UDK/UDC: 519.233.5 : 519.1

TERNARY GRAPH I NJEGOVA PRIMENA U REGRESIONOJ ANALIZI

Dr Milan Kolarević, Prof. dr Miloje Rajović, Mišo Bjelić

Kategorizacija rada: PREGLEDNI RAD
Recenzent: Prof dr Vlastimir Đokić, MF Niš
Rad primljen: 15.02.2005.

Adresa:
Mašinski fakultet, 36000 Kraljevo, Dositejeva 19
Tel: 036/336-866

REZIME: *Ternary graph se koristi u regresionoj analizi za vizuelno prikazivanje četvorodimenzionalnih problema. U radu je dat opis Ternary graph-a, postupak transformacije podataka i postupak određivanja koeficijenata regresione linije za pretpostavljeni oblik višestruke regeresije.*

KLJUČNE REČI: *Ternary graph, regresiona analiza, kategorizovani dijagrami*

1. UVOD

Zadatak regresione analize je da na osnovu eksperimentalnih tačaka pronađe odgovarajuću analitičku zavisnost zavisno promenljive od analiziranih uticajnih parametara čija je signifikantnost dokazana. Kada je u pitanju zavisnost od jednog ili dva uticajna parametra regresiona zavisnost se može prikazati u ravanskom ili prostornom koordinatnom sistemu krivom linijom odnosno krivom površinom. Međutim, kada je u pitanju četvorodimenzionalni problem dobijene zavisnosti nije moguće prikazati grafički standardnim dijagramima. S obzirom da grafički prikaz mnogo više govori o posmatranoj pojavi nego tabele i analitičke zavisnosti to su u nastavku prikazane mogućnosti grafičkog predstavljanja četvorodimenzionalnih problema kategorizovanim dijagramima i prostornim trougaonim dijagramima (ternary graph).

2. KATEGORIZOVANI 3D DIJAGRAMI

Prostorno predstavljanje zavisnosti posmatrane pojave od tri nezavisno promenljive je moguće ukoliko se izvrši kategorizacija eksperimentalnih podataka. Ukoliko je npr. za plan eksperimenata usvojen Taguchi-jev plan eksperimenata zasnovan na ortogonalnoj matrici L_8 (2^7) koja zahteva 8 eksperimenata za analizu uticaja 7 faktora od kojih svaki može biti na dva nivoa tj. *niži nivo* kodiran sa "0" (kada nema uticaja posmatranog faktora) i viši nivo kodiran sa "1" (kada postoji uticaj posmatranog faktora) i ukoliko se dokaže da su tri od sedam faktora (npr. X_1 , X_2 i X_3) signifikantna to je podatke moguće podeliti u dve grupe npr. "grupu I" u kojoj je X_1=0 i "grupu II" u kojoj je X_1=1. Za ovako prilagođene podatke je moguće nacrtati dva prostorna dijagrama:

- dijagram 1:

$$\hat{Y}_1 = \hat{Y}_{X_1=0} = f(X_2, X_3), \quad \text{za } X_1=0 \tag{1}$$

- dijagram 2:

$$\hat{Y}_2 = \hat{Y}_{X_1=1} = f(X_2, X_3), \quad \text{za } X_1=1 \tag{2}$$

Kako postoji samo 8 podataka (iz 8 eksperimenata) to se podaci dele u dve grupe od po 4 podatka (tabela 1 i slika 1). Za formiranje analitičke zavisnosti (1) i (2) su sada na raspolaganju samo po 4 podatka odnosno, po 4 eksperimentalne tačke što je malo za nelinearnu zavisnost. U ovom slučaju je moguće dobiti analitičke izraze za funkcije (1) i (2) samo u obliku višestruke linearne regresije.

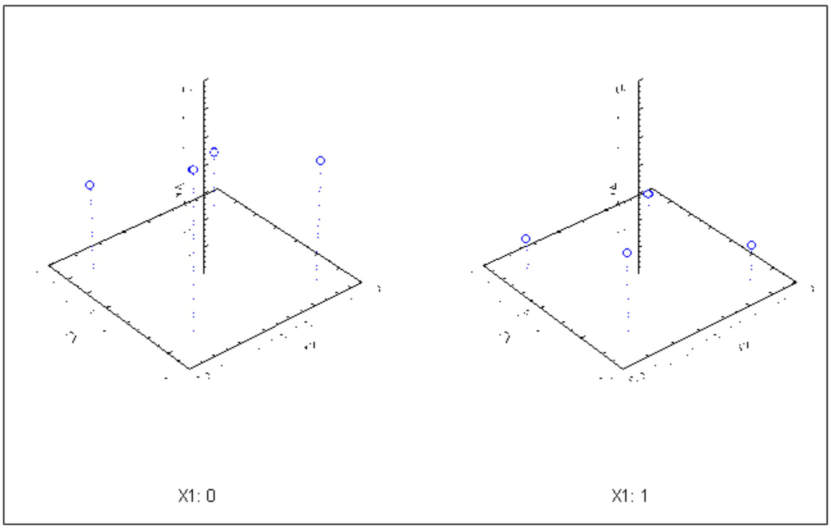
Pretpostavljene jednačine višestruke regresije imaju oblik:

$$\hat{Y} = a + b_1 X_2 + b_2 X_3 \tag{3}$$

Izračunate vrednosti koeficijenata za funkciju (3) su prikazane u tabeli 2.

Tabela 1. Eksperimentalne vrednosti podeljene u grupe

	X1	*X2*	*X3*	*Y*
Grupa I $X_1 = 0$	**0**	0	0	96
	0	0	1	66
	0	1	0	79
	0	1	1	58
Grupa II $X_1 = 1$	**1**	0	0	67
	1	0	1	46
	1	1	0	48
	1	1	1	42



Slika 1. Položaj eksperimentalnih tačaka u prostoru

Tabela 2. Vrednosti koeficijenata višestruke linearne regresije

$X_1 = 0$		$X_1 = 1$	
Koeficijent	Vrednost koeficijenta	Koeficijent	Vrednost koeficijenta
a	93.75	*a*	63.25
b_1	-12.5	b_1	-11.5
b_2	-25.5	b_2	-13.5

Empirijske jednačine glase:

$$\boxed{\widehat{Y}_1 = 93.75 - 12.5 * X_2 - 25.5 * X_3} \quad (4)$$

$$\boxed{\widehat{Y}_2 = 63.25 - 11.5 * X_2 - 13.5 * X_3} \quad (5)$$

Za linearne modele višestruke regresije date jednačinama (4) i (5) su izračunati kvadrati odstupanja empirijskih tačaka od jednačine regresije i dobijena je vrednost zbira kvadrata odstupanja SK=76.5 (tabela 3). Kako je apsolutna vrednost najvećeg odstupanja ε_{max}=3.75 manja od 3*E=9.28 to se na osnovu pravila *tri sigma* može smatrati da je pretpostavljena funkcionalna zavisnost dobra.

Trodimenzionalni dijagrami kategorizovani po X_1 tj. grafički prikaz zavisnosti (4) i (5) su dati na slici 2. Ovi prikazi su veoma informativni u pogledu razjašnjenja uticaja posmatranih parametara. Sa slike se uočava da sa porastom vrednosti parametra X_2 vrednost posmatrane funkcije $\widehat{Y}$ opada. Isti trend uticaja ali sa znatno jačim intenzitetom ima parametar X_3 . Uticaj parametra X_1 se može sagledati upoređenjem levog i desnog dijagrama na slici 2. Kada ne deluje parametar X_1 (X_1 =0) uticaj parametara X_2 i X_3 je predstavljen prostornom ravni na levoj strani, dok se pod uticajem dejstva parametra X_1 (X_1 =1) prostorna ravan spušta (dijagram desno) pri čemu se menja i nagib ravni u oba pravca, što znači da parametar X_1 utiče i na efekte dejstva parametara X_2 i X_3 .

Tabela 3. Proračun zbira kvadrata odstupanja za regresionu liniju

X1	*X2*	*X3*	Y_i	$\hat{Y}_i$	ε	$ε^2$
0	0	0	96	93.75	2.25	5.0625
0	0	1	66	68.25	-2.25	5.0625
0	1	0	79	81.25	-2.25	5.0625
0	1	1	58	55.75	2.25	5.0625
1	0	0	67	63.25	3.75	14.0625
1	0	1	46	49.75	-3.75	14.0625
1	1	0	48	51.75	-3.75	14.0625
1	1	1	42	38.25	3.75	14.0625
					Zbir kvadrata odstupanja	76.5
					Srednje kvadratno odstupanje E =	3.092329
					3*E =	9.276988

Kako trodimenzionalni dijagrami nisu pogodni za tačnije očitavanje vrednosti funkcije to je na slici 3 prikazan konturni površinski dijagram takođe kategorizovan po X_1 . Uz ovaj dijagram je data i legenda pri čemu svaka boja nosi određenu vrednost posmatrane zavisne promenljive, dok se vrednosti nezavisnih promenljivih X_2 i X_3 mogu očitati na horizontalnoj i vertikalnoj osi.

Na isti način se mogu dobiti i trodimenzionalni dijagrami kategorizovani po X_2 i X_3 i odgovarajući konturni površinski (2D) dijagrami.

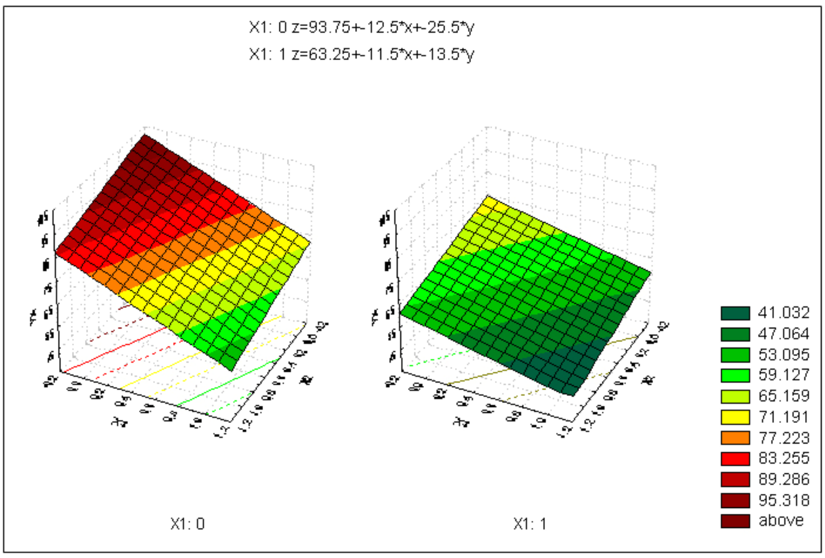
3. TERNARY GRAPH

Za prikazivanje trodimenzionalne zavisnosti 4 promenljive, na raspolaganju stoji i trougaoni dijagram (Ternary Graph) koji će biti objašnjen u nastavku.

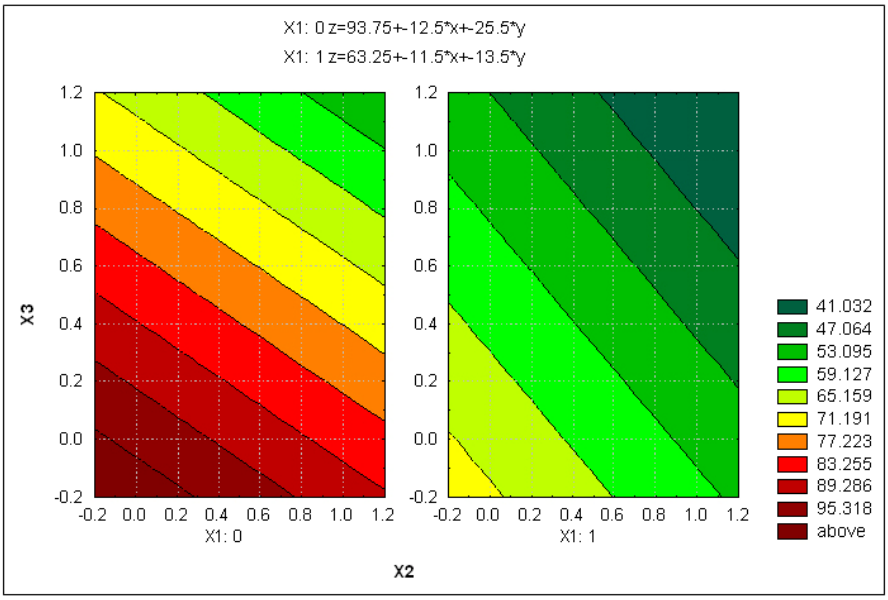
Na slici 4 je prikazan prostorni raspored eksperimentalnih tačaka u koordinatnom sistemu $X_1X_2X_3$.

Ako iz postojećeg eksperimentalnog plana koji sadrži 8 tačaka odbacimo prvi eksperiment (X_1=0, X_2=0, X_3=0) i ako vrednosti uticajnih parametara posmatramo kao proporcije, onda preostalih 7 kombinacija od po tri komponente treba formirati tako da svaka kombinacija daje broj 1 (tabela 4).

Unošenjem ovih podataka u 3D dijagram postaje očigledno da sve tačke leže u istoj ravni čiji presek sa koordinatnim sistemom daje prostorni trougao (slika 5.).



Slika 2. 3D kategorizovani dijagram

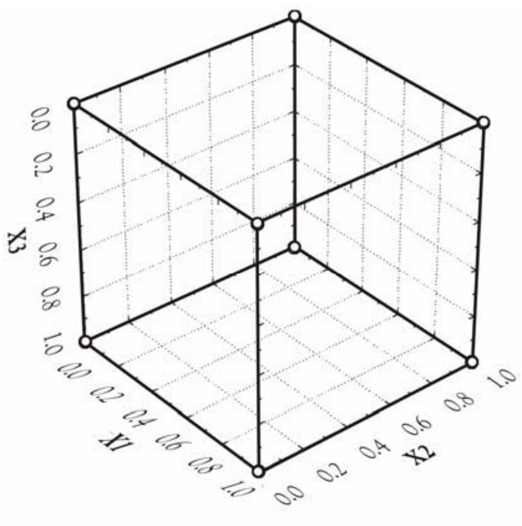


Slika 3. Kategorizovani konturni površnski dijagram

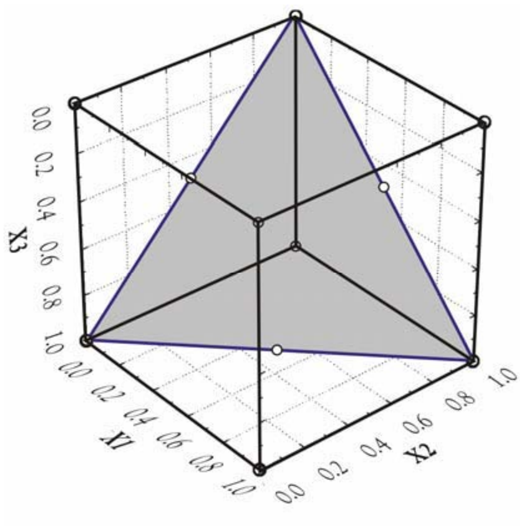
Tabela 4. Transformacija podataka za trougaoni dijagram

Eksperi-ment	*X1*	*X2*	*X3*
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0
4	0	1	1
5	1	0	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	1	1

Eksperi-ment	*X1*	*X2*	*X3*
2	0	0	1
3	0	1	0
4	0	1	1
5	1	0	0
6	0.5	0	0.5
7	0.5	0.5	0
8	0.333	0.333	0.333



Slika 4. Raspored eksperimentalnih tačka u prostoru

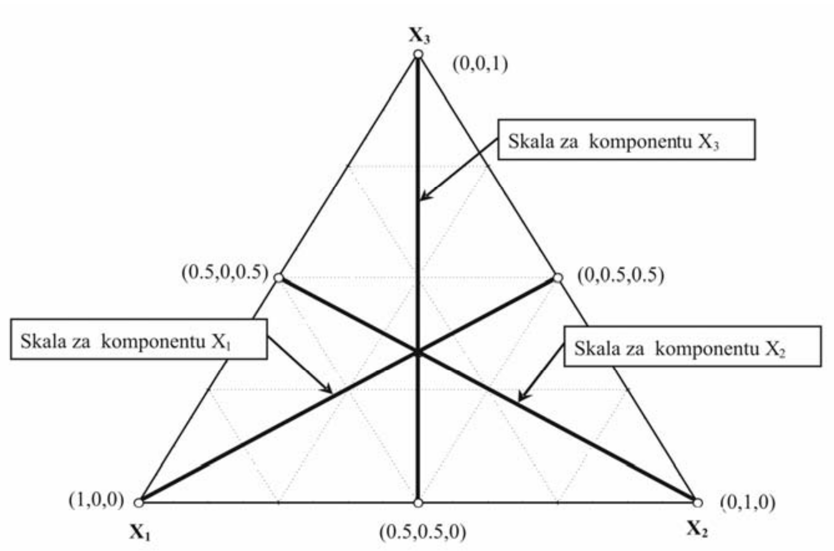


Slika 5. Prostorni raspored transformisanih eksperimentalnih tačaka

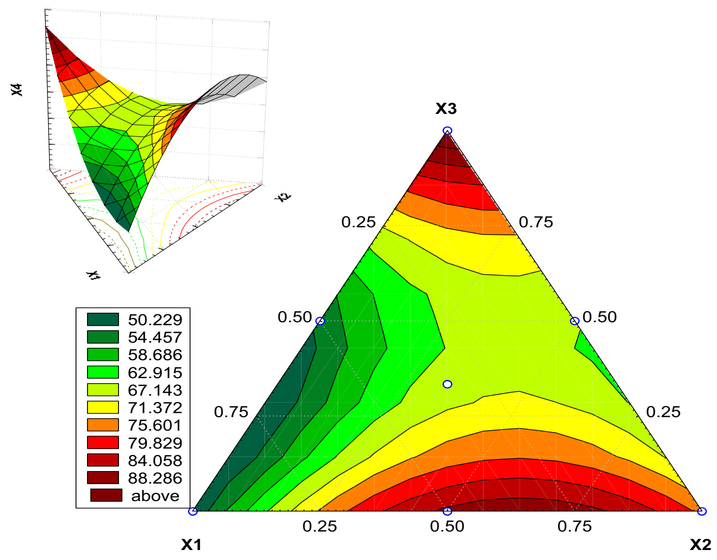
Kombinacija u kojoj postoji dejstvo samo jednog parametra npr. $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=1$ (eksperiment u kome parametar X_3 deluje 100% a nema dejstva ostalih parametara) se nalazi u preseku prostornog trougla i Z-ose. Posmatrano u ravni trougla $X_1X_2X_3$ uticaj ovog parametra opada idući duž visine trougla povučene iz tačke X_3, kao i duž stranica koje polaze iz ove tačke (slika 6.) tako da je vrednost parametra $X_3=0$ duž cele stranice X_1 X_2. Na sredini stranica X_1 X_3 i X_2 X_3 ova vrednost je $X_3=0.5$ (ili 50%).

Ukoliko se na trougao $X_1X_2X_3$ doda četvrta dimenzija tako da bude upravna na trougao, onda se mogu ucrtati vrednosti zavisno promenljive ili trodimenzionalna površina koja predstavlja pretpostavljenu funkciju zavisnosti zavisne promenljive.

Vrednost zavisne promenljive u ovakvom trodimenzionalnom prikazu je predstavljena rastojanjem tačaka pretpostavljene prostorne površine od površine trougla ili se može očitati na konturnom dijagramu (slika 7.) gde konture predstavljaju visinsko rastojanje prostorne funkcije od 2D trougla.



Slika 6. Prostorni trougao sa pripadajućim eksperimentalnim tačkama



Slika 7. Trougaoni 3D dijagram (Ternary graph) i konturni 2D dijagram

4. DEFINISANJE REGRESIONOG MODELA

Teorijski regresioni model za napred navedeni primer se može pretpostaviti u obliku višestruke kvazilinearne regresije:

$$\hat{Y} = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \\ + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 \tag{6}$$

4.1. Određivanje koeficijenata regresije

Nepoznate vrednosti koeficijenata višestruke regresije se određuju na osnovu metoda najmanjih kvadrata [3], [4], [5], [6], tj. iz uslova da zbir kvadrata grešaka:

$$S = S(b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \\ \sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3)_i \right]^2 \tag{7}$$

bude minimalan.

Funkcija $S = S(b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23})$ će imati minimum samo za one vrednosti promenljivih $b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}$ i b_{23} za koje su njeni parcijalni izvodi jednaki nuli:

$$\frac{\partial S(b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23})}{\partial b_1} = 0$$

$$\frac{\partial S(b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23})}{\partial b_2} = 0$$

$$\frac{\partial S(b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23})}{\partial b_3} = 0$$

$$\frac{\partial S(b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23})}{\partial b_{12}} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial S(b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23})}{\partial b_{13}} = 0$$

$$\frac{\partial S(b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23})}{\partial b_{23}} = 0$$

odakle se dobija sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3)_i \right] (-X_1)_i = 0 \\
&2\sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3)_i \right] (-X_2)_i = 0 \\
&2\sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3)_i \right] (-X_3)_i = 0 \\
&2\sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3)_i \right] (-X_1 X_2)_i = 0 \\
&2\sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3)_i \right] (-X_1 X_3)_i = 0 \\
&2\sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3)_i \right] (-X_2 X_3)_i = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Sistem jednačina (9) se može svesti na sistem od šest homogenih linearnih jednačina sa šest nepoznatih:

$$\begin{aligned}
&b_1 \sum_{i=1}^{N} X_1^2 + b_2 \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2 + b_3 \sum_{i=1}^{N} X_1 X_3 + b_{12} \sum_{i=1}^{N} X_1^2 X_2 + b_{13} \sum_{i=1}^{N} X_1^2 X_3 + b_{23} \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2 X_3 = \sum_{i=1}^{N} X_1 Y \\
&b_1 \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2 + b_2 \sum_{i=1}^{N} X_2^2 + b_3 \sum_{i=1}^{N} X_2 X_3 + b_{12} \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2^2 + b_{13} \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2 X_3 + b_{23} \sum_{i=1}^{N} X_2^2 X_3 = \sum_{i=1}^{N} X_2 Y \\
&b_1 \sum_{i=1}^{N} X_1 X_3 + b_2 \sum_{i=1}^{N} X_2 X_3 + b_3 \sum_{i=1}^{N} X_3^2 + b_{12} \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2 X_3 + b_{13} \sum_{i=1}^{N} X_1 X_3^2 + b_{23} \sum_{i=1}^{N} X_2 X_3^2 = \sum_{i=1}^{N} X_3 Y \\
&b_1 \sum_{i=1}^{N} X_1^2 X_2 + b_2 \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2^2 + b_3 \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2 X_3 + b_{12} \sum_{i=1}^{N} X_1^2 X_2^2 + b_{13} \sum_{i=1}^{N} X_1^2 X_2 X_3 + b_{23} \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2^2 X_3 = \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2 Y \\
&b_1 \sum_{i=1}^{N} X_1^2 X_3 + b_2 \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2 X_3 + b_3 \sum_{i=1}^{N} X_1 X_3^2 + b_{12} \sum_{i=1}^{N} X_1^2 X_2 X_3 + b_{13} \sum_{i=1}^{N} X_1^2 X_3^2 + b_{23} \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2 X_3^2 = \sum_{i=1}^{N} X_1 X_3 Y \\
&b_1 \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2 X_3 + b_2 \sum_{i=1}^{N} X_2^2 X_3 + b_3 \sum_{i=1}^{N} X_2 X_3^2 + b_{12} \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2^2 X_3 + b_{13} \sum_{i=1}^{N} X_1 X_2 X_3^2 + b_{23} \sum_{i=1}^{N} X_2^2 X_3^2 = \sum_{i=1}^{N} X_2 X_3 Y
\end{aligned} \tag{10}$$

U regresionoj analizi jednačine tipa (10) se nazivaju normalne jednačine. Rešenje sistema jednačina (10) je izvedeno pomoću matričnog računa. U matričnoj formi ovaj sistem jednačina ima oblik:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_1^2 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_1^2X_2 & \sum_{i=1}^{N} X_1^2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2X_3 \\ \sum_{i=1}^{N} X_1X_2 & \sum_{i=1}^{N} X_2^2 & \sum_{i=1}^{N} X_2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2^2 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_2^2X_3 \\ \sum_{i=1}^{N} X_1X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_3^2 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_3^2 & \sum_{i=1}^{N} X_2X_3^2 \\ \sum_{i=1}^{N} X_1^2X_2 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2^2 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_1^2X_2^2 & \sum_{i=1}^{N} X_1^2X_2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2^2X_3 \\ \sum_{i=1}^{N} X_1^2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_3^2 & \sum_{i=1}^{N} X_1^2X_2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_1^2X_3^2 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2X_3^2 \\ \sum_{i=1}^{N} X_1X_2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_2^2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_2X_3^2 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2^2X_3 & \sum_{i=1}^{N} X_1X_2X_3^2 & \sum_{i=1}^{N} X_2^2X_3^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_1Y \\ \sum_{i=1}^{N} X_2Y \\ \sum_{i=1}^{N} X_3Y \\ \sum_{i=1}^{N} X_1X_2Y \\ \sum_{i=1}^{N} X_1X_3Y \\ \sum_{i=1}^{N} X_2X_3Y \end{bmatrix} \quad (11)$$

Ili u skraćenom obliku:

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{Y} \quad (12)$$

Vrednosti koeficijenata regresije se izračunavaju iz relacije:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y} \quad (13)$$

Vrednosti nezavisnih promenljivih prilagođenih trougaonom koordinatnom sistemu i vrednosti zavisne promenljive koje su dobijene eksperimentom su prikazane u tabeli 5.

Tabela 5. Vrednosti promenljivih za proračun koeficijenata regresije

Eksperiment	*X1*	*X2*	*X3*	$Y = t_{proj}$
2	0	0	1	66
3	0	1	0	79
4	0	0.5	0.5	58
5	1	0	0	67
6	0.5	0	0.5	46
7	0.5	0.5	0	48
8	0.333	0.333	0.333	42

Na osnovu ovih podataka su dobijene vrednosti matrica X i Y:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1{,}611111111 & 0{,}361111111 & 0{,}361111111 & 0{,}162037037 & 0{,}162037037 & 0{,}037037 \\ 0{,}361111111 & 1{,}611111111 & 0{,}361111111 & 0{,}162037037 & 0{,}037037037 & 0{,}162037 \\ 0{,}361111111 & 0{,}361111111 & 1{,}611111111 & 0{,}037037037 & 0{,}162037037 & 0{,}162037 \\ 0{,}162037037 & 0{,}162037037 & 0{,}037037037 & 0{,}074845679 & 0{,}012345679 & 0{,}0123457 \\ 0{,}162037037 & 0{,}037037037 & 0{,}162037037 & 0{,}012345679 & 0{,}074845679 & 0{,}0123457 \\ 0{,}037037037 & 0{,}162037037 & 0{,}162037037 & 0{,}012345679 & 0{,}012345679 & 0{,}0748457 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 128 \\ 146 \\ 132 \\ 16{,}6667 \\ 16{,}1667 \\ 19{,}1667 \end{bmatrix}$$

Tabela 6. Vrednosti regresionih koeficijenata

b_1	67.1363636
b_2	79.1363636
b_3	66.1363636
b_{12}	-102.72727
b_{13}	-84.727273
b_{23}	-60.727273

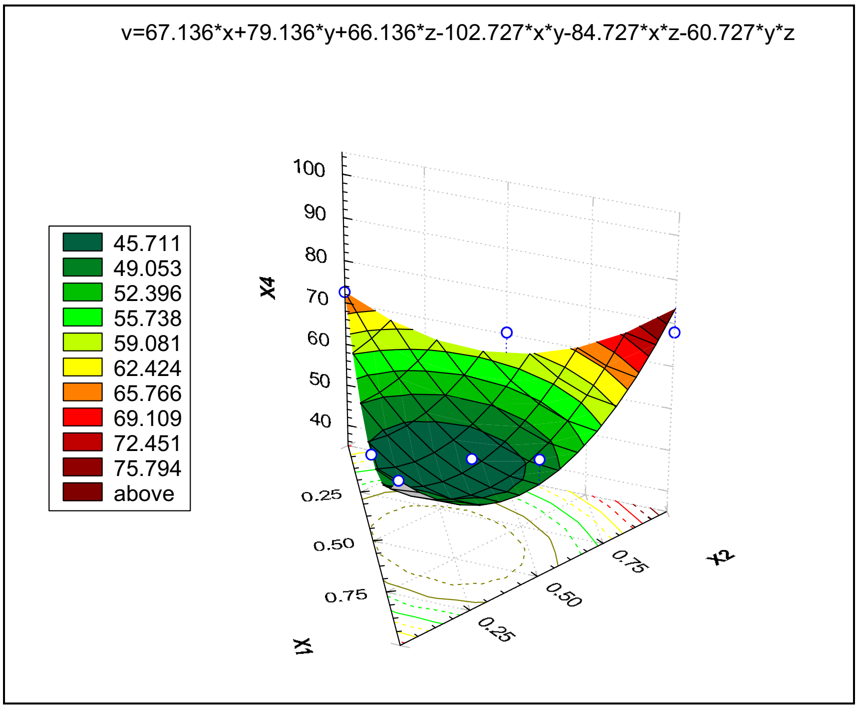
Sračunate vrednosti koeficijenata regresije matematička modela su prikazane u tabeli 6. tako da se matematički model pretpostavljen jednačinom (6) sada može napisati u obliku:

$$\boxed{Y = 67.136X_1 + 79.136X_2 + 66.136X_3 - 102.727X_1X_2 - 84.727X_1X_3 - 60.727X_2X_3} \quad (14)$$

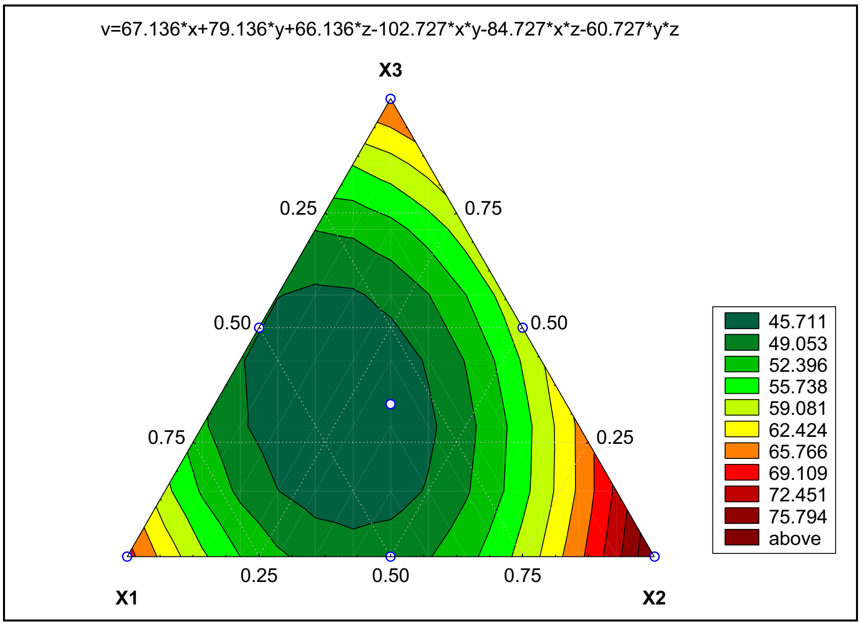
4.2. Grafička interpretacija matematičkog modela

Nakon provere adekvatnosti matematičkog modela, ocene signifikantnosti koeficijenata regresije i proračuna granica pouzdanosti koeficijenata regresije može se pristupiti grafičkoj interpretaciji matematičkog modela.

Matematički modeli promenljive Y od selektovanih parametara X_1 , X_2 i X_3 definisan jednačinom (14), je grafički prikazan prostornim trougaonim dijagramom i njemu pripadajućim konturnim 2D dijagramom na slikama 8 i 9.



Slika 8. Trougaoni 3D dijagram (Ternary graph)



Slika 9. Konturni 2D dijagram

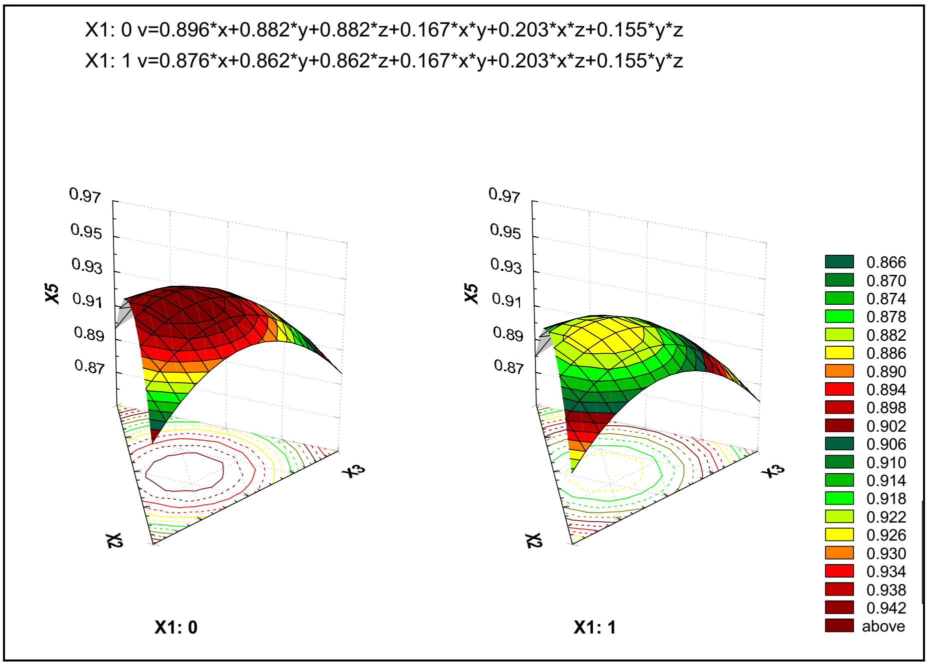
Za kvazilinearni model višestruke regresije dat jednačinom (6) su izračunati kvadrati odstupanja empirijskih tačaka od jednačine regresije i dobijena je vrednost zbira kvadrata odstupanja SK=2.4545 (tabela 7). Kako je apsolutna vrednost najvećeg odstupanja ε_{max}=1.227 manja od 3*E=1.662 to se na osnovu pravila *tri sigma* može smatrati da je pretpostavljena funkcionalna zavisnost dobra. Upoređenjem linearnog modela za kategorizovani dijagram i kvazilinearnog modela za ternary graph može se uočiti višestruka prednost drugog modela kako po informativnosti o posmatranoj zavisnosti koju nam pruža dijagram , tako i po tačnosti matematičkog modela.

Tabela 7. Proračun zbira kvadrata odstupanja za regresionu liniju

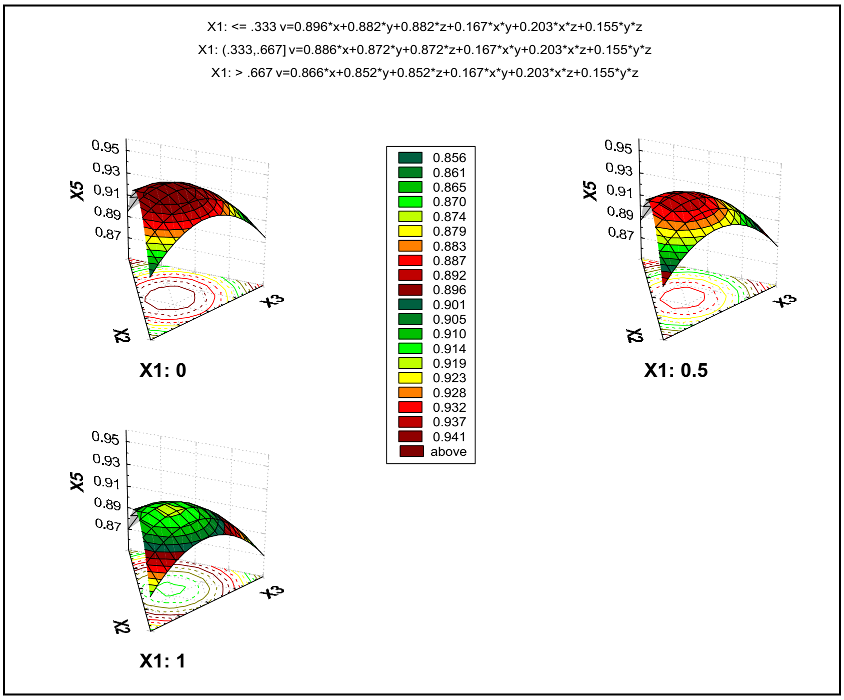
X1	*X2*	*X3*	Y_i	$\widehat{Y}_i$	ε	ε^2
0	0	1	66	66.1360	-0.13600	0.018496
0	1	0	79	79.1360	-0.13600	0.018496
0	1	1	58	57.4543	0.54575	0.297843
1	0	0	67	67.1360	-0.13600	0.018496
1	0	1	46	45.4543	0.54575	0.297843
1	1	0	48	47.4543	0.54575	0.297843
1	1	1	42	43.2270	-1.22700	1.505529
					Zbir kvadrata odstupanja	2.454546
					Srednje kvadratno odstupanje E =	0.553912
					3*E =	1.661735

5. KATEGORIZOVANI TERNARY GRAPH

Ternary graph može biti veoma koristan i u slučaju kada je potrebno prikazati funkcionalnu zavisnost zavisne promenljive od četiri komponente. U tom slučaju je potrebno primeniti kategorizovane dijagrame kao što je prikazano na slikama 10 i 11.



Slika 10. Kategorizovani Ternary graph - primer 1



Slika 11. Kategorizovani Ternary graph - primer 2

6. ZAKLJUČAK

Kada su u pitanju višedimenzionalni problemi, u regresionoj analizi je od velikog značaja da se pored dobijenih analitičkih zavisnosti ova korelaciona veza prikaže i vizuelno adekvatnim grafičkim prikazima (dijagramima). Prednost Ternary graph-a je u tome što se prostornom krivom površinom mogu prikazati četvorodimenzionalni a sa kategorizovanim Ternary graph-om i petodimenzionalni problemi.

LITERATURA

[1] Kolarević, M.: Brzi razvoj proizvoda, monografija, Zadužbima Andrejević, Beograd 2004.

[2] Statistica v6. Electronic Statistics Textbook (URL: http://www.statsoft.com/textbook/stathome.html)

[3] Stanić J.: Metod inženjerskih merenja, Mašinski falkutet, Beograd, 1988.

[4] Stojanović S.: Matematička statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1980.

[5] Vukadinović S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, šesto izdanje, Privredni pregled, Beograd, 1990.

[6] Marinković V., Radovanović M.: Priručnik za laboratorijske vežbe iz obrade materijala rezanjem, Mašinski fakultet, Niš, 1994.

TERNARY GRAPH AND ITS APPLICATION IN REGRESSION ANALYSIS

SUMMARY: *Ternary graph is used at regresion analisys for visualization of four dimensional problems. This papers shows Ternary graph description, data transformation procedure and procedure for determination of regresion line coefficients for assumed shape of multiple regresion.*

KEY WORD: *Ternary graph, regresion analisys, categorized diagrams*