

## Проблем три тела и стабилна решења

Жељко Цимбаљевић, Дамјан Цимбаљевић, Соња Ајдачић, Марко Милошевић, Ненад Стевановић, Владимир Марковић

*Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу*

**Апстракт.** У физици за средњошколце решавање проблема три тела се најчешће провлачи само као појам и наводи се као нерешив. Међутим и ако је аналитички заиста тренутно остао нерешив, развојем рачунара омогућено је да се проблем решава нумерички са задовољавајућим нивоом прецизности. Ово омогућава да се овакви системи детаљније истраже и да се опише њихово необично понашање. У раду биће дат један класичан пример проблема три тела као и нумеричка решења за одређене параметре. Биће показано да постоје конфигурације та три тела које дају стабилан систем, као и колико су ти системи осетљиви на промену. Ово може дати ученицима увид у необично функционисање комплексних система, нелинеарне динамике и хаоса. Такође, може дати и увид у модеран приступ решавању проблема у физици.

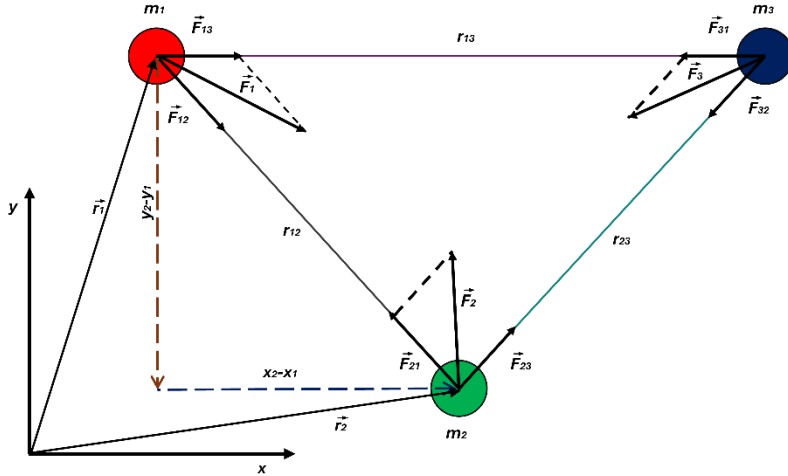
**Кључне речи:** стабилност, три тела, комплексни системи.

### УВОД

У физици често се срећу системи сачињени од три или више тела која међусобно сви интерагују, од хелијумовог атома са језгром наелектрисања  $2e$  и два електрона наелектрисања  $-e$  која „круже“ око језгра до соларног система са више планета, које све међусобно једна на другу интерагују незанемарљивом јачином [1,2]. Проблем више тела се најчешће своди или на интеракцију два тела, где се систем од више тела апроксимира на два тела и њихову међусобну интеракцију где се прате закони одржања, или на статистички модел. Овде се прате величине које колективно дефинишу систем, као у случају идеалног гасу, где имамо закон који дефинише однос макроскопских величина, као што су притисак, запремина и температура [2]. Класичан проблем три тела прати три објекта која могу да се крећу у свим правцима и међусобно интерагују неком силом (гравитационом или електромагнетном у класичној физици), тада свака промена положаја и брзине једног објекта утиче на друга два, а кретање друга два утиче на прво тело. Ово ствара комплексну узајамно-последичну везу. Овакав систем се не може никако свести на облик који је лако аналитички решив, те се сматра да је у општем случају нерешив. Како аналитичко решење не постоји, нумеричко решење је једини начин за теоријску анализу таквих система. Пошто су гравитационе интеракције једноставније за моделирање од електромагнетних, биће анализирана три тела, која ће међусобно да интерагују гравитационом силом, а која се налазе у вакууму.

## АНАЛИЗА СИСТЕМА

Узимамо систем сачињен од три тела, чије су масе  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ . Као додатно олакшање узеће се да се тела крећу по заједничкој  $xu$  равни ( $z=0$ ). У том случају проблем се може графички представити као на слици 1.



Слика 1. Шема интеракције три тела путем гравитације.

На свако тело делују две силе које потичу од гравитационог привлачења друга два тела. Укупна сила која делује на прво тело се може описати другим Њутновим законом као [4]:

$$\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \quad (1)$$

Сличног облика су и силе које делују на друга два тела. Знајући Њутнов закон гравитационе интеракције, могуће је изразити гравитациону силу која делује између два тела (у овом случају првог и другог) [5]:

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (2)$$

Тада се може добити укупна сила која делује на једно тело у неком тренутку

$$m_1 \vec{a}_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} + \gamma \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \vec{r}_{13} \quad (3)$$

Одавде скраћивањем  $m_1$  са обе стране једначине се добија убрзање посматраног тела

$$\vec{a}_1 = \gamma \frac{m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} + \gamma \frac{m_3}{r_{13}^3} \vec{r}_{13} \quad (4)$$

Како је систем стационаран у две димензије, сви вектори ће се делити на  $x$  и  $y$  компоненте. У том случају  $x$  и  $y$  компоненте убрзања првог тела ће гласити [6]

## Проблем три тела и стабилна решења

$$a_{1x} = \gamma \frac{m_2}{r_{12}^3} (x_2 - x_1) + \gamma \frac{m_3}{r_{13}^3} (x_3 - x_1) \quad (5)$$

$$a_{1y} = \gamma \frac{m_2}{r_{12}^3} (y_2 - y_1) + \gamma \frac{m_3}{r_{13}^3} (y_3 - y_1) \quad (6)$$

Знајући компоненте убрзања, могуће је одредити  $x$  и  $y$  компоненте брзина за то исто тело

$$v_{1x} = v_{01x} + a_{1x} * \Delta t \quad (7)$$

$$v_{1y} = v_{01y} + a_{1y} * \Delta t \quad (8)$$

Где је  $v_{01x}$   $x$  компонента почетне брзине првог тела, а  $v_{01y}$  је  $y$  компонента почетне брзине првог тела. Знајући сада и брзине могуће је израчунати и положај првог тела

$$x_1 = x_{01} + v_{1x} * \Delta t \quad (9)$$

$$y_1 = y_{01} + v_{1y} * \Delta t \quad (10)$$

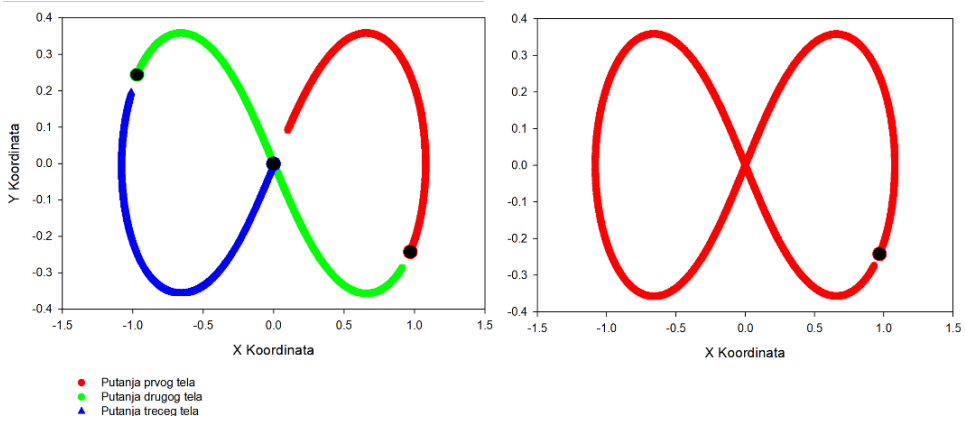
Истоветан поступак се понавља и за друга два тела, да би се добили убрзања, брзине и положаји (координате) сва три тела. На овај начин се могу одредити промене брзине и координата од тренутка до тренутка времена, У првом кораку рачунања узимају се почетне вредности и рачунају се убрзања брзине и координате. У следећем  $+\Delta t$  тренутку за рачунање нових брзина и координата као „почетне“ вредности узимају се брзине и координате од претходног корака рачунања. И тако редом, корак по корак времена  $\Delta t$  до неког времена  $T$  које се узима за време трајања симулације, а који је целобројни множилац  $\Delta t$ . Вредност  $\Delta t$  треба да се узме довољно мала да прецизност резултата буде задовољавајућа, али опет не превише мала јер ће у супротном прорачун бити презахтеван за процесорску моћ рачунара.

## РЕЗУЛТАТИ СИМУЛАЦИЈА

У сврхе испитивања описаних система, сачињен је код који управо ове једначине решава нумерички и даје као резултат координате, тј. положај сваког тела и брзине сваког тела понаособ у сваком тренутку од 0 до  $T$  у интервалима  $\Delta t$ . У раду ће бити приказане две стабилне конфигурације, као и једна конфигурација која се од стабилних конфигурација разликује за само пар процената у једном параметру и која ипак даје нестабилна решења. Конфигурације се разликују у почетним условима положаја и брзина као и у масама тела, али су остали параметри симулације исти. За формирање прве стабилне конфигурације, коришћени су следећи почетни услови за три тела:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \text{ kg}; x_{01} = 0,97000436 \text{ m}; y_{01} = -0,24308753 \text{ m}; \\ v_{01x} &= 0,466203685 \text{ m/s}; v_{01y} = 0,432365730 \text{ m/s} \\ m_2 &= 1 \text{ kg}; x_{02} = 0 \text{ m}; y_{02} = 0 \text{ m}; \\ v_{02x} &= -0,93240737 \text{ m/s}; v_{02y} = -0,86473146 \text{ m/s} \\ m_3 &= 1 \text{ kg}; x_{03} = -0,97000436 \text{ m}; y_{03} = 0,24308753 \text{ m}; \\ v_{03x} &= 0,466203685 \text{ m/s}; v_{03y} = 0,432365730 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (11)$$

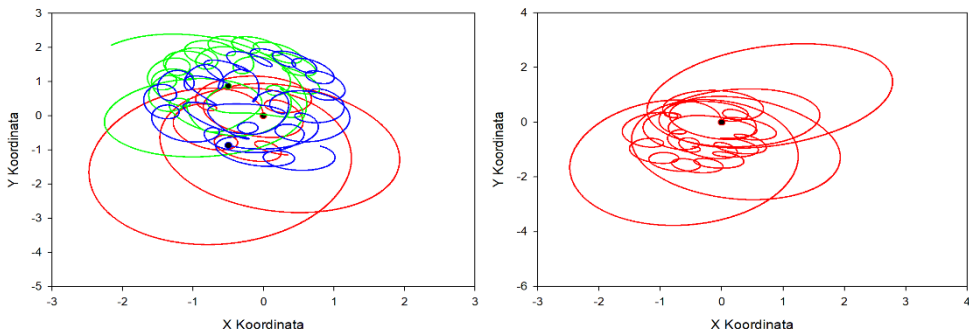
Жељко Цимбаљевић, Дамјан Цимбаљевић, Соња Ајдацић, Марко Милошевић, Ненад Стевановић, Владимир Марковић



Слика 2. Стабилна конфигурација три тела у облику бесконачности. На левом графику су представљене путање сва три тела заједно, а на десном је представљена издвојена путања само једног тела у једној осцилацији.

На слици 2 се јасно види да тела образују знак бесконачности својом путањом која је стабилна. У овој и у другим симулацијама узето је да је  $T=10$  s, а  $\Delta t=0,01$  s. За формирање друге стабилне конфигурације, коришћени су следећи почетни услови за три тела:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 1 \text{ kg}; x_{01} = 0 \text{ m}; y_{01} = 0 \text{ m}; \\
 v_{01x} &= 0 \text{ m/s}; v_{01y} = 1 \text{ m/s} \\
 m_2 &= 1 \text{ kg}; x_{02} = -0,5 \text{ m}; y_{02} = 0,86602540378 \text{ m}; \\
 v_{02x} &= -0,86602540378 \text{ m/s}; v_{02y} = -0,5 \text{ m/s} \\
 m_3 &= 1 \text{ kg}; x_{03} = -0,5 \text{ m}; y_{03} = -0,86602540378 \text{ m}; \\
 v_{03x} &= 0,86602540378 \text{ m/s}; v_{03y} = -0,5 \text{ m/s}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

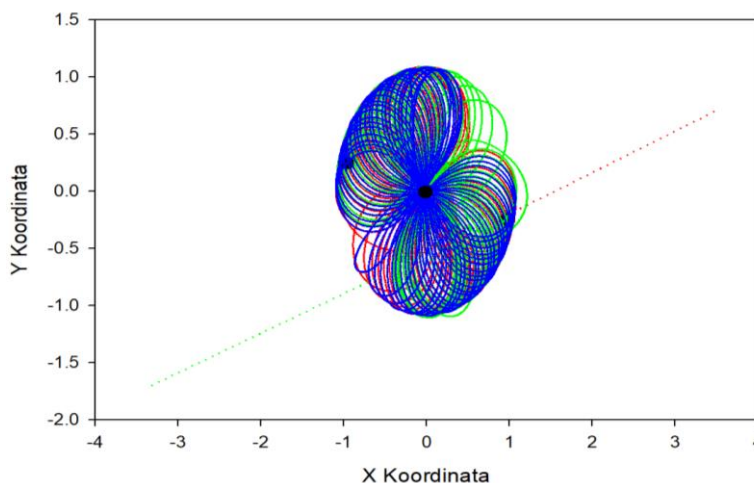


Слика 3. Друга стабилна конфигурација. Лево је слика све три путање заједно а десно путања само једне.

Овде је мање видно да ли систем остаје стабилан, јер су осцилације компликованије. У нашем случају после неког дужег времена систем је постао

нестабилан. Како би ово требало да буде стабилна конфигурација, могуће је да систем не одржава стабилност услед недовољне прецизности кода.

На крају је програм пуштен за сет услова који дају нестабилна решења. Ови услови се разликују од услова прве конфигурације (11) само у почетној у координати првог тела која износи сада  $y_{01} = -0,25308753$  m, што је мање од 4% разлика у односу на тај параметар у стабилној конфигурацији. Нови систем је нестабилан, и после кратког времена једно или два тела одлећу из система, као што се може видети на слици 4. Нестабилност система настаје већ при променама и мањим од 1%, али је потребно више времена да би се такав систем „распао“.



Слика 4. Нестабилна конфигурација.

## ЗАКЉУЧАК

Ученици је се ретко срећу са конкретним начинима за решавање модерних проблема у физици и једначина. У овом раду они могу да сазнају како се један комплексан, а опет не превише компликован систем анализира и решава на модеран начин, применом савремене технологије. Од како су рачунари постали доминантни у свету и нашим животима, нумеричке методе су постале незаменљив део теоријске анализе различитих проблема у физици. Такође, може се лако увидети колико су комплексни системи, као што је модел три тела, осетљиви на мале промене почетних услова. Ово на жалост није изолован случај и у реалном свету такви системи нас окружују са свих страна, као што су рад хелија и биолошких система, затим лавине и земљотреси, па функционисање екосистема, промене климатских услова, кретање ваздушних струја, планетарни и звездани системи итд. Овај увид у стварност може дати ученицима инспирацију да даље сами истражују природу и њене комплексне законе и више да цене све релативно просте формуле и моделе у физици коју редовно уче.

Жељко Цимбаљевић, Дамјан Цимбаљевић, Соња Ајдацић, Марко  
Милошевић, Ненад Стевановић, Владимир Марковић

## ЛИТЕРАТУРА

1. Musielak Z, Quarles B, 2014, The three-body problem, Reports on Progress in Physics, 065901, 77(6), 10.1088/0034-4885/77/6/065901
2. Stewart A. L, 1963, The properties of the helium atom and the two-electron systems, Advances in Physics, Vol 12, Issue 47, Pg 299-353, <https://doi.org/10.1080/00018736300101303>
3. Fan J, Meng J, Ludescher J, Chen X, Ashkenazy Y, Kurths J, Havlin S, Schellnhuber J. H, 2021, Statistical physics approaches to the complex Earth system, Physics Reports, Vol 896, Pg 1-84, <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.09.005>.
4. Morse R. A, 2013, Teaching About Newton's Second Law, American Association of Physics Teachers (2013).
5. Anosova, Z. P, & Zavalov, N. N, 1989, States of strong gravitational interaction in the general three-body problem. Soviet Astronomy, Vol. 33, NO. 1 P. 79
6. Wardell E. Z, 2002, Gravitational radiation damping and the three-body problem, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 334, Issue 1, Pages 149–155, <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05498.x>