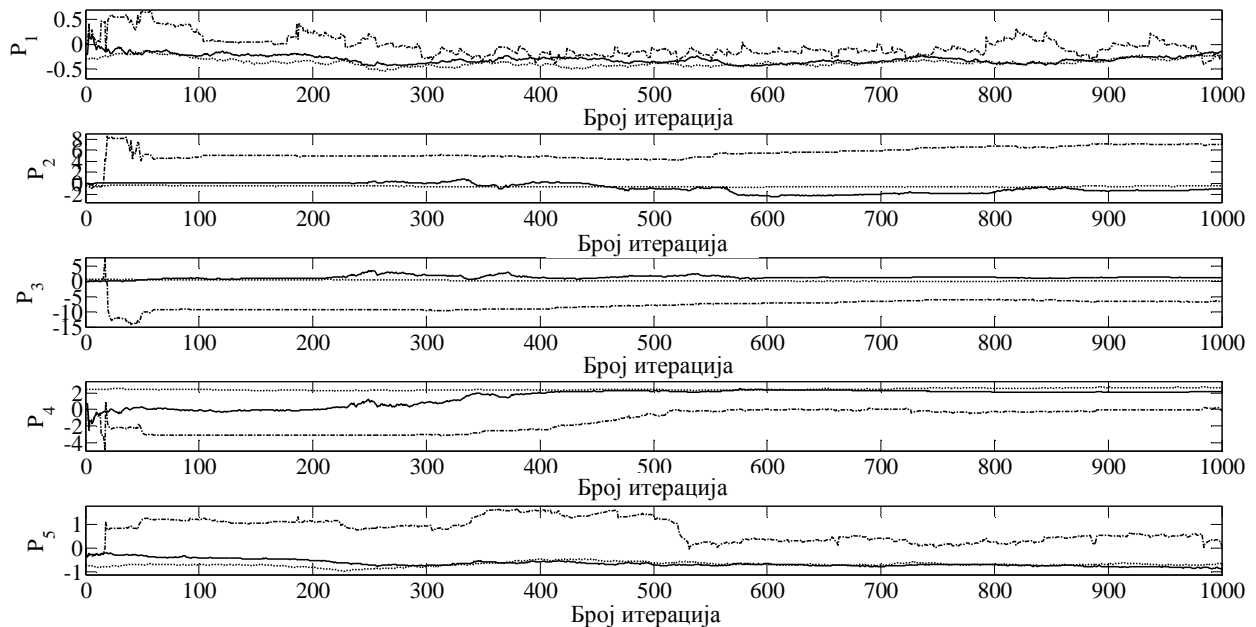


Слика 5.20 Излаз система при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2$



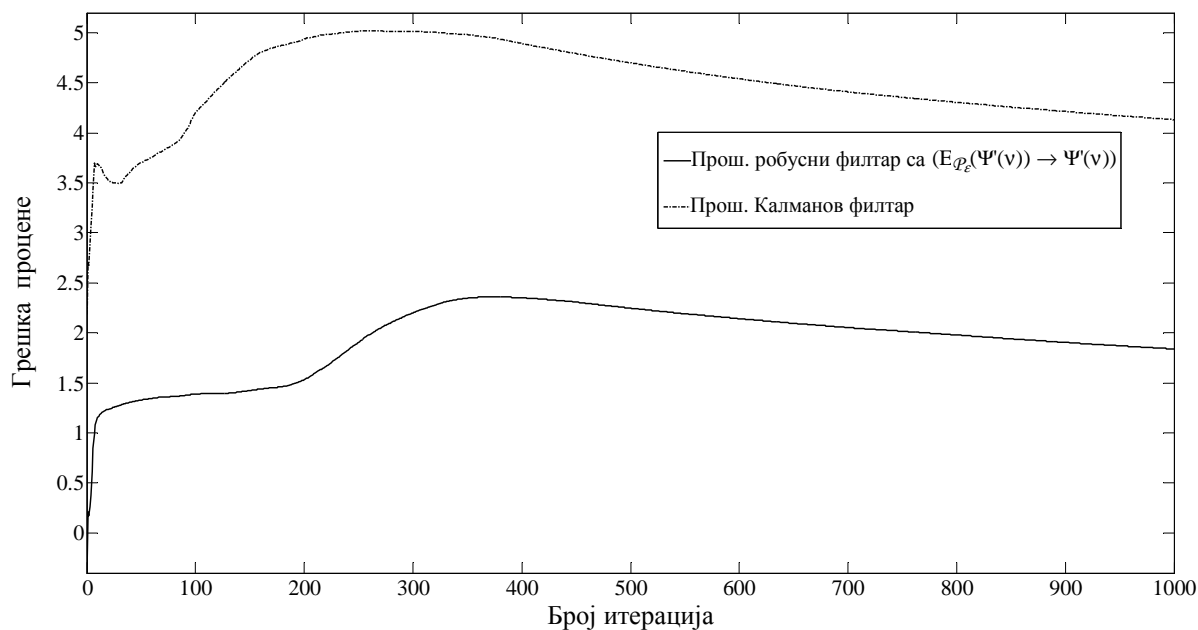
Слика 5.21 Процене стања x_i ($i=1,2$) добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2$

- (-): Проширени робусни филтар са $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \Psi'(\cdot) \} \cong \Psi'(\cdot)$,
- (-.-): Проширени Калманов филтар,
- (..): Тачне вредности стања



Слика 5.22 Процене параметара p_i ($i=1,5$) добијене у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2$

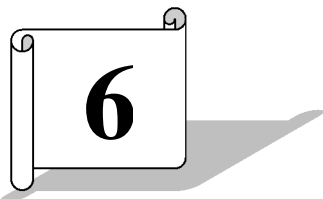
- (-): Проширени робусни филтар са $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \Psi'(\cdot) \} \cong \Psi'(\cdot)$,
- (-.-): Проширени Калманов филтар,
- (..): Тачне вредности стања



Слика 5.23 Грешка процене, добијена у присуству негаусовог шума при контаминацији $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2$

Напомена 5.1: Приказани резултати су показали да је стандардни проширени Калманов филтар веома осетљив на присуство негаусовог шума мерења, на супрот предложеном проширеном робусном Калмановом филтру. Такође, проширени Масрељез-Мартинов филтар (проширени робусни Калманов филтар) са предложеном модификацијом $E_{\mathcal{P}_\varepsilon} \{ \Psi'(\cdot) \} \cong \Psi'(\cdot)$ има скоро идентичне перформансе као најчешће коришћени проширени Калманов филтар у случају чистог Гаусовог шума. Треба напоменути да ово није случај код проширеног Масрељез-Мартиновог филтра.

Поређењем слика 5.11, 5.15, 5.19 и 5.23, може се јасно видети да супериорност модификованог робусног Калмановог филтра већа при већим степенима контаминације.



Робусна идентификација пнеуматског цилиндра

У овом поглављу је изведен робусни алгоритам идентификацију система са променљивим параметрима. Алгоритам идентификације је изведен за системе који припадају ОЕ класи модела. Практични аспект добијених резултата потврђен је кроз експеримент на пнеуматском цилиндру који се налази у лабораторији Центра за аутоматско управљање и флуидну технику, Факултета за машинство и грађевинарство у Краљеву. Као улазни сигнал коришћен је шум са ограниченим опсегом “ $1/f$ ”, који се показао као веома погодан у робусној идентификацији. Спектар улазног сигнала је реализован користећи алгоритам са помичним хоризонтом. Добијени резултати показују супериорност предложеног робусног алгоритма у односу на линеарни алгоритам идентификације.

6.1 Математички модел пнеуматског сервосистема

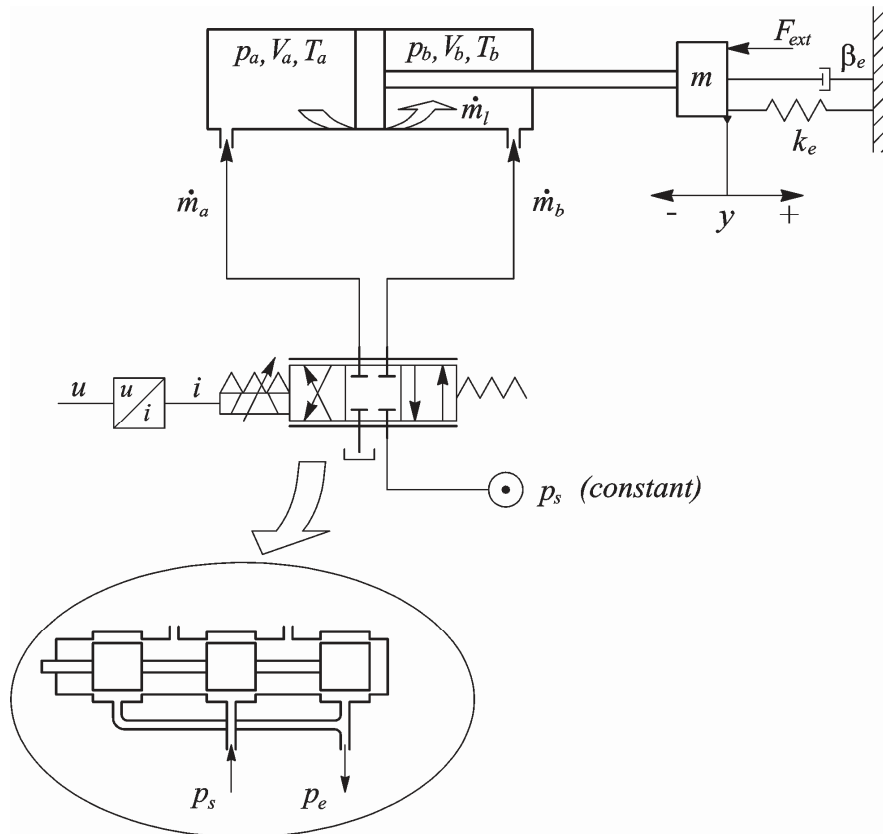
Овај део тезе је посвећен извођењу математичког модела пнеуматског сервосистема и укључује најважније динамичке и нелинеарне ефекте који су везани за овај пнеуматски систем. Систем који се разматра састоји се од разводника и пнеуматског цилиндра са оптерећењем, као што се види на слике 6.1.

Оптерећење цилиндра чини маса спољашњег елемента везаног за клипњачу цилиндра и силе које су последица спољашњег утицаја околине.

При изради модела усвојене су следеће претпоставке:

- Ваздух у систему је идеалан гас
- Термодинамички параметри ваздуха (притисак, температура, густина) унутар компонената система су хомогени
- Температура ваздуха у систему варира у односу на своју номиналну вредност
- Серворазводник карактерише неодређени коефицијент пражњења
- Кретање клипа, клипњаче и спољашњег оптерећења се одвија у присуству трења
- Процес је политропски
- Динамика серворазводника се занемарује, јер је ширина фреквентног опсега вентила је много већа него ширина фреквентног опсега цилиндра

- Динамичко понашање притиска у цевоводима између вентила и актуатора је занемарено (нпр. разводни вентил је смештен директно на актуатор)
- Напојни притисак p_s је константан
- Цурење је ламинарно



Слика 6.1 Шематски приказ цилиндра управљаног разводником

6.1.1 Једначина равнотеже сила на клипу цилиндра

До једначине кретања клипа цилиндра долазимо применом другог Њутновог закона за силе које делују на клип:

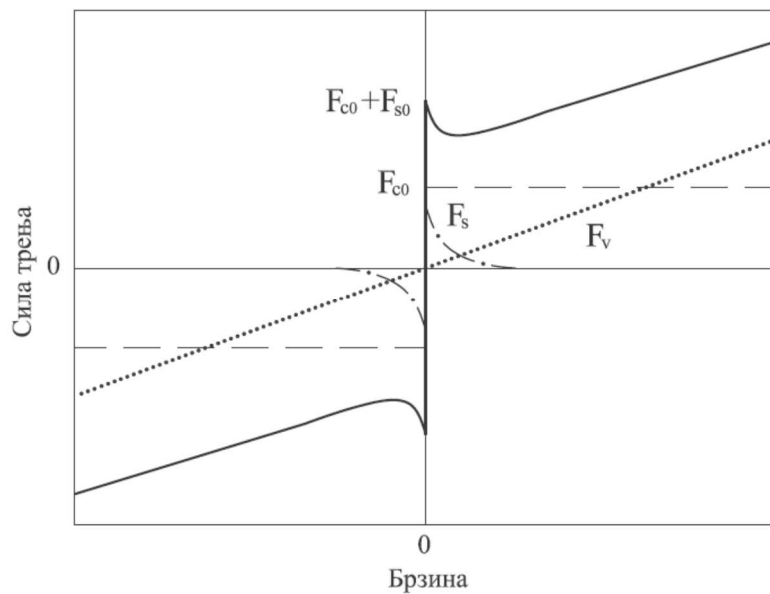
$$A_a p_a - A_b p_b = m \ddot{y} + F_f(\dot{y}) + k_e y + F_{ext}, \quad (6.1)$$

при чему p_a и p_b означавају притиске у коморама a и b респектовано, m означава укупну масу клипа са оптерећењем, y је померај клипа, $F_f(\dot{y})$ представља силу трења, k_e означава коефицијент еластичности и F_{ext} силу поремећаја на клипу. Однос површина асиметричног клипа цилиндра је $A_a / A_b > 1$, где A_a означава ефективну површину клипа на страни без клипњаче а A_b ефективну површину клипа на страни са клипњачом, видети слику 6.1.

Сила трења $F_f(\dot{y})$ у релацији (6.1) се према Стрибековој криви трења (Stribeck curve), може представити као функција брзине:

$$\begin{aligned}
 F_f(\dot{y}) &= F_v(\dot{y}) + F_c(\dot{y}) + F_s(\dot{y}) = \\
 &= \beta_e \dot{y} + \operatorname{sgn}(\dot{y}) \left[F_{c0} + F_{s0} e^{-\frac{|\dot{y}|}{c_s}} \right]
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Три карактеристична дела ове криве су: вискозно трење $F_v(\dot{y})$, статичко трење $F_c(\dot{y})$ и Кулоново трење $F_s(\dot{y})$, при чему β_e означава коефицијент вискозног трења, F_{c0} је параметар Кулоновог трења, док F_{s0} и c_s (позната као Стрибекова брзина) представљају параметре статичког трења. Типичан изглед Стрибекове криве трења приказана је на Слици 6.2. Детаљна анализа утицаја сила трења може се наћи у [68].



Слика 6.2 Зависност силе трења од брзине кретања клипа

Једначине које дефинишу динамичко понашање пнеуматског цилиндра у потпуности се ослањају на процес пуњења и пражњења ваздуха у коморама цилиндра. Традиционални приступ динамичкој анализи заснива се на линеаризацији, услед чега су резултати анализе валидни само за помераје у околини радне тачке, [69-72]. Динамика притисака у коморама цилиндра се може представити као, [47]:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\alpha(t)g_i(p_i, y, \dot{y}) + \beta(t)h_i(t, p_i, y, u), \tag{6.3}$$

при чему су:

$$g_i(p_i, y, \dot{y}) = \frac{p_i \dot{V}_i(\dot{y})}{V_i(y)} \tag{6.4}$$

и

$$h_i(t, p_i, y, u) = \frac{\sqrt{RT_s}}{V_i(y)} Wf(p_i) \operatorname{sgn}(u), \tag{6.5}$$

где је R универзална гасна константа, W је константа вентила, док T_s означава апсолутну температуру околине.

Члан $f(p_i)$ се дефинише као:

$$f(p_i) = \begin{cases} \bar{f}\left(\frac{p_i}{p_o}\right)p_o & \text{ако је } p_o \geq p_i \\ -\bar{f}\left(\frac{p_o}{p_i}\right)p_i & \text{ако је } p_o < p_i \end{cases} \quad (6.6)$$

где p_0 означава спољашњи апсолутни притисак а \bar{f} функцију редукованог протока.

Неодређени топлотни коефицијент $\alpha(t)$ зависи од стварног преноса топлоте за време процеса. Као што се може видети из [47], $\alpha(t)$ узима вредности од 1 до 1.3997.

Неодређени гранични параметар $\beta(t)$, који узима вредности између 0.075 до 1.3297 (видети [47]), се користи да дефинише комбинацију топлотног коефицијента $\alpha(t)$, непознатог коефицијента пражњења $C_d(t)$, и варијације температуре $\tau(t)$. Дакле, $\beta(t)$ се дефинише као:

$$\beta(t) = \alpha(t)C_d(t)\sqrt{\tau(t)}. \quad (6.7)$$

6.1.2 Пнеуматски цилиндар као стохастички систем

Ако се величине стања и улазне променљиве дефинишу као:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = p_a, \quad x_4 = p_b, \quad u \text{ (управљачки улаз)}, \quad e = F_{ext} \text{ (спољашњи поремећај)}$$

Тада се модел пнеуматског цилиндра може дефинисати као:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(A_a x_3 - A_b x_4 - k_e x_1 - F_f(\dot{x}_2) - e) \\ \dot{x}_3 &= -\alpha(t)g(x_1, x_2, x_3) + \beta(t)h(t, x_1, x_3, u) \\ \dot{x}_4 &= -\alpha(t)g(x_1, x_2, x_4) + \beta(t)h(t, x_1, x_4, u) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Пошто су неодређени топлотни коефицијент $\alpha(t)$ и гранични параметар $\beta(t)$ познати само у одређеним границама, може се сматрати да њихове промене имају случајни карактер. Пошто су неодређени коефицијенти укључени (директно или индиректно) у величине стања, претходна анализа оправдава претпоставку да се дати систем посматра као стохастички.

Дакле, проблем са комплексним нелинеарним моделима, као што је пнеуматски цилиндар, је тај што је веома тешко прецизно одредити велики број физичких параметара који су укључени у модел. Иако је доста параметара априори познат са разумном прецизношћу, велики број параметара је познат само у одређеним границама, а неки су чак и потпуно непознати. Ово може бити последица толеранције у производњи као и чињенице

да произвођачи не објављују вредности неких параметара јер их сматрају својим власништвом.

Осим тога, неке параметре система је веома тешко прецизно одредити, као што су димензије неких компоненти, коефицијенти цурења, коефицијент пражњења, коефицијент вискозног трења, статичке и динамичке силе трења између клипа и цилиндра, итд. Поменути параметри се не могу директно мерити или рачунати. Ово узрокује велике потешкоће у моделирању оваквих система и управљању.

Јасно је да није лако тачно извести математички модел нелинеарног система као што је пнеуматски сервоцилиндар и да велики број важних детаља није могуће уврстити у модел. Природан покушај да се проблем разреши је примена теорије идентификације. У том случају појављују су следећи проблеми:

- Тип модела (линеаран, нелинеаран, детерминистички, стохастички)
- Природа поремећаја (униформно ограничени, стохастички)

Следеће три чињенице условиле су избор модела:

- Новија истраживања показала су да се нелинеарни модел система може коректно апроксимирати системом са временски променљивим параметрима, [46]
- Детаљнија анализа модела пнеуматског цилиндра, описаног у претходном поглављу, показује да постоји утицај комбинације топлотног коефицијента, непознатог коефицијента пражњења и промене температуре на модел цилиндра, [47]. Ти утицаји су случајни и зато, у овом примеру, претпостављамо да су параметри пнеуматског цилиндра случајни.
- Практична и теоријска истраживања су показала да стохастичком моделу система постоје опсервације неконзистентне са већином популације опсервација (аутлајери), [12], па је због тога поремећај у моделу (шум мерења) негаусов.

Због наведених разлога претпостављено је да је модел пнеуматског цилиндра стохастички линеарни модел са временски променљивим параметрима.

6.2 Робусни алгоритам идентификације за системе променљивим параметрима

У овом делу се разматрају модели типа грешке излаза (Output Error):

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + e(k). \quad (6.9)$$

Непоремећени излаз се може записати у форми линеарне регресије

$$\hat{y}(k) = \theta^T \varphi(k), \quad (6.10)$$

где су вектор мерења и вектор тачних параметара дефинисани на следећи начин

$$\varphi(k) = [-\hat{y}(k-1), \dots, -\hat{y}(k-n), u(k-1), \dots, u(k-m)]^T, \quad (6.11)$$

$$\theta = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]^T. \quad (6.12)$$

Када се особине система мењају у времену рекурзивни алгоритам идентификације треба да прати временски променљиве параметре који описују такав систем. Минимизацијом критеријумске функције за експоненцијално тежински (пондерисани) алгоритам најмањих квадрата (Weighted Least Square - WLS):

$$\mathfrak{J}_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \lambda^{N-k} \varepsilon^2(k), \quad (6.13)$$

добија се процена $\hat{\theta}_N$ непознатог вектора параметра θ :

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} \mathfrak{J}_N(\theta). \quad (6.14)$$

Може се показати да, при Гаусовој расподели шума мерења, рекурзивни алгоритам за идентификацију система са променљивим параметрима има следећи облик, [1-2,75]:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k) \varphi(k) \varepsilon(k), \quad (6.15)$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \left[P(k-1) - \frac{P(k-1) \varphi(k) \varphi^T(k) P(k-1)}{\lambda + \varphi^T(k) P(k-1) \varphi(k)} \right], \quad (6.16)$$

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k-1) \varphi(k), \quad (6.17)$$

$$\hat{\theta}(0) = 0, \quad P(0) = cI, \quad c \gg 0. \quad (6.18)$$

У наведеном алгоритму $\lambda \in (0,1]$ представља фактор заборављања (forgetting factor) који у алгоритам идентификације имплицитно уграђује експоненцијално опадајућу меморију (fading memory). Наиме, уз помоћ фактора заборављања λ , мање тежине се додељују претходним мерењима излаза у односу на последња мерења.

У општем случају, избор фактора λ који је близак 1, омогућава добро праћење променљивих параметара модела чија је динамика промене релативно спора, уз лошије праћење релативно брзих промена параметара. Док ће обрнуто, за вредности λ које су више удаљене од 1 алгоритам боље пратити брзе промене параметара, али ће лошије пратити спорије промене. Значи, у зависности од динамике промене параметара потребно је да λ буде адаптивно, односно да се мења у сваком кораку рада алгоритма. Пошто оваква разматрања излазе из контекста ове тезе, у даљем тексту ће се разматрати само случај са константним фактором заборављања $\lambda(k) = \lambda = const$. Уобичајено је да λ узима вредности које су нешто мало мање од 1 (нпр. $\lambda \in [0.95 - 0.99]$).

Уколико поремећаји $e(k)$ имају Гаусову расподелу алгоритам идентификације (6.15) је оптималан, у смислу минималне варијансе грешке предикције $\varepsilon(k)$, [2]. Међутим, када се појаве спорадичне реализације мерења великог интензитета, тј. аутлајери, квалитет процена помоћу алгоритма (6.15) је незадовољавајући, [12-14].

Релативна неосетљивост процена на поремећаје наведеног типа може се постићи погодним избором облика критеријумске функције. Према томе, за посматрани случај дефинише се емпиријски робусни критеријум на посматраном интервалу $t = 1, 2, \dots, k$:

$$\mathfrak{S}_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \lambda^{k-t} \rho[\varepsilon(t, \theta)], \quad (6.19)$$

где $\rho: R^1 \rightarrow R^1$ представља функцију губитка (loss function). Подразумева се да је изабрано довољно велико k које обезбеђује да емпиријски критеријум конвергира ка теоријском критеријуму:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_k(\theta) = \mathfrak{S}(\theta) = E\{\lambda^{k-t} \rho[\varepsilon(t, \theta)]\}. \quad (6.20)$$

Нека $\hat{\theta}(k-1)$ буде процена вектора параметара у тренутку $k-1$. Потребно је наћи процену $\hat{\theta}(k)$ која ће минимизирати критеријум (6.19). Развојем критеријума (6.19) у Тејлоров ред (Taylor series) у околини претходне процене $\hat{\theta}(k-1)$, добија се:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_k[\theta] &= \mathfrak{S}_k[\hat{\theta}(k-1)] + \mathfrak{S}'_k[\hat{\theta}(k-1)][\theta - \hat{\theta}(k-1)] + \\ &+ \frac{1}{2}[\theta - \hat{\theta}(k-1)]^T \mathfrak{S}''_k[\hat{\theta}(k-1)][\theta - \hat{\theta}(k-1)] + O\left(\|\theta - \hat{\theta}(k-1)\|^2\right) \end{aligned} \quad (6.21)$$

где $\mathfrak{S}'_k[\hat{\theta}(k-1)]$ и $\mathfrak{S}''_k[\hat{\theta}(k-1)]$ означавају изводе у односу на θ .

За остатак реда важи, [4]:

$$\lim_{\hat{\theta}(k-1) \rightarrow \theta} \frac{O\left(\|\theta - \hat{\theta}(k-1)\|\right)}{\|\theta - \hat{\theta}(k-1)\|} = 0. \quad (6.22)$$

Услов минимума робусног критеријума је дефинисан на следећи начин:

$$\mathfrak{S}'_k[\hat{\theta}(k)] = 0. \quad (6.23)$$

За довољно велико k може се претпоставити да су задовољене следеће две хипотезе, [4],[77]:

X1: Процена $\hat{\theta}(k)$ се налази у непосредној околини процене $\hat{\theta}(k-1)$, што условљава:

$$O\left(\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)\|\right) = 0, \quad (6.24)$$

$$\mathfrak{S}''_k[\hat{\theta}(k)] \approx \mathfrak{S}''_k[\hat{\theta}(k-1)]. \quad (6.25)$$

X2: На кораку $k-1$, процена $\hat{\theta}(k-1)$ је оптимална, што условљава:

$$\mathfrak{S}'_{k-1}[\hat{\theta}(k-1)] = 0. \quad (6.26)$$

Узимајући у обзир прву последицу хипотезе **X1**, услов (6.23) се доводи на следећи облик:

$$\mathfrak{S}'_k[\hat{\theta}(k-1)] + \mathfrak{S}''_k[\hat{\theta}(k-1)][\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)] = 0, \quad (6.27)$$

одакле се добија процена која минимизира дати робусни критеријум:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \left[\mathfrak{S}_k^* \left[\hat{\theta}(k-1) \right] \right]^{-1} \mathfrak{S}_k' \left[\hat{\theta}(k-1) \right]. \quad (6.28)$$

Осим тога, лако је показати да робусни критеријум (6.19) у итеративној форми гласи:

$$k\mathfrak{S}_k(\theta) = (k-1)\lambda\mathfrak{S}_{k-1}(\theta) + \rho \left[\varepsilon(k, \hat{\theta}(k)) \right]. \quad (6.29)$$

Након диференцирања (6.29) у односу на θ и потом замене θ са $\hat{\theta}(k-1)$, уз коришћење хипотезе \mathbf{X}_2 , добија се:

$$k\mathfrak{S}_k' \left[\hat{\theta}(k-1) \right] = -\psi \left[\varepsilon(k, \hat{\theta}(k-1)) \right] \varphi(k). \quad (6.30)$$

После двоструког диференцирања релације (6.29) у односу на θ и потом замене θ са $\hat{\theta}(k-1)$, добија се:

$$k\mathfrak{S}_k'' \left[\hat{\theta}(k-1) \right] = (k-1)\lambda\mathfrak{S}_{k-1}'' \left[\hat{\theta}(k-1) \right] + \psi' \left[\varepsilon(k, \hat{\theta}(k-1)) \right] \varphi(k)\varphi^T(k). \quad (6.31)$$

Ако се уведе нотација

$$R(k) = k\mathfrak{S}_k'' \left[\hat{\theta}(k-1) \right], \quad (6.32)$$

уз коришћење релације (6.30) и позивање на другу последицу хипотезе \mathbf{X}_1 , релације (6.28) и (6.31) постају:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + R^{-1}(k)\varphi(k)\psi \left[\varepsilon(k, \hat{\theta}(k-1)) \right], \quad (6.33)$$

$$R(k) = \lambda R(k-1) + \psi' \left[\varepsilon(k, \hat{\theta}(k-1)) \right] \varphi(k)\varphi^T(k). \quad (6.34)$$

Да би се избегло рачунање инверзне матрице $R(k)^{-1}$ у свакој итерацији, погодно је увести матрицу:

$$P(k) = R^{-1}(k), \quad (6.35)$$

и применити лему о инверзији матрица

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1}DA^{-1}, \quad (6.36)$$

на релацију (6.34), при чему су матрице A , B , C и D компатибилних димензија.

Избором $A = \lambda R(k-1)$, $B = D^T = \varphi(k)$, $C = \psi' \left[\varepsilon(k, \hat{\theta}(k-1)) \right]$

рекурзивни робусни алгоритам, дат у облику (6.33)-(6.34), добија коначну форму:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\varphi(k)\psi \left[\varepsilon(k, \hat{\theta}(k-1)) \right], \quad (6.37)$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \left[P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda \left[\psi' \left[\varepsilon(k, \hat{\theta}(k-1)) \right] \right]^{-1} + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \right], \quad (6.38)$$

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k-1)\varphi(k), \quad (6.39)$$

$$\hat{\theta}(0) = 0, \quad P(0) = cI, \quad c \gg 0. \quad (6.40)$$

Релације (6.37)-(6.40) дефинишу робусни тежински алгоритам најмањих квадрата за ОЕ моделе. Функција $\psi(\cdot)$ представља нелинеарну трансформацију грешке предикције, која дефинисана релацијом:

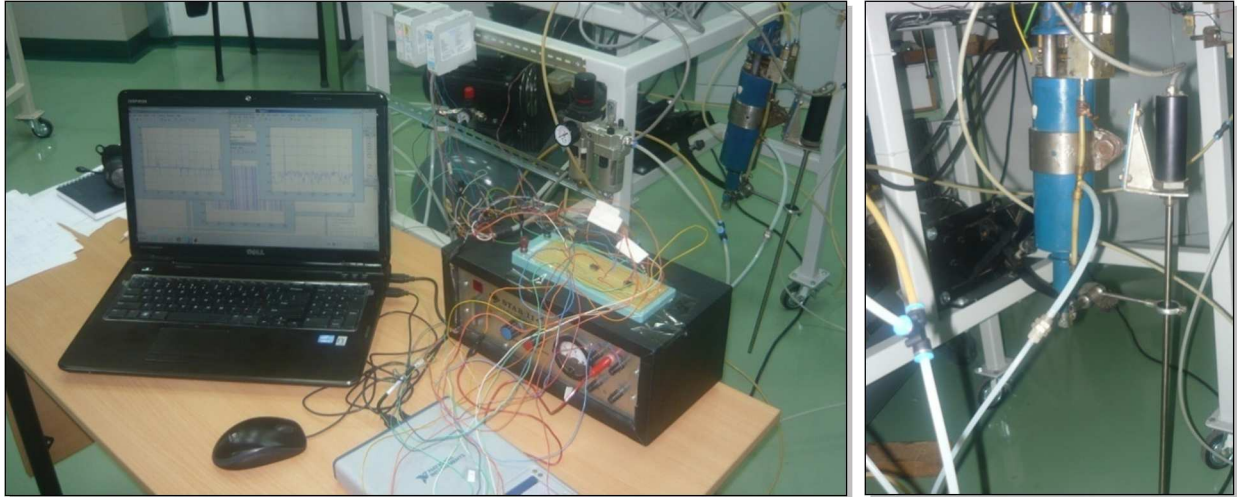
$$\psi(\varepsilon) = \min \{ |\varepsilon|, k_\varepsilon \} \operatorname{sgn} \varepsilon, \quad (6.41)$$

при чему k_ε представља подешавајући параметар.

6.3 Експериментални резултати

У циљу показивања практичне примене предложеног робусног алгоритма изведен је експеримент у лабораторији Центра за аутоматско управљање и флуидну технику, Факултета за машинство и грађевинарство у Краљеву. Као што се може видети са слике 6.3, инсталиран је електропнеуматски систем који се састоји од:

- 1) Пнеуматског сервоцилиндра (PISTOR 75, $\Phi 75\text{mm}-150\text{mm}$) који представља систем који се идентификује, и који у себи садржи пнеуматски разводник типа млазница заслон.
- 2) Сензора помераја (*BTL - A*) који даје информацију о померају клипњаче, тј. излазној величини. Ради на ултра звучном принципу. Мерни опсег дужине $0-500$ [mm], фреквенција мерења 2 KHz.
- 3) Лаптоп рачунара (i3-2120 CPU 3.3 GHz, са 4GB RAM-а, који ради под Windows 7 оперативним системом) помоћу кога се формира и задаје побудни напонски сигнал на разводнику, обрађују улазно-излазни подаци и остварује алгоритам идентификације.
- 4) АДДА електронске карте (NI USB-6351) која омогућава несметан проток сигнала између рачунара и осталог дела система. Има 16 аналогних улаза, 2 аналогна излаза, $\pm 10V$. Такође има 24 дигиталних улазно-излазних линија. Периода одабирања $-0.1s$; 16-bit резолуција).
- 5) ЕП претварача (Hartmann&Braun, Signalumformer CMR) улаз $0-20$ mA, излаз $0.2-1$ bar.
- 6) Компресора који обезбеђује притисак ваздуха до 10 bar у систему.



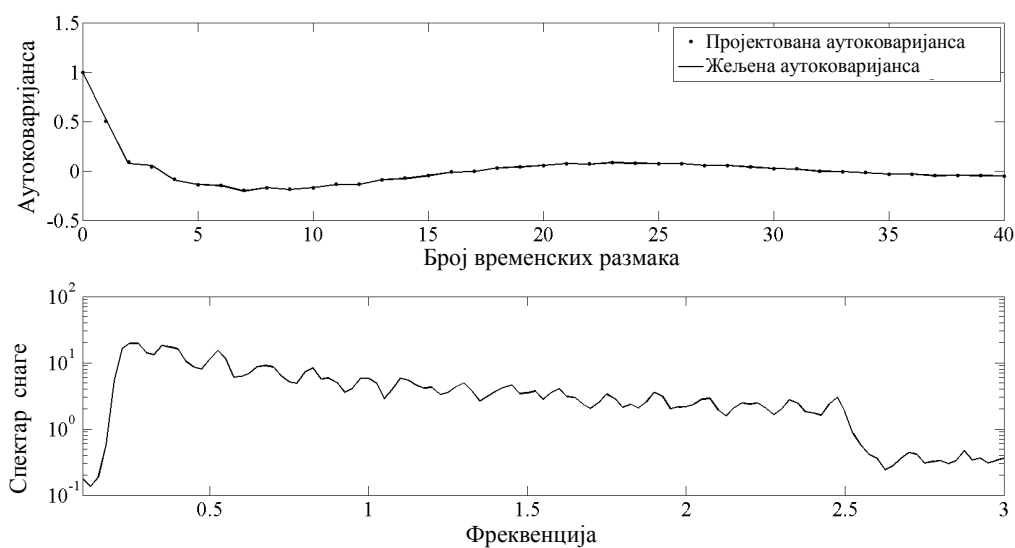
Слика 6.3 Процес идентификације модела пнеуматског цилиндра (лево), издвојена слика пнеуматског цилиндра са давачем помераја (десно)

На основу априорног знања о систему који се идентификује, претпостављено је да ће се задовољавајући модел цилиндра добити коришћењем следећих модела:

$$y(k) = \frac{B_i(q)}{A_i(q)} u(k) + e(k), \quad i = 1, 2 \text{ и } 3, \quad (6.42)$$

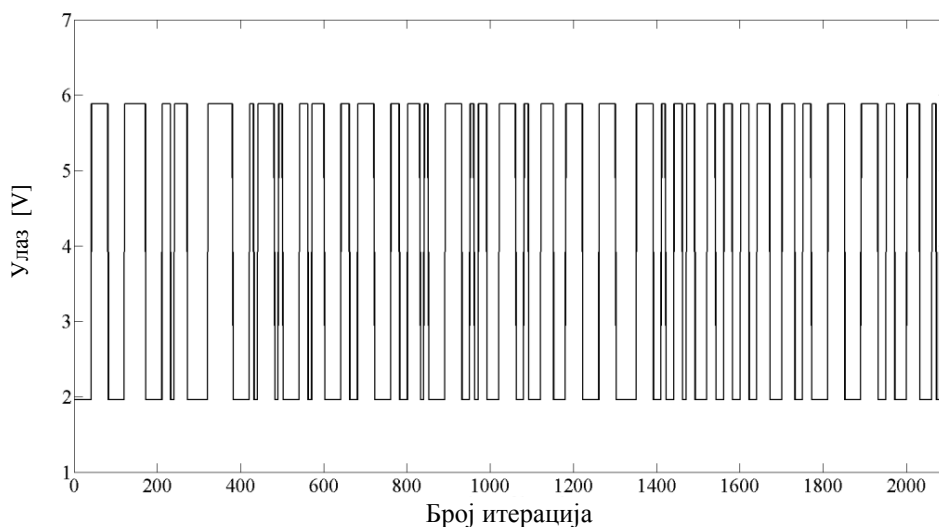
где су $\deg B_i(q) = 2$, $\deg A_1(q) = 2$, $\deg A_2(q) = 3$, $\deg A_3(q) = 4$.

На пнеуматском цилиндру је снимљено 2100 улазно излазних података који су ажурирани у MATLAB форми. Побудни сигнал је шум ограниченог опсега, који се показао оптималним у робусној идентификацији. За генерисање побудног сигнала користи се алгоритам помичног хоризонта. Генерисан је шум ограниченог опсега „ $1/f$ ” за параметре $m=1$, $N=10^3$ и $n=40$, $\underline{\omega}=0.2$, $\bar{\omega}=2.5$, видети слику 6.4.

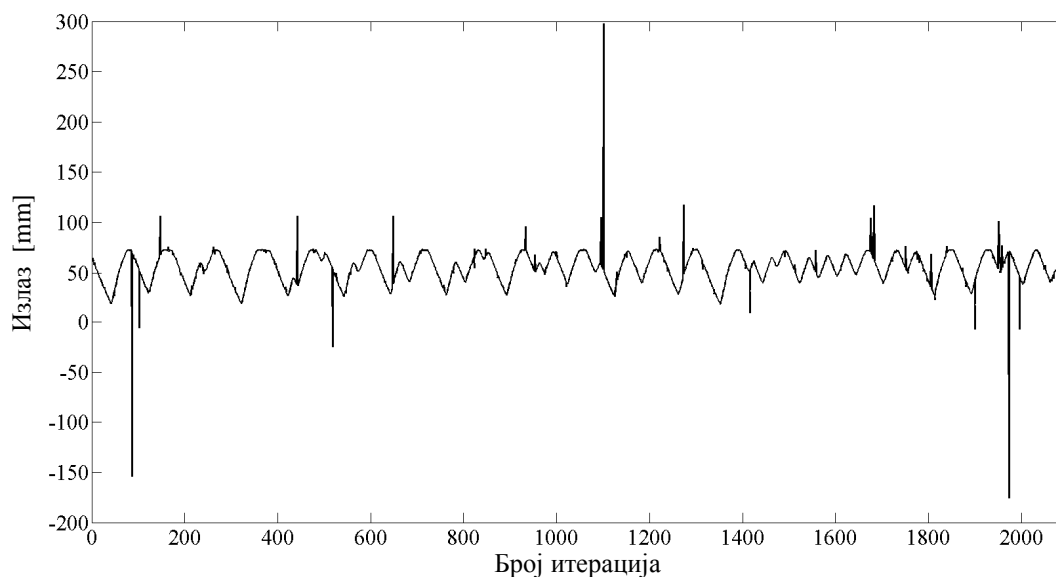


Слика 6.4 Карактеристике генерисаног псеудо шума ограниченог опсега „ $1/f$ ” за изабране параметре: $m=1$, $N=10^3$ и $n=40$

Слике 6.5 и 6.6 приказују оптимални улазни сигнал амплитуде 2 [V] и одговарајући одзив пнеуматског цилиндра, респективно.



Слика 6.5 Оптимални улазни сигнал



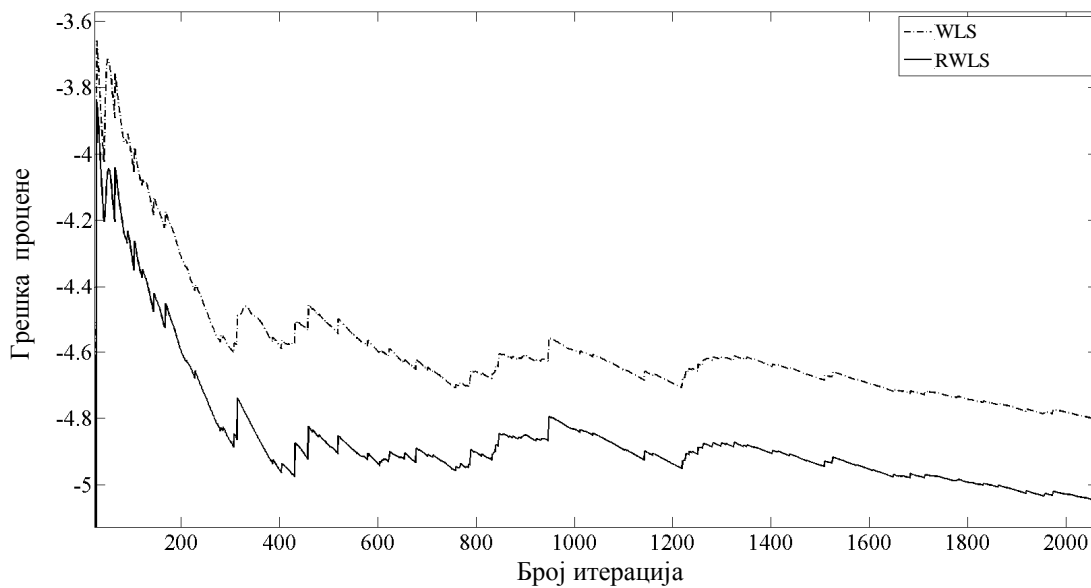
Слика 6.6 Излаз сигнал

Са слике 6.6 се закључује да су при мерењу излаза присутни шумови са негаусовом расподелом. У циљу демонстрације супериорности робусног алгоритма над линеарним типом алгоритма, поређени су алгоритми (6.37)-(6.40) и (6.15)-(6.18). Експериментални резултати су поређени у смислу грешке оцењивања дефинисане изразом:

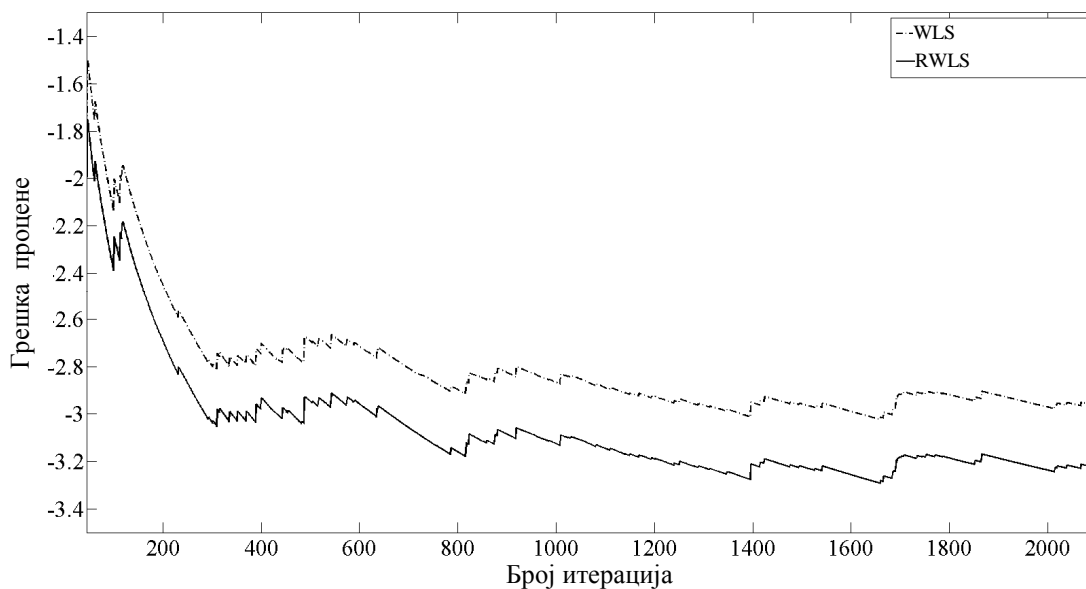
$$E_{MS} = \ln E \|\hat{y}(k) - y(k)\|^2. \quad (6.43)$$

У алгоритмима идентификације показало се да су за $\lambda = 0.98$ добијене најпрецизније процене.

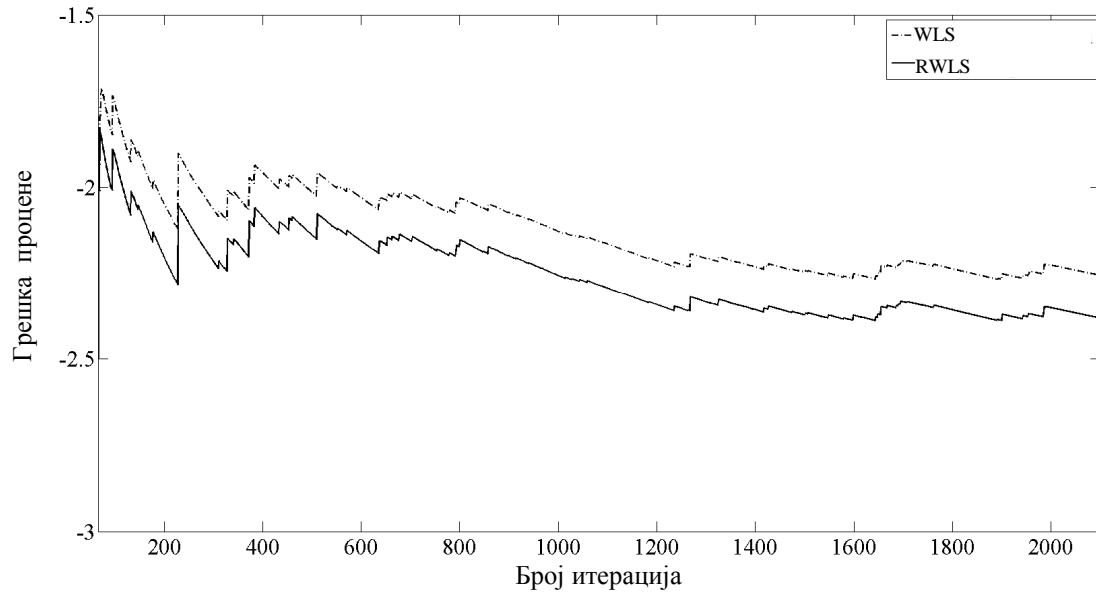
Слике 6.7-6.9 приказују грешке оцењивања за моделе система другог, трећег и четвртог реда, респективно.



Слика 6.7 : Грешка оцењивања у случају модела другог реда, $\lambda = 0.98$

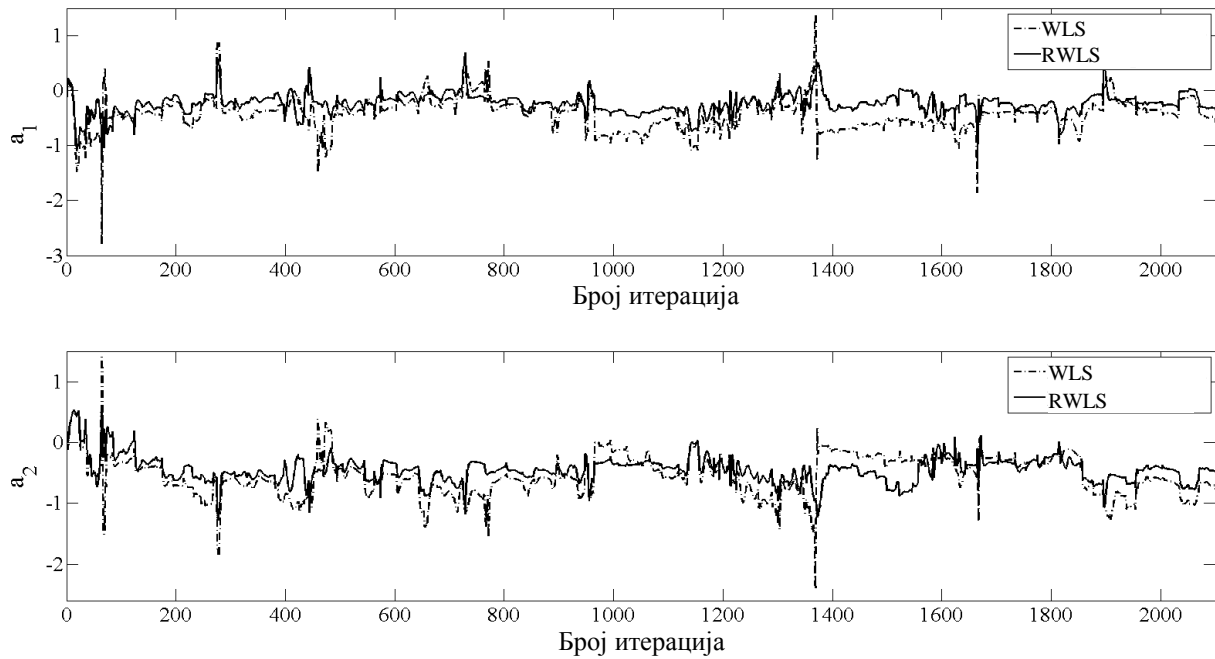


Слика 6.8 Грешка оцењивања у случају модела трећег реда, $\lambda = 0.98$

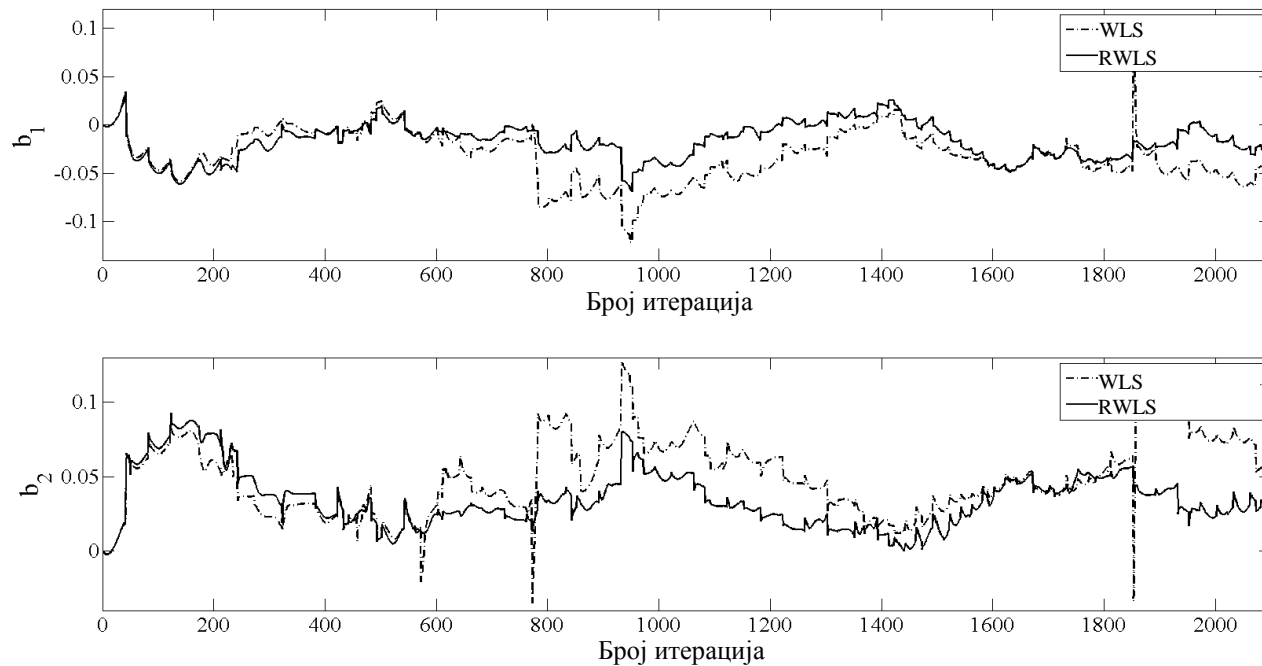


Слика 6.9 Грешка оцењивања у случају модела четвртог реда, $\lambda = 0.98$

Поређењем грешака оцењивања показује се да предложени модел другог реда даје најпрецизније резултате. Процене параметара овог модела су дате на сликама 6.10 и 6.11.

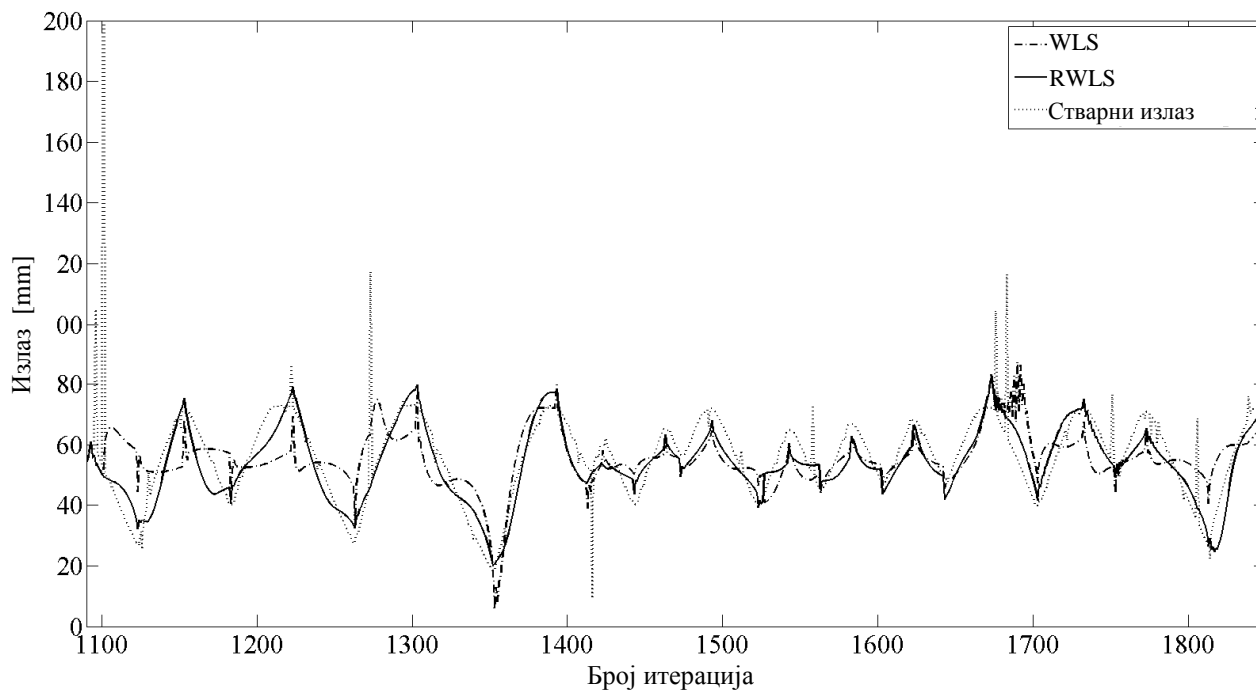


Слика 6.10 Процена параметара a_1 и a_2 , $\lambda = 0.98$



Слика 6.11 Процена параметара b_1 и b_2 , $\lambda = 0.98$

Упоредни приказ излаза цилиндра и излаза модела добијених помоћу номиналног и робусног алгоритма дата је на слици 6.12.



Слика 6.12 Упоредни приказ излаза цилиндра и модела, $\lambda = 0.98$

6.4 Додатак

6.4.1 Алгоритми за идентификацију система са променљивим параметрима

```
clear all
close all
clc
% ДЕФИНИСАЊЕ ПАРАМЕТАРА АЛГОРИТМА
% Број итерација
N=2e3;

% Почетна тачка од које се узимају улази и излази
b=1;

% Број параметара ОЕ модела
na=2;
nb=2;

% Фактор заборављања
lam=0.98;

% Појачање коваријационе матрице
c=1e4;

% Параметар делта код Хуберове функције
delta=1.3;

% Укупан број параметара
n=na+nb;

% Коваријационе матрице у почетној итерацији
Pk1=c*eye(n);
Pk2=c*eye(n);
```

```
% Вектор параметара у почетној итерацији
teta=zeros(n,1);
teta1(:,na)=teta;
teta2(:,na)=teta;

% Грешка у почетној итерацији
gr=zeros(2,1);

% Почетне вредности предикције излаза
ур(1:2,1:na)=zeros(2,na);

% Почетне вредности грешке предикције
eps(1:2,1:na)=zeros(2,na);

% ОБРАДА СНИМЉЕНИХ ПОДАТАКА
% Учитавање снимљених података
load 'D:\System Identification\ Eksperiment-teza\Identifikacija\Merenje2\podaci9.mat'

% када знамо претходне вредности улаза и излаза и при том мора бити 'b>na'
hyz=rom(b-na:b-1,3);
huz=rom(b-na:b-1,2);

% Дефинисање излаза
у=[hyz; rom(b:N,3)];

% Дефинисање улаза
u=[huz; rom(b:N,2)];

% Претварање у апсолутне вредности из снимљених
u=4*(u+1);
у=4.85*(у+1);
```

```
% Баждарење излаза
pa=[0.101138716123864 -2.142357819325546 14.542109178128470 -29.335752799067325 0
0];
y=polyval(pa,y);

% ИТЕРАЦИЈЕ
for k=na+1:na+(N-b+1)

% вектор мерења (k-та вредност)
fik1(:,k)=[-yp(1,k-1:-1:k-na), u(1,k-1:-1:k-nb)]';
fik2(:,k)=[-yp(2,k-1:-1:k-na), u(1,k-1:-1:k-nb)]';

% Грешка предикције
eps(1,k)=y(1,k)-fik1(:,k)*teta1(:,k-1);
eps(2,k)=y(2,k)-fik2(:,k)*teta2(:,k-1);

% Хуберова функција
psi(1,k)=min(abs(eps(2,k)),delta)*sign(eps(2,k));

% Одређивање Коваријационих матрица
inv1=fik1(:,k)*Pk1*fik1(:,k)+lam;
K1=Pk1*fik1(:,k)/inv1;
Pk1=(Pk1-K1*inv1*K1')/lam;

inv2=fik2(:,k)*Pk2*fik2(:,k)+lam;
K2=Pk2*fik2(:,k)/inv2;

if abs(eps(2,k))<=delta
Pk2=(Pk2-K2*inv2*K2')/lam;
else
Pk2=Pk2/lam;
end;
```

```
% Вектори параметара
teta1(:,k)=teta1(:,k-1)+K1*eps(1,k);
teta2(:,k)=teta2(:,k-1)+K2*psi(1,k);

% Предикције излаза
yp(1,k)=teta1(:,k)*fik1(:,k);
yp(2,k)=teta2(:,k)*fik2(:,k);

% Пуњење вектора итерација
iteracija(k-na+1)=k-na;
gr(1,k-na+1)=gr(1,k-na)+(norm(y(1,k)-yp(1,k)))^2;
grk(1,k-na+1)=1/(k-na)*gr(1,k-na+1);
er(1,k-na+1)=log(grk(1,k-na+1));
gr(2,k-na+1)=gr(2,k-na)+(norm(y(1,k)-yp(2,k)))^2;
grk(2,k-na+1)=1/(k-na)*gr(2,k-na+1);
er(2,k-na+1)=log(grk(2,k-na+1));
end

% Штампанье параметара „А“
figure
for k=1:na
subplot(na,1,k)
hold on
plot(iteracija,teta1(k,na:na+(N-b+1)), 'b');
plot(iteracija,teta2(k,na:na+(N-b+1)), 'r');
hold off

xlabel('Number of iterations','FontName','times new roman','FontSize',25);
ylabel(['a_' num2str(k)], 'FontName','times new roman','FontSize',25);
set(gca, 'FontName','times new roman','FontSize',20);
legend('WLS', 'RWLS');
```

```
set(legend, 'FontName','Times New Roman','FontSize',20);
end

% Штампане параметара “B”
figure
for k=1:nb
subplot(nb,1,k)
hold on
plot(iteracija,teta1(na+k,na:na+(N-b+1)), 'b');
plot(iteracija,teta2(na+k,na:na+(N-b+1)), 'r');
hold off
xlabel('Number of iterations','FontName','times new roman','FontSize',25);
ylabel(['b_' num2str(k)], 'FontName','times new roman','FontSize',25);
set(gca, 'FontName','times new roman','FontSize',20);
legend('WLS', 'RWLS');
set(legend, 'FontName','Times New Roman','FontSize',20);
end

% Штампане грешке
figure
hold on
plot(iteracija,er(1,:), '-b');
plot(iteracija,er(2,:), '-r');
hold off
xlabel('Number of iterations','FontName','times new roman','FontSize',25);
ylabel('$\ln E(\|\hat{y}(k)-y(k)\|^2)$', 'Interpreter','latex','FontName','times new
roman','FontSize',25)
set(gca, 'FontName','times new roman','FontSize',20);
legend('WLS', 'RWLS');
set(legend, 'FontName','Times New-Roman','FontSize',20);
```



```
% Штампање упоредних излаза
```

```
figure
```

```
hold on
```

```
plot(iteracija,yp(1,na:na+(N-b+1)), 'b');
```

```
plot(iteracija,yp(2,na:na+(N-b+1)), 'r');
```

```
plot(iteracija,y(1,na:na+(N-b+1)), 'k');
```

```
hold off
```

```
xlabel('Number of iterations','FontName','times new roman','FontSize',25);
```

```
ylabel('Output [mm]','Interpreter','latex','FontName','times new roman','FontSize',25)
```

```
set(gca,'FontName','times new roman','FontSize',20);
```

```
legend('WLS','RWLS','Stvarn izlaz');
```

```
set(legend,'FontName','Times New-Roman','FontSize',20);
```

```
% Штампање улаза
```

```
figure
```

```
plot(iteracija,u(1,na:na+(N-b+1)), 'b');
```

```
xlabel('Number of iterations','FontName','times new roman','FontSize',25);
```

```
ylabel('Input signal','Interpreter','latex','FontName','times new roman','FontSize',25)
```

```
set(gca,'FontName','times new roman','FontSize',20);
```

```
% Штампање излаза система
```

```
figure
```

```
plot(iteracija,y(1,na:na+(N-b+1)), 'k');
```

```
xlabel('Time','FontName','times new roman','FontSize',25);
```

```
ylabel('Output [mm]','Interpreter','latex','FontName','times new roman','FontSize',25)
```

6.4.2 Алгоритам за генрисање бинарних сигнала са задатом аутоковаријансом

```
% Постављање ширине фреквентног опсега
wd = 0.5;
wg = 2.5;
% Параметри алгоритма
N=10^4;
n=40;
m=1;

% Рачунање аутоковаријационог низа
for k=0:n;
r(k+1)=1/(log(wg)-log(wd))*quad('cos(k*x)/x',wd,wg);
end

% Дефинисање опсега сигнала
y_d=-1;
y_g=1;
y=zeros(N+n,1);
r0=zeros(n+1,1);
r1=zeros(n+1,1);

rdz=r';
rd=(rdz-y_g*y_d)/(y_g-y_d)^2;

for i=1:N
r0=r0-rd;
r1=r0+[1;y(n+i-1:-1:i)];

if norm(r0)>norm(r1)
y(n+i)=1;
r0=r1;
```

end

end

% Бинарни сигнал са жељеном аутоковаријансом

$y=(y_g-y_d)*y(n+1:end)+y_d;$

% Штампате аутоковаријационог низа

$acov = xcov(y,n,'coeff');$

for i=1:n+1

lags(i)=i-1;

a(i)=acov(n+i);

end

subplot(2,1,1)

hold on

plot(lags,a,'k');

plot(lags,rdz,'k');

xlabel('Number of lags','FontName','times new roman','FontSize',17);

ylabel('Autocovariance sequences','FontName','times new roman','FontSize',17);

set(gca,'FontName','times new roman','FontSize',15);

legend('Designed autocovariance sequence','Desired autocovariance sequence');

set(legend,'FontName','Times New Roman','FontSize',15);

hold off;

% Штампате спектра сигнала

subplot(2,1,2)

$g=csd(y,y);$

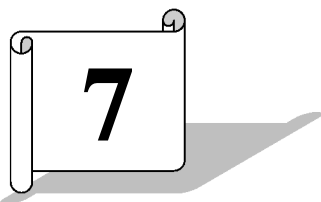
$w=[0:1:length(g)-1];$

semilogy(w,g,'k');

xlabel('Frequency','FontName','times new roman','FontSize',17);

ylabel('Power spectral density','FontName','times new roman','FontSize',17);

set(gca,'FontName','times new roman','FontSize',15);



Закључак и предлози за наставак истраживања

Кроз рад на докторској дисертацији, дошло се до низа резултата, који су сумирани у овом поглављу. Такође, у овом делу тезе су дати предлози за будуће правце истраживања.

7.1 Закључак

Класа рекурзивних алгоритама заснована на грешци излаза (ОЕ модели) има своје корене у адаптивним системима управљања са референтним моделом. До сада у литератури није разматрана робусност ових алгоритама у статистичком смислу. Применом Хуберових статистика генерише се робусна верзија горе споменутих алгоритама. Такви алгоритми су погодни за идентификацију индустријских процеса у присуству неконзистентних опсервација. Применом планирања експеримента алгоритми су постали још погоднији за примену јер се повећава њихова брзина конвергенције.

Пошто се показује да при синтези експеримента типично добијен оптимални улазни сигнал је одређен у зависности од својих спектралних особина, у тези се разматра добијање оптималног спектра применом алгоритма помичног хоризонта. У Поглављу 3 је изведена форма алгоритма за генерисање бинарних сигнала који су дефинисани на произвољном интервалу $[a, b]$ односно са очекиваном вредношћу која не мора бити 0.

Такође је разматрана оптимална синтеза улазног сигнала (заснована на минимизацији скаларног критеријума усредњене Фишерове матрице), за идентификацију ОЕ модела, у случају да је ограничена варијанса излазног сигнала. Показано је, у овом случају, да се оптимални експеримент добија коришћењем регулатора минималне варијансе и стохастичког референтног сигнала. Предложена је адаптивна двостепена процедура за генерисање улазног сигнала. Најпре се добија иницијални модел применом PRBS сигнала а после тога се за генерисање сигнала примењује регулатор минималне варијансе. Резултати симулација показују супериорност идентификације применом адаптивне методологије за генерисање улазног сигнала у односу на идентификацију параметара система у отвореној повратној спрези применом PRBS сигнала. Такође је показано да се релаксацијом ограничења излаза добија мања грешка оцењиваних параметара.

У Поглављу 4 је предложена процедура естимације параметара стохастичких линеарних система са временски променљивим параметрима у присуству негаусовог шума мерења. Промене параметара су представљене у форми случајног корака. Извршене су хеуристичке модификације Масрељез-Мартиновог филтра које значајно повећавају његову практичну употребљивост. Супериорност предложеног робусног алгоритма идентификације над стандардним Калмановим филтром је илустрована кроз симулације на

примеру ОЕ модела. При идентификацији користио се оптимални улазни сигнал који је генерисан применом алгоритма са помичним хоризонтом. Изложени резултати симулација показују да је класичан Калманов филтар веома осетљив на присуство негаусовог шума мерења, на супрот предложеном робусном алгоритму естимације параметара.

Идентификација процеса описаних општим моделом (непознати параметри и стања процеса) захтева увођење проширеног Калмановог филтра. У Поглављу 5 је предложена процедура естимације стања и параметара стохастичких нелинеарних система са временски променљивим параметрима. Промена параметара описана је методом случајног корака. Пошто се разматра идентификација у присуству негаусових шума, природни оквир за реализацију оваквог алгоритма је проширени Масрељез-Мартинов филтар (проширени робусни Калманов филтар). Хеуристичка модификација проширеног Масрељез-Мартиновог филтра значајно повећава његову практичну вредност. Практични аспект добијених резултата илустрован је интензивним симулацијама.

Робусни алгоритам идентификације система са променљивим параметрима који припадају класи ОЕ модела је изведен у Поглављу 6. Практични аспект добијених резултата потврђен је кроз експеримент на пнеуматском цилиндру који се налази у лабораторији Центра за аутоматско управљање и флуидну технику, Факултета за машинство и грађевинарство у Краљеву.

Са практичног становишта је од посебног значаја да се истакне да је ефикасност предложених робусних алгоритама (модификовани Масрељез-Мартинов филтар, модификовани проширени Масрељез-Мартинов филтар, RWLS алгоритам за ОЕ тип модела) задовољавајуће висока за произвољан степен контаминације. Робусни алгоритми постижу приближно исти квалитет процена као конвенционални, линеарни алгоритми идентификације када поремећај има чисту нормалну расподелу. Са повећањем контаминације расте и надмоћност робусних алгоритама над линеарним. Такође, треба нагласити да се за разлику од Калмановог филтра или WLS алгоритма, ефикасност робусних алгоритама не мења у зависности од вредности варијансе контаминирајућег члана у негаусовој расподели.

Са аспекта имплементације робусних алгоритама је важно је да се обезбеди робусна ефикасност погодним избором вредности параметра k_ϵ у нелинеарној функцији $\psi(\cdot)$. Параметар k_ϵ је погодно изабран у смислу да робусни алгоритам поседује приближно исти квалитет процена као линеарни алгоритам у условима чисто нормалног расподељеног поремећаја.

7.2 Предлози за наставак истраживања

Изложени предлози будућег истраживања представљају директно проширење презентованих резултата као и нове изазове.

- 1) Уопштавање теореме о оптималном улазу ОЕ система са једним улазом и једним излазом (SISO) чији егзогени део садржи само један параметар на:
 - а) мултипараметарски случај егзогеног дела ОЕ модела,
 - б) општије структуре модела, као што су Бокс-Џенкинс (Box – Jenkins или краће BJ) модели,

- в) случај мултиваријабилних (MIMO) система.
- 2) Планирање експеримента за случај:
 - а) линеарних MIMO стохастичких система
 - б) нелинеарних MIMO стохастичких система
- 3) Добијени робусни Калманов филтар и проширени Калманов филтар представљају полазну тачку за реализацију адаптивног регулатора.
- 4) Са становишта практичне примене важно је обезбедити софтверску подршку у форми пакета за робусне методе идентификације

Литература

- [1] T. Soderstrom, P. Stoica (1989): *System Identification*. Prentice – Hall, London
- [2] L. Ljung (1999): *System Identification: Theory for the User*, 2nd ed. Prentice – Hall, NJ
- [3] R. Pintelon, J. Schoukens (2001): *System Identification: A Frequency Domain Approach*. IEEE Press, NY
- [4] L. Ljung, T. Söderström (1983): *Theory and practice of recursive identification*. MIT Press.
- [5] P. Eykhoff (1974): *System identification: Parameter and state estimation*. Wiley, New Jersey
- [6] Gerencser, L., Hjalmarsson, H. and Martensson, J. (2009): Identification of ARX systems with non-stationary inputs-asymptotic analysis with application to adaptive input design, *Automatica*, Vol. 45, Iss.3, pp. 623-633
- [7] Agüero, J.C., Yuz, J.I., Goodwin, G.C. and Delgado, R.A. (2010): On the equivalence of time and frequency domain maximum likelihood estimation, *Automatica*, Vol. 46, Iss. 2, pp. 260-270
- [8] Gevers, M. (2005): Identification for Control: From the Early Achievements to the Revival of Experiment Design, *European Journal of Control*, Vol. 11, Iss.4-5, pp. 335-352
- [9] Welsh J. C. and Rojas, C.R. (2009): A scenario based approach to robust experiment design. 15th IFAC Symposium on System Identification, Saint-Malo, France, pp.186-191
- [10] P. Stoica, T. Söderström (1982): A useful input parametrization for optimal experiment design. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 27, Iss.4, pp. 986-989
- [11] J.W., Tukey (1960): A survey of sampling from contaminated distributions. *Contributions to Probability and Statistics*. Stanford University Press, Stanford, pp. 448 – 485
- [12] Barnett V, Lewis T (1994): *Outliers in Statistical Data*. 3rd ed. Wiley-Blackwell, New York
- [13] Huber PJ (1981): *Robust Statistics*. Wiley, New York
- [14] W.J. Rey (1977): *Robust Statistical Methods*. Springer Verlag.
- [15] R.V. Hogg (1979): Statistical robustness: One view of its use in applications today. *The American Statistician*, Vol. 33(3), pp. 108–115
- [16] F. Hampel, E. Ronchetti, P. Rousseeuw, W. Stahel (2005): *Robust Statistics: The approach based on influence functions*, 1st Ed. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [17] G.L. Shevlyakov, N.O. Vilchevski (2001): *Robustness in data analysis: Criteria and methods*. Walter de Gruyter

-
- [18] R.A. Maronna, D.R. Martin, V.J. Yohai (2006): Robust statistics: Theory and methods. Wiley, New York
- [19] P.J. Huber (1963): Robust estimation of a location parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol.35, No.1, pp. 73-101
- [20] T.S. Ng, G.C. Goodwin and R.L. Payne (1977): On maximal accuracy estimation with output power constraints. *IEEE Trans. Automatic Control* Vol.22, Num (1), pp. 133–134
- [21] T.S. Ng, G.C. Goodwin, T. Söderström (1977): Optimal experiment design for linear systems with input-output constraints. *Automatica*. 13(6), pp. 571- 577
- [22] I. Gustavsson, L. Ljung, T. Söderström (1977): Identification of processes in closed loop – identifiability and accuracy aspects. *Automatica*. 13(1), pp. 59- 75
- [23] E. Walter, L. Pronzato (1997): Identification of Parametric Models from Experimental Data. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- [24] R.K. Mehra (1974): Optimal inputs for linear system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(3), pp. 192–200
- [25] R.K. Mehra (1974): Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems—survey and new results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), pp. 753–768
- [26] R.K. Mehra (1981): Choice of input signals. *Trends and Progress in System Identification* (P. Eykhoff, Ed.). Pergamon Press, Oxford.
- [27] G.C. Goodwin, R.L. Payne (1977): *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis*. Academic Press, NY
- [28] M. Zarrop (1979): *Optimal Experiment Design for Dynamic System Identification*, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, Berlin
- [29] U. Forssell, L. Ljung (2000): Some results on optimal experiment design. *Automatica*, 36(5), pp. 749–756
- [30] C.R. Rojas, J.S. Welsh, G.C. Goodwin (2007): A receding horizon algorithm to generate binary signals with a prescribed autocovariance, *American Control Conference*, pp. 122-127, New York, July 9th-13th
- [31] C.R. Rojas, J.C. Agüero, J.S. Welsh, G.C. Goodwin, A. Feuer (2012): Robustness in experiment design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4), pp. 860-874
- [32] C.R. Rojas, J.S. Welsh, G.C. Goodwin, A. Feuer (2007): Robust optimal experiment design for system identification. *Automatica*, 43(6), pp. 993-1008
- [33] J.S. Welsh, G.C. Goodwin (2002): Finite sample properties of indirect nonparametric closed-loop identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8), pp. 1277-1292
- [34] T. Zhou (2006): Frequency response estimation for NCF's of a MIMO plant from closed-loop time-domain experiment data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1), pp. 38-51
-

-
- [35] M. Barenthin, H. Jansson, H. Hjalmarsson (2005): Applications of mixed H_2 and H_∞ input design in identification. Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Prague, pp. 458-463
- [36] L. Gerencsér, H. Hjalmarsson, J. Mårtensson (2009): Identification of ARX systems with non-stationary inputs-asymptotic analysis with application to adaptive input design. *Automatica*, 45(3), pp. 623-633
- [37] J.C. Agüero, G.C. Goodwin (2007): Choosing between open and closed-loop experiment in linear system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 52(8), pp. 1475-1480
- [38] C.R. Rojas, J.C. Agüero, J.S. Welsh, G.C. Goodwin (2008): On the equivalence of least costly and traditional experiment design for control. *Automatica*, 44(11), pp. 2706-2715
- [39] A. Lindquist, G. Picci (1996): Canonical correlation analysis, approximate covariance extension, and identification of stationary time series. *Automatica*, Vol. 32(5), pp. 709-733
- [40] C. Byrnes, S. Gusev, A. Lindquist (2001): From finite covariance windows to modelling filters, *SIAM Review*, Vol. 43, pp. 645-675
- [41] S. Wu, S. Boyd L. Vandenberghe (1996): FIR Filter Design via Semidefinite Programming and Spectral Factorization, 35th IEEE Conf. on Decision and Control. Kobe, Japan. pp. 271-276
- [42] I.D. Landau (1976): Unbiased recursive identification using model reference techniques. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(2), pp. 194-202
- [43] H. Cramer (1946): *Mathematical methods of statistics*. Princeton University Press. Princeton
- [44] A.N. Shiriyayev (1989): *Probability*. Nauka, Moscow, (in Russian)
- [45] I.D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad (1998): *Adaptive Control*, 1st Ed. Springer, Berlin
- [46] M.T. Rodriguez, S.P. Banks (2010): *Linear, time-varying approximations to nonlinear dynamical systems: with applications in control and optimization*. Springer, Berlin
- [47] K. Khayati, P. Bigras, L.A. Dessaint (2008): Force control loop affected by bounded uncertainties and unbounded inputs for pneumatic actuator systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 130(1), pp.1-9
- [48] B. Lu, G. Tao, Z. Xiang, W. Zhong (2008): Modeling and Control of the Pneumatic Constant Pressure System for Zero Gravity Simulation. *International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pp.688-693, July 2 - 5, Xi'an, China
- [49] K. Lindqvist, H. Hjalmarsson (2000): Optimal input design using linear matrix inequalities. *Proc. of the 12th IFAC Symposium on System Identification*, pp.1085-1090. Santa Barbara, California, USA.
- [50] K. Lindqvist, H. Hjalmarsson (2001): Identification for control: Adaptive input design using convex optimization, pp. 4326-4331. *IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, Florida, USA.
-

- [51] H. Jansson, H. Hjalmarsson (2005): Input Design via LMIs Admitting Frequency wise Model Specifications in Confidence Regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(10), pp. 1534–1549
- [52] V. Stojanovic, V. Filipovic (2013): Adaptive input design for identification of output error model with constrained output. *Circuits Systems and Signal Processing*. DOI:10.1007/s00034-013-9633-0 (ISSN: 0278-081X)
- [53] V. Stojanovic, V. Filipovic (2012): Adaptive Input Design for Identification of Output Error Model with Constrained Output. XI Triennial International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements. pp. 156-159, Nis, Serbia, November 14th–16th , (ISBN: 978-86-6125-072-9)
- [54] V. Stojanovic, N. Nedic, V. Filipovic (2009): Генерисање улазних сигнала за идентификацију динамичких система засновану на грешци излаза. ХИПНЕФ 2009, стр. 337-342, Врњачка Бања, 14. –16. Октобар, (ISBN:978-86-81505-48-9)
- [55] C.J. Masreliez and R.D. Martin (1977): Robust Bayesian estimation for the linear model and robustifying the Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 22, Iss. 3, pp. 361–371
- [56] C.J. Masreliez (1975): Approximate non-Gaussian filtering with linear state and observation relations. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 20, Iss. 1, pp. 107–110
- [57] R.D. Martin (1972): Robust estimation of signal amplitude. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol.18, Iss.5, pp. 596–606
- [58] C. Tsai and L. Kurz (1983): An adaptive robustizing approach to Kalman filtering. *Automatica*. Vol.19, Iss.3, pp. 278-288
- [59] V. Filipovic, V. Stojanovic (2010): Robust Kalman filter as parameter estimator for Output Error models, Part 1: experiment design for the case of constant parameters. X Triennial International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements. pp. 359-362, Nis, Serbia, November 10th–12th , (ISBN: 978-86-6125-020-0)
- [60] V. Filipovic, N. Nedic, V. Stojanovic (2011): Robust identification of pneumatic servo actuators in the real situations. *Forschung im Ingenieurwesen - Engineering Research*. Volume 75, Number 4, pp. 183-196, (ISSN: 0015-7899)
- [61] V. Stojanovic, V. Filipovic, N. Nedic (2011): Stochastic Model of a Pneumatic Actuator. VII International Triennial Conference – Heavy Machinery 2011. Volume 7, No 3, Session C, pp. 47-52, Vrnjacka Banja, June 29th – July 2nd, (ISBN: 978-86-82631-58-3)
- [62] H. Cox (1964): On the estimation of state variables and parameters for noisy dynamic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 9 (1), pp. 5-12
- [63] L. Ljung (1979): Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 24 (1), pp. 36-50
- [64] Wang, Z., Liu, X., Liu, Y., Liang, J., Vinciotti, V. (2009): An extended Kalman filtering approach to modelling nonlinear dynamic gene regulatory networks via short gene

- expression time series. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, Vol. 6(3), pp. 410–419
- [65] Aksoy, S., Muhurcu, A.; Kizmaz, H.(2010): State and parameter estimation in induction motor using the Extended Kalman Filtering algorithm. *Proceedings of the International Symposium Modern Electric Power Systems*, pp. 1-5
- [66] G.L. Plett (2004): Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based HEV battery packs: Part 3. State and parameter estimation. *Journal of Power Sources*, Vol. 134(2), pp. 277–292
- [67] A. Carrassi, S. Vannitsem (2011): State and parameter estimation with the extended Kalman filter: an alternative formulation of the model error dynamics. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 137(655), pp. 435-451
- [68] J.F. Blackburn, G. Reethof, J.L. Shearer (1960): *Fluid power control*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts
- [69] P.J. Wang, P. Moore (1999): A practical control strategy for servo-pneumatic actuator systems. *Control Engineering Practice*, Vol. 7(12), pp. 1483–1488
- [70] P.J. Wang, P. Moore (1999): Accurate position control of servo pneumatic actuator systems: an application to food packaging. *Control Engineering Practice*, Vol. 7(6), pp. 699–706
- [71] E. Richard, S. Scavarda (1996): Comparison between linear and nonlinear control of an electropneumatic servodrive. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 118(2), pp. 245–252
- [72] H. Keller, R. Isermann (1993): Model-based nonlinear adaptive control of a pneumatic actuator. *Control Engineering Practice*, Vol. 1(3), pp. 505–511
- [73] M.E. Salgado, G.C. Goodwin, R.H. Middleton (1988): Modified least squares algorithm incorporating exponential resetting and forgetting. *International Journal of Control*. Vol.47, Iss.2, pp. 477-491
- [74] Z. Han, P. Frank (1997): Comment on “Modified least squares algorithm incorporating exponential resetting and forgetting”. *International Journal of Control*, Vol. 68, Iss. 4, pp. 947-953
- [75] V. Filipovic, N. Nedic (2008): ПИД регулатори. Машински факултет Краљево, Краљево
- [76] B. Kovacevic, Z. Djurovic (1997): Robust recursive time series modeling using ARX models with optimal exogenous inputs. *Proceedings of 13th International Conference on Digital Signal Processing*, 2-4 July, pp. 911 – 914, Santorini, Greece
- [77] B. Kovacevic, M. Milosavljevic, M. Veinovic (1995): Robust recursive AR speech analysis. *Signal Processing*, Vol.44, Iss.2, pp. 125–138
- [78] B. Kovacevic, M. Milosavljevic, M. Veinovic (1994): Time-varying AR speech analysis using robust RLS algorithm with variable forgetting factor. *Proceedings of the 12th IAPR International Conference on Pattern Recognition*, 9-13 October, Jerusalem, Israel

-
- [79] V. Filipovic, V. Stojanovic, N. Nedic, D. Prsic (2012): TARX Model for Pneumatic Cylinder and Identification. XI Triennial International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements. pp. 260-263, Nis, Serbia, November 14th–16th, (ISBN: 978-86-6125-072-9)
- [80] V. Filipovic, V. Stojanovic (2010): Robust Kalman filter as parameter estimator for Output Error models, Part 2: The case of time-varying parameters. X Triennial International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements. pp. 363-366, Nis, Serbia, November 10th–12th, (ISBN: 978-86-6125-020-0)
- [81] V. Filipovic (1991): Robust signal estimation based on influence function. 9th IFAC-IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation. pp. 260-265, Budapest, Hungary
- [82] V. Filipovic (1997): Identification of dynamic stochastic systems. Trade off between efficiency and robustness. 11th IFAC Symposium on System Identification, Fukuoka, Japan
- [83] V. Filipovic (2003): Robust identification of AR models based on empirical risk minimization. The 11th Mediterranean Conference on Control and Automation, T5-015, Rhodes, Greece
- [84] V. Filipovic, B. Kovacevic (1992): Nonlinear recursive AML for robust system identification. Publications of the Faculty of Electrical Engineering, Series: Automatic Control. University of Belgrade
- [85] B. Kovacevic, V. Filipovic (1993): On a class of robust instrumental variable identification algorithms. Control and Computers, Vol. 19, No. 1, pp. 21 – 26
- [86] B. Kovacevic, V. Filipovic (1994): Robust recursive identification of linear systems using priori information. Control - Theory and Advanced Technology, Vol. 10, No. 1, pp. 39 – 56
- [87] B. Kovacevic, V. Filipovic (1988): Robust real-time identification of linear systems with correlated noise. International Journal of Control, Vol. 48, Iss.3, pp. 993 – 1010
- [88] V. Filipovic, B. Kovacevic (1994): On robust AML identification algorithm. Automatica, Vol. 30, Iss. 11, pp. 1775 – 1778
- [89] B. Poljak, J. Tsytkin (1980): Robust identification. Automatica, Vol. 16, Iss. 1, pp. 53–63