



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јелена Р. Ђорђевић

**КАРАКТЕРИСТИЧНЕ ВРСТЕ РЕПЕРА
КРИВИХ У ГЕОМЕТРИЈИ ПРОСТОРА
МИНКОВСКОГ**

докторска дисертација

Крагујевац, 2025



UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF SCIENCE

Jelena R. Djordjević

**CHARACTERISTIC KINDS OF FRAMES
OF CURVES IN GEOMETRY OF MINKOWSKI
SPACES**

Doctoral Dissertation

Kragujevac, 2025

Идентификациона страница докторске дисертације

Аутор	
Име и презиме: Јелена Ђорђевић	
Датум и место рођења: 24.06.1992, Крагујевац	
Садашње запослење: асистент на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу	
Докторска дисертација	
Наслов: Карактеристичне врсте репера кривих у геометрији простора Минковског	
Број страница: 111	
Број слика: 16	
Број библиографских података: 88	
Установа и место где је рад израђен: Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац	
Научна област (УДК): Математика (УДК 514.7)	
Ментор: проф. др Емилија Нешовић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу	
Број и датум одлуке Већа универзитета о прихватању теме докторске дисертације: IV-01-641/9, 18.09.2024.	

Захвалница

Овај рад је резултат вишегодишњег труда, али и подршке изузетних особа којима дугујем дубоку захвалност.

Највећу захвалност дугујем свом ментору проф. др Емилији Нешовић на великој посвећености, подршци и неисцрпним саветима који су ме пратили кроз сваки корак мог истраживања у области геометрије простора Минковског.

Захваљујем се и члановима комисије на времену, пажњи и корисним сугестијама, које су допринеле коначном обликовању ове дисертације. Такође, желим да се захвалим проф. др Мирослави Петровић-Торгашев и доц. др Милици Грбовић Ћирић, на њиховој несебичној помоћи и подршци.

Неизмерно сам захвална својој породици, чија је љубав, стрпљење и подршка омогућила да истрајем кроз све изазове. Хвала и мојим пријатељима, који су ме кроз охрабрење и присуство пратили током овог дугог процеса.

Сажетак

У овој докторској дисертацији дефинисани су и истражени карактеристични репери дуж кривих у просторима Минковског. Уведен је Бишов репер (репер са својством минималне ротације) псеудо нул криве и парцијално нул криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$. Изведене су једначине Бишовог репера и добијена је одговарајућа релација између Френеовог и Бишовог репера. Помоћу геометријске алгебре простор-времена, одређени су Дарбуови бивектори Френеовог и Бишовог репера псеудо нул криве. Доказано је да се Френеов репер парцијално нул криве може добити ротацијом Бишовог репера који одговара једном партикуларном решењу нелинеарне диференцијалне једначине трећег реда, чија партикуларна решења одређују Бишове кривине криве. Добијена је параметризација светлосне хиперповрши и светлосне фокалне површи дуж парцијално нул криве у терминима Бишовог репера.

Уведени су уопштени Дарбуови репери прве и друге врсте просторне и псеудо нул криве на светлосној површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, као и уопштени Дарбуови репери прве и друге врсте нул Картанове криве на временској површи. Дате су карактеризације нул Картанових нормалних изофотних, нормалних силуетних, ректификационих изофотних и ректификационих силуетних кривих које леже на временској површи. Под претпоставком да је дата параметарска једначина временске површи, једначина осе и геодезијска кривина нул Картанове нормалне изофотне или нормалне силуетне криве, добијени су нумерички примери таквих кривих.

Кључне речи: простор Минковског, псеудо нул крива, парцијално нул крива, нул Картанова крива, Бишов репер, уопштени Дарбуов репер, нормалне изофотне криве, нормалне силуетне криве, ректификационе изофотне криве, ректификационе силуетне криве

Abstract

In this doctoral dissertation, characteristic frames of curves in Minkowski spaces are defined and investigated. The Bishop frame (the frame with rotation minimizing property) of a pseudo null curve and a partially null curve in Minkowski spacetime $\mathbb{E}_1^4$ is introduced. The Bishop frame's equations are derived and the corresponding relation between the Frenet and the Bishop frame is obtained. By using spacetime geometric algebra, Darboux bivectors of Frenet and Bishop frames for pseudo null curves are determined. It is proved that the Frenet frame of a partially null curve can be obtained by rotating the Bishop frame that corresponds to a particular solution of a third-order nonlinear differential equation, whose particular solutions determine Bishop curvatures of the curve. The parametrizations of lightlike hypersurfaces and lightlike focal surfaces along partially null curves in terms of the Bishop frame are obtained.

Generalized Darboux frames of the first and the second kind for spacelike and pseudo null curves lying on lightlike surface in $\mathbb{E}_1^3$, as well as generalized Darboux frames of the first and second kind of null Cartan curves lying on timelike surface, are introduced. Characterizations of null Cartan normal isophotic, normal silhouette, rectifying isophotic and rectifying silhouette curves lying on a timelike surface are provided. Under the assumption that parametric equation of the timelike surface, an axis and geodesic curvature of a null Cartan normal isophotic or normal silhouette curve is given, numerical examples of such curves are obtained.

Keywords: Minkowski space, pseudo null curve, partially null curve, null Cartan curve, Bishop frame, generalized Darboux frame, normal isophotic curve, normal silhouette curve, rectifying isophotic curve, rectifying silhouette curve

Садржај

1	Увод	1
2	Основни појмови	5
2.1	Семи-еуклидски простор $\mathbb{E}_\nu^n$	5
2.2	Интерпретација Лоренцове геометрије у специјалној теорији релативности	8
2.3	Изометрије семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$	11
2.4	Векторски производ вектора	11
2.5	Френеов и Картанов репер криве у простору $\mathbb{E}_1^3$	13
2.6	Френеов и Картанов репер криве у простор-времену $\mathbb{E}_1^4$	15
2.7	Бишов репер криве у просторима $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{E}_1^3$ и $\mathbb{E}_1^4$	17
2.8	Дарбуов репер криве у просторима $\mathbb{E}^3$ и $\mathbb{E}_1^3$	22
3	Бишов репер криве у простор-времену $\mathbb{E}_1^4$	25
3.1	Бишов репер псеудо нул криве у простор-времену $\mathbb{E}_1^4$	25
3.2	Дарбуов бивектор Френеовог и Бишововог репера псеудо нул криве	33
3.3	Бишов репер парцијално нул криве у $\mathbb{E}_1^4$	36
3.4	Светлосна хиперповрш и светлосна фокална површ	44
4	Уопштени Дарбуов репер криве у простору $\mathbb{E}_1^3$	48
4.1	Уопштени Дарбуов репер просторне криве	48
4.2	Уопштени Дарбуов репер псеудо нул криве	60
4.3	Уопштени Дарбуов репер нул Картанове криве	73
5	Криве одређене уопштеним Дарбуовим репером	82
5.1	Нул Картанове нормалне изофотне криве	83
5.2	Нул Картанове нормалне силуетне криве	88
5.3	Нумеричко израчунавање нул Картанових нормалних изофотних и нормалних силуетних кривих	91
5.4	Нул Картанове ректификационе изофотне криве	97
5.5	Нул Картанове ректификационе силуетне криве	102
	Литература	106
	Прилог	112
	Биографија аутора	113

1 Увод

Познато је да су репери са својством минималне ротације од фундаменталног значаја у многим областима науке и технике. Њихове примене се могу срести у рачунарској графици, роботизи, при моделовању површи које су генерисане кретањем профилне криве и при планирању путање алата у рачунарски подржаном дизајну. Користе се у истраживањима у квантној механици, биоматематици при проучавању структуре ДНК молекула и динамици флуида.

Да би се одредиле карактеристике кретања крутог тела у простору, неопходно је одредити његов положај и оријентацију. У општем случају, они су независне величине ([24]). Међутим, у великом броју случајева, природно је посматрати кретања која укључују њихову међусобну повезаност. Код таквих кретања, репери са својством минималне ротације су од посебног значаја. Најпознатији пример таквог репера је Френеов репер $\{T, N, B\}$ регуларне криве у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$, чија векторска поља T и B имају својство минималне ротације, јер не ротирају око векторског поља N у ректификационим равнима криве.

Код Бишоповог репера $\{T, N_1, N_2\}$ криве у простору $\mathbb{E}^3$, својство минималне ротације имају векторска поља N_1 и N_2 која не ротирају око тангентног векторског поља T ([2]). Овај репер има своју интерпретацију у теорији еластичности ([56]). Када се права униформно еластична шипка деформише, енергија деформације има компоненту савијања и увијања. Компонента савијања зависи од кривине шипке, а компонента увијања је једнака нули једино ако се дуж криве посматра њен Бишопов репер.

Оскулаторни репер $\{F, G, B\}$ садржи векторска поља F и G која имају својство минималне ротације, тј. не ротирају око векторског поља бинормала B у оскулаторним равнима када се тачка креће дуж криве ([23]). У аеродинамици се помоћу ове врсте репера описује кретање авиона који лети без ротације око z -осе.

Усмерени репер са својством минималне ротације $\{O, P, Q\}$ се користи при дефинисању кретања камере која снима непокретни објекат ([25]). Он садржи јединични вектор положаја O дате тачке и јединичне векторе P и Q који не ротирају око вектора O у равни слике, при чему важи једнакост $\langle O, D \rangle = 0$, где је D Дарбуов вектор усмереног репера. Ови репери имају примене при снимању у ендоскопији и хирургији, где се мини камера постављена на савитљиву цев убацује кроз мали отвор и усмерава дуж закривљене путање, како би снимила узорак ткива.

Бишопов репер регуларне криве у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$ је дефинисан 1975. године у раду [2]. У 3-димензионом простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$, поменути репер за временске и просторне криве са не-нул главном нормалом, уведен је у аналогно еу-

кљидском случају у референци [69]. С друге стране, Бишов репер псеудо нул и нул Картанових кривих у простору $\mathbb{E}_1^3$ дефинисан је у раду [29]. У просторима димензије веће од 3, особине Бишовог репера могу се наћи у референцама [22], [27] и [36]. Нове врсте Бишових репера проучаване су у радовима [28] и [48].

У овој докторској дисертацији дефинисани су Бишови репери псеудо нул кривих и парцијално нул кривих у простор-времену Минковског, као и уопштени Дарбуови репери просторних, псеудо нул и нул Картанових кривих које леже на одговарајућој површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$. Помоћу уопштених Дарбуових репера, уведене су нове врсте изофотних и силуетних кривих - нул Картанове нормалне изофотне и нормалне силуетне криве, као и нул Картанове ректификационе изофотне и ректификационе силуетне криве. Такође су добијене релације између поменутих кривих и нул Картанових уопштених хелиса, релативно нормалних-искошених хелиса и изофотних кривих.

После Увода, у другом поглављу дисертације дате су дефиниције основних појмова и теореме од значаја за представљање добијених резултата из области семи-Риманове геометрије. Наведена је дефиниција семи-еуклидског простора и псеудо-ортонормиране базе и уведен је појам каузалног карактера вектора, равни и потпростора. Интерпретиран је део Лоренцове геометрије у специјалној теорији релативности. Дате су дефиниције изометрија и векторског производа вектора у семи-еуклидском простору. У односу на каузални карактер криве, дате су дефиниције и једначине њеног Френеовог и Картановог репера у 3-димензионом и 4-димензионом простору Минковског. Уведен је појам репера са својством минималне ротације - Бишовог репера дуж криве у просторима $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{E}_1^3$ и $\mathbb{E}_1^4$ и наведене су теореме које дају релацију између тих репера и Френеовог или Картановог репера. С обзиром на каузални карактер криве и површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$, дата је дефиниција одговарајућег Дарбуовог репера, релације између кривина криве у односу на њен Френеов и Дарбуов репер и једначине одговарајућег Дарбуовог репера.

У трећем, четвртном и петом поглављу су приказани оригинални резултати дисертације.

Треће поглавље је посвећено Бишовом реперу псеудо нул криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$. Најпре су дефинисани Бишов репер и Бишове кривине псеудо нул криве, а затим је доказана теорема која даје релацију између Бишовог и Френеовог репера. Изведене су формуле за Бишове кривине и добијена је нелинерана диференцијална једначина трећег реда чија партикуларна решења одређују поменуте кривине. Помоћу геометријске алгебре простор-времена, добијени су изрази за Дарбуове бивекторе Френеовог и Бишовог репера и дата је геометријска интерпретација Френеових и Бишових кривина у терминима површина пројекција Дарбуових бивектора на равни разапете одговарајућим векторским пољима Френеовог или Бишовог репера. Затим је дефинисан Бишов репер парцијално нул криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ која лежи у светлосној хиперравни. Доказано је да таква крива има три Бишова репера који су одређени партикуларним решењима одговарајуће диференцијалне једначине трећег реда. Такође је доказано да се Френеов репер парцијално нул криве може добити ротацијом Бишовог репера који одговара једном партикуларном решењу поменуте диференцијалне једначине око временске равни за одговарајући хиперболички угао. У наставку је добијена параметризација светлосне преносне хиперповрши са парцијално нул базном кривом

и светлосне фокалне површи у терминима Бишоповог репера добијеног ротацијом Френеовог репера. Доказано је да фокална површ дуж парцијално нул хелисе нема критичних тачака.

У четвртом поглављу су уведени нови репери кривих које леже на временској или светлосној површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$, који представљају уопштење Дарбуових репера. Како се ти репери поклапају са Дарбуовим репером у посебном случају, називају се уопштени Дарбуов репер прве врсте и уопштени Дарбуов репер друге врсте. Ови репери су уведени скалирањем нул векторског поља које припада Френеовом или Дарбуовом реперу криве. Изведене су једначине поменутих репера и уведене су нове кривине криве - уопштена геодезијска кривина, уопштена нормална кривина и уопштена геодезијска торзија. Дата је релација између геодезијске и уопштене геодезијске кривине, нормалне и уопштене нормалне кривине и геодезијске и уопштене геодезијске торзије одговарајуће криве. Добијене су нове карактеризације нул Картанових геодезијских линија и линија кривине на временској површи у терминима њихове уопштене геодезијске кривине и уопштене геодезијске торзије.

Асимптотске и геодезијске криве и линије кривине (са не-нул главном нормалом), које леже на светлосној површи су описане у терминима уопштене геодезијске кривине, уопштене нормалне кривине и уопштене геодезијске торзије. Доказано је да уопштени Дарбуови репери постоје и дуж просторне праве линије на површи која није светлосна, а која садржи одговарајући скуп светлосних тачака. Дефинисане су светлосне преносне површи, на којима су тангентна и бинормална индикатриса нул Картанове криве просторне линије кривине са уопштеном геодезијском торзијом једнаком нули. Доказано је да псеудо нул крива на светлосној површи има геодезијску или нормалну кривину једнаку нули у свакој тачки. Добијене су параметарске једначине Дарбуових вектора Френеовог, Дарбуовог и уопштеног Дарбуовог репера и одређени су потребни и довољни услови при којима су поменути Дарбуови вектори колинеарни. Доказано је да ту особину на светлосној површи, имају једино псеудо нул кружнице.

Пето поглавље је посвећено новим врстама нул Картанових кривих које се називају нормалне изофотне, нормалне силуетне, ректификационе изофотне и ректификационе силуетне криве. Дефинисане су помоћу векторског поља $\tilde{\eta}$ које лежи у нормалној или ректификационој равни криве, припада њеном уопштеном Дарбуовом реперу прве врсте и задовољава услов $\langle \tilde{\eta}, W \rangle = \text{constant}$, где је W фиксна оса криве. Доказано је да су поменуте криве са константном геодезијском кривином $k_g \neq 0$ и константном геодезијском торзијом $\tau_g \neq 0$ нул Картанове хелисе или нул Картанове кубне криве. Одређене су параметарске једначине њихових оса и доказано је да су нул Картанове кубне криве на временској површи нормалне изофотне криве са просторном осом и нормалне силуетне криве са светлосном осом. Тако је добијена релација између МПХ кривих (Питагорејских ходографских кривих) и нул Картанових нормалних изофотних и нормалних силуетних кривих. Дати су нумерички примери нул Картанових нормалних изофотних и нормалних силуетних кривих добијени интеграљењем система диференцијалних једначина првог реда при почетним условима. Доказано је да оса нул Картанове ректификационе изофотне криве са константним кривинама $k_g \neq 0$ и $\tau_g \neq 0$ има правац Дарбуовог вектора Дарбуовог репера. Такође је доказано да су нул Картанове ректификационе изофотне криве са константним кривинама $k_g \neq 0$ и $\tau_g \neq 0$ уопштене хелисе, релативно нормалне-искошене хелисе и

изофотне криве у односу на исту осу. Као пример таквих кривих, наведене су нул Картанове кубне криве на временској површи.

После петог поглавља, дат је списак свих референци које су споменуте у дисертацији и прилог са листом слика и табела. На крају докторске дисертације, дата је краћа биографија аутора са листом публикованих радова.

2 Основни појмови

У другом поглављу ћемо навести дефиниције основних појмова и значајније теореме из геометрије семи-еуклидског простора, које ће нам бити потребне при излагању добијених резултата дисертације. Дефинисаћемо семи-еуклидски простор и псеудо-ортонормирану базу недегенеративног потпростора и увести каузални карактер вектора, равни и потпростора. Интерпретираћемо део Лоренцове геометрије у специјалној теорији релативности. Затим ћемо увести изометрије и векторски производ вектора у семи-еуклидском простору. У односу на каузални карактер криве даћемо једначине Френеовог и Картановог репера у 3-димензионом и 4-димензионом простору Минковског. Такође ћемо навести дефиниције репера са својством минималне ротације (Бишоповог репера) дуж криве у просторима $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{E}_1^3$ и $\mathbb{E}_1^4$ и теореме које дају релацију између поменутих репера и Френеовог или Картановог репера. У зависности од каузалног карактера површи и криве на њој, описаћемо Дарбуов репер криве и његове једначине.

2.1 Семи-еуклидски простор $\mathbb{E}_\nu^n$

Семи-еуклидски (псеудо-еуклидски) простор $\mathbb{E}_\nu^n$ је реалан векторски простор $\mathbb{R}^n$ снабдевен индефинитним скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ константног индекса ν . *Индекс $0 \leq \nu \leq n$* скаларног производа $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ је једнак димензији потпростора векторског простора $\mathbb{E}_\nu^n$ на коме је рестрикција скаларног производа негативно дефинитна.

Скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu : \mathbb{E}_\nu^n \times \mathbb{E}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}$ на семи-еуклидском простору $\mathbb{E}_\nu^n$, $n \geq 2$ је недегенеративна симетрична билинеарна форма дата релацијом

$$(2.1.1) \quad \langle x, y \rangle_\nu = x_1 y_1 + \dots + x_{n-\nu} y_{n-\nu} - x_{n-\nu+1} y_{n-\nu+1} - \dots - x_n y_n,$$

где су $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ произвољни вектори простора $\mathbb{E}_\nu^n$. Ако је индекс скаларног производа $\nu = 0$, семи-еуклидски простор се назива *еуклидски простор* и означава са $\mathbb{E}^n$. Ако је индекс скаларног производа $\nu = 1$, семи-еуклидски простор се назива *простор Минковског* или *Лоренцов простор* и означава са $\mathbb{E}_1^n$, односно $\mathbb{L}^n$.

Произвољан вектор у семи-еуклидском простору $\mathbb{E}_\nu^n$ може имати један од три *каузална карактера*, који се уводе следећом дефиницијом.

Дефиниција 2.1.1. Произвољан вектор v у семи-еуклидском простору $\mathbb{E}_\nu^n$ може бити:

- (а) *просторни*, ако је $\langle v, v \rangle_\nu > 0$, или $v = 0$;
- (б) *временски*, ако је $\langle v, v \rangle_\nu < 0$;
- (в) *светлосни (нул)*, ако је $\langle v, v \rangle_\nu = 0$ и $v \neq 0$.

Скуп свих светлосних вектора у простору $\mathbb{E}_\nu^n$, $n \geq 3$ образује *светлосни конус*. У равни Минковског $\mathbb{E}_1^2$, светлосни вектори припадају симетралама углова између просторне и временске координатне осе које су међусобно ортогоналне. Сваком вектору може се придружити семи-еуклидска норма на следећи начин.

Дефиниција 2.1.2. Семи-еуклидска норма вектора v семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$ је дата формулом

$$\|v\|_\nu = \sqrt{|\langle v, v \rangle_\nu|}.$$

Кажемо да је v *јединични вектор*, ако је $\|v\|_\nu = 1$. Семи-еуклидска норма задовољава релацију

$$\|\lambda v\|_\nu = |\lambda| \|v\|_\nu,$$

за свако $v \in \mathbb{E}_\nu^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 2.1.3. Вектори u и v простора $\mathbb{E}_\nu^n$ су *псеудо-ортогонални*, ако је

$$\langle u, v \rangle_\nu = 0.$$

Псеудо-ортогоналност вектора u и v у семи-еуклидском простору $\mathbb{E}_\nu^n$ означавамо са $u \perp_\nu v$.

Дефиниција 2.1.4. Произвољна база $\mathcal{B}$ простора $\mathbb{E}_\nu^n$ је *псеудо-ортонормирана*, ако је $\|v\|_\nu = 1$ за свако $v \in \mathcal{B}$ и $\langle u, v \rangle_\nu = 0$ за свака два вектора $u, v \in \mathcal{B}$.

Дефиниција 2.1.5. Нека је S потпростор семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$. Тада се потпростор

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{E}_\nu^n | \langle u, v \rangle_\nu = 0, \forall u \in S\}$$

назива *псеудо-ортогонални комплемент* потпростора S .

Следећом дефиницијом се уводи *каузални карактер потпростора* у простору Минковског.

Дефиниција 2.1.6. Потпростор U простора Минковског $\mathbb{E}_1^n$ је:

- (а) *просторни*, ако је скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle|_U$ позитивно-дефинитан;
- (б) *временски*, ако је скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle|_U$ индефинитан;
- (в) *светлосни (нул)*, ако је скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle|_U$ дегенеративан.

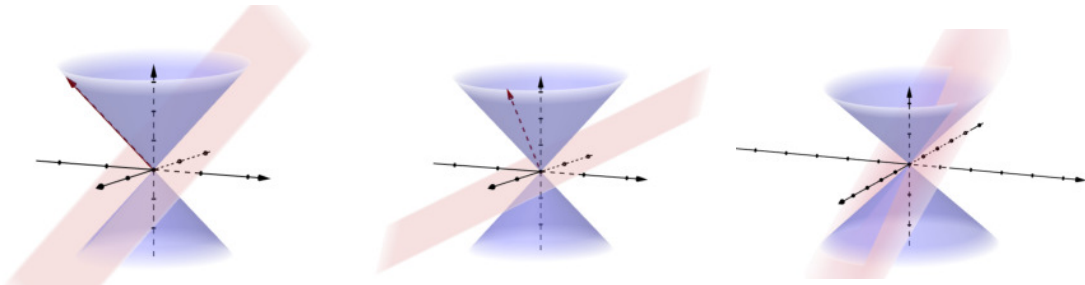
Дефиниција 2.1.7. Нека је $U \subseteq \mathbb{E}_\nu^n$ m -димензиони потпростор семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$ и $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m)$ база тог потпростора. *Грамова матрица* скаларног производа $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu|_U$ у односу на базу $\mathcal{B}$ је матрица облика

$$(2.1.2) \quad G_{U, \mathcal{B}} = (\langle u_i, u_j \rangle_\nu)_{1 \leq i, j \leq m} = \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \langle u_1, u_m \rangle_\nu \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_m, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \langle u_m, u_m \rangle_\nu \end{bmatrix}.$$

Теорема 2.1.1. Нека је Π произвољна раван у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ са једначином $ax + by + cz = 0$, $c \neq 0$ и G_Π Грамова матрица дата релацијом (2.1.2). Тада је:

- (а) $\det G_\Pi > 0$ ако и само ако је Π просторна раван;
- (б) $\det G_\Pi < 0$ ако и само ако је Π временска раван;
- (в) $\det G_\Pi = 0$ ако и само ако је Π светлосна раван.

На слици 2.1 приказане су светлосна, просторна и временска раван у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$, при чему је светлосна раван тангентна на светлосни конус, просторна раван пролази кроз његово теме и не садржи његове изводнице, а временска раван садржи две изводнице светлосног конуса.



Слика 2.1: Светлосна, просторна и временска раван у $\mathbb{E}_1^3$

Ако је потпростор недегенеративан (просторни или временски), семи-еуклидски простор се може представити као директна сума потпростора и његовог псеудо-ортогоналног комплемента. Наиме, важи следеће тврђење.

Теорема 2.1.2. Нека је $U \subseteq \mathbb{E}_\nu^n$ потпростор семи-еуклидског простора. Тада је:

- (а) $U \oplus U^\perp = \mathbb{E}_\nu^n$ ако и само ако је U недегенеративан потпростор;
- (б) U недегенеративан потпростор ако и само ако је $U^\perp$ недегенеративан потпростор.

Сваки недегенеративни потпростор семи-еуклидског простора има особине наведене у наредној теорему.

Теорема 2.1.3. Нека је U недегенеративан потпростор семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$. Тада је:

- (i) $\dim U + \dim U^\perp = n$;
- (ii) $U = (U^\perp)^\perp$.

Помоћу каузалног карактера псеудо-ортогоналног комплемента $U^\perp$ недегенеративног потпростора U , можемо одредити каузални карактер потпростора.

Последица 2.1.1. Нека је U потпростор семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_1^3$. Тада је:

- (а) $U \subseteq \mathbb{E}_1^3$ просторни (временски) потпростор ако и само ако је $U^\perp$ временски (просторни) потпростор;
- (б) $U \subseteq \mathbb{E}_1^3$ светлосни потпростор ако и само ако је $U^\perp$ светлосни потпростор.

Следећа теорема говори о постојању псеудо-ортонормиране базе недегенеративног потпростора.

Теорема 2.1.4. Сваки недегенеративни потпростор U семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$ има псеудо-ортонормирану базу.

Теорема 2.1.5. (Грам-Шмитов поступак ортогонализације базе)

Ако су $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E}_\nu^n$ линеарно независни вектори такви да је за свако $i \in \{1, \dots, k\}$ потпростор $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ недегенеративан, тада постоји псеудо-ортогонална база $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k \in \mathbb{E}_\nu^n$ тако да је

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k\}.$$

За светлосне векторе имамо следећу интересантну особину.

Теорема 2.1.6. Светлосни вектори у простору $\mathbb{E}_\nu^n$ су псеудо-ортогонални ако и само ако су колинеарни.

Ако је потпростор просторни или временски, пресек тог потпростора и његовог псеудо-ортогоналног комплемента је празан скуп. Нула вектор је по дефиницији просторни вектор и он не може бити у поменутом пресеку, јер би истовремено био временски и просторни вектор. Ако је потпростор светлосни, важи следећа особина.

Теорема 2.1.7. Ако је $U \subseteq \mathbb{E}_\nu^n$ светлосни потпростор, тада је $\dim(U \cap U^\perp) = 1$.

Према теорему 2.1.4, сваки недегенеративни потпростор има псеудо-ортонормирану базу. Ако је потпростор дегенеративан, његова база је псеудо-ортогонална, али не и нормирана, јер садржи светлосни вектор. У следећој теорему дато је разлагање вектора у односу на псеудо-ортонормирану базу.

Теорема 2.1.8. (Псеудо-ортонормирани развој вектора)

Нека је $\{u_1, \dots, u_n\}$ псеудо-ортонормирана база семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$. Тада сваки вектор $v \in \mathbb{E}_\nu^n$ има псеудо-ортонормирани развој облика

$$v = \sum_{i=1}^n \epsilon_{u_i} \langle v, u_i \rangle_\nu u_i,$$

при чему је $\epsilon_{u_i} = \text{sgn}\langle u_i, u_i \rangle = \pm 1$.

2.2 Интерпретација Лоренцове геометрије у специјалној теорији релативности

Лоренцова геометрија има своју интерпретацију у Ајнштајновој специјалној теорији релативности, у којој је амбијентни простор Лоренцов простор $\mathbb{L}^4$. У том простору тачке се називају *догађајима*, при чему сваки догађај има три просторне и једну

временску координату. У односу на изабрани инерцијални систем са канонском базом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, претпоставимо да догађај p има координате $p = (x, y, z, t)$, тако да је

$$\langle p, p \rangle_L = x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

У теоријској физици, претходни израз је облика

$$\langle p, p \rangle_L = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2,$$

где је c брзина светлости у вакууму. У математичким теоријама се обично претпоставља да је $c = 1$. Нека су $p, q \in \mathbb{L}^4$ произвољни дати догађаји. Ако је

$$v = q - p = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$$

вектор од догађаја p до догађаја q и $\Delta t \neq 0$, тада нам каузални карактер вектора v помаже да разумемо однос између тих догађаја. Приметимо да је

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle_L &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2 \\ (2.2.1) \quad &= (\Delta t)^2 \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t} \right)^2 - 1 \right) \\ &= (\Delta t)^2 (\|\tilde{v}\|_E^2 - 1) \\ &= (\Delta t)^2 (\|\tilde{v}\|_E + 1)(\|\tilde{v}\|_E - 1), \end{aligned}$$

где је $\tilde{v} = (\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}) \in \mathbb{R}^3$ *просторни вектор брзине* између догађаја p и q . На основу релације (2.2.1) следи да изрази $\langle v, v \rangle_L$ и $\|\tilde{v}\|_E - 1$ имају исти знак, одакле можемо закључити следеће:

(а) ако је v временски вектор, тада је $\Delta t \neq 0$ и $\|\tilde{v}\|_E < 1$. Када је $\Delta t > 0$, следи да догађај p може утицати на догађај q , а $\Delta t < 0$ означава да је догађај p можда био под утицајем догађаја q ;

(б) ако је v светлосни вектор, тада је $\|\tilde{v}\|_E = 1$, па се дејство догађаја p на догађај q остварује кроз простирање електромагнетног таласа, као што је светлосни сигнал који емитује догађај p према догађају q ;

(в) ако је v просторни вектор, при чему је $\Delta t \neq 0$, не постоји дејство између догађаја p и q . Тада је $\|\tilde{v}\|_E > 1$, што значи да је брзина потребна за кретање кроз простор од једног догађаја до другог већа од брзине светлости. То практично значи да чак ни фотон или неутрино нису довољно брзи да присуствују реализацији оба догађаја.

Следећом дефиницијом уводимо две важне класе временских и светлосних вектора.

Дефиниција 2.2.1. Временски или светлосни вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$ у Лоренцовом простору $\mathbb{L}^n$ је *усмерен ка будућности (прошлости)*, ако је $v_n > 0$ ($v_n < 0$).

На основу дефиниције 2.2.1 непосредно следи да је временски или светлосни вектор усмерен ка будућности, ако је $\langle v, e_n \rangle_L < 0$. Скуп свих светлосних и временских вектора у датој тачки која одговара догађају p , образује одговарајући *конус* у Лоренцовом простору $\mathbb{L}^n$.

Дефиниција 2.2.2. *Светлосни конус* са теменом у тачки p Лоренцовог простора $\mathbb{L}^n$ је хиперквадрика дефинисана са

$$C_L(p) = \{q \in \mathbb{L}^n \mid q - p \text{ је светлосни вектор}\}.$$

Дефиниција 2.2.3. *Временски конус* са теменом у тачки p Лоренцовог простора $\mathbb{L}^n$ је хиперквадрика дефинисана са

$$C_T(p) = \{q \in \mathbb{L}^n \mid q - p \text{ је временски вектор}\}.$$

Сваки од конуса $C_L(p)$ и $C_T(p)$ се може раставити на две дисјунктне компоненте које се називају *светлосни конус будућности*, *светлосни конус прошлости*, *временски конус будућности* и *временски конус прошлости*. Поменути компоненте се редом означавају са $C_L^+(p)$, $C_L^-(p)$, $C_T^+(p)$, $C_T^-(p)$. На пример, светлосни конус будућности је скуп

$$C_L^+(p) = \{q \in \mathbb{L}^n \mid q - p \text{ је светлосни вектор усмерен ка будућности}\}.$$

За векторе који припадају временском конусу будућности у датој тачки p , имамо следећу особину.

Теорема 2.2.1. Ако $p \in \mathbb{L}^n$ тада је $\langle u - p, v - p \rangle_L < 0$ за свако $u, v \in C_T^+(p)$.

Познато је да Коши-Шварцова неједнакост

$$|\langle u, v \rangle_E| \leq \|u\|_E \|v\|_E,$$

која важи у еуклидској равни, важи и у просторној равни, тј. у равни са еуклидском метриком. Међутим, у временској равни за временске векторе важи обрнута Коши-Шварцова неједнакост.

Теорема 2.2.2. (Обрнута Коши-Шварцова неједнакост)

Ако су u и v временски вектори у Лоренцовој равни $\mathbb{L}^2$, тада је

$$|\langle u, v \rangle_L| \geq \|u\|_L \|v\|_L,$$

при чему једнакост важи ако и само ако су вектори u и v колинеарни.

Следећом теоремом се уводи *хиперболички угао* између два временска вектора.

Теорема 2.2.3. (Хиперболички угао)

Ако су временски вектори u и v у Лоренцовој равни $\mathbb{L}^2$ оба усмерена ка будућности или прошлости, тада постоји јединствен реалан број $\varphi \in [0, +\infty)$ такав да је

$$\langle u, v \rangle_L = -\|u\|_L \|v\|_L \cosh \varphi.$$

Реалан број φ који задовољава претходну једнакост, назива се *хиперболички угао* између временских вектора u и v . Применом обрнуте Коши-Шварцове неједнакости, може се доказати да у временској равни важи *обрнута неједнакост троугла*.

Теорема 2.2.4. (Обрнута неједнакост троугла)

Ако су u и v временски вектори у Лоренцовој равни $\mathbb{L}^2$ оба усмерена ка будућности или прошлости, тада је

$$\|u + v\|_L \geq \|u\|_L + \|v\|_L.$$

2.3 Изометрије семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$

Изометрије еуклидског простора су бијективне трансформације које чувају еуклидско растојање између тачака. Изометрије у семи-еуклидском простору су уведене аналогно.

Дефиниција 2.3.1. *Изометрија $F : \mathbb{E}_\nu^n \rightarrow \mathbb{E}_\nu^n$ семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$ је бијективна трансформација која задовољава услов*

$$\langle F(x) - F(y), F(x) - F(y) \rangle_\nu = \langle x - y, x - y \rangle_\nu,$$

за свако $x, y \in \mathbb{E}_\nu^n$.

Ако је $\nu = 1$, изометрија семи-еуклидског простора се назива *Поенкареова трансформација*. Познато је да ортогоналне трансформације у еуклидском простору чувају скаларни производ вектора. Семи-ортогоналне трансформације семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$ имају аналогну особину.

Дефиниција 2.3.2. *Линеарно пресликавање $\Lambda : \mathbb{E}_\nu^n \rightarrow \mathbb{E}_\nu^n$ се назива *семи-ортогонална трансформација*, ако је*

$$\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle_\nu = \langle x, y \rangle_\nu,$$

за свако $x, y \in \mathbb{E}_\nu^n$.

Ако је $\nu = 1$, семи-ортогонална трансформација се назива *Лоренцова трансформација*. Примери Лоренцових трансформација су *хиперболичке ротације* око просторне, временске или светлосне осе. Познато је да скуп свих семи-ортогоналних трансформација $O_\nu(n, \mathbb{R})$ представља групу у односу на композицију тих трансформација, као и да те трансформације чувају псеудо-ортонормирану базу.

2.4 Векторски производ вектора

Дефиниција 2.4.1. *Векторски производ вектора $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{E}_\nu^n$ у односу на скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ је јединствени вектор $v = v_1 \times \dots \times v_{n-1} \in \mathbb{E}_\nu^n$ који задовољава једнакост*

$$\langle v, x \rangle_\nu = \det(x, v_1, \dots, v_{n-1}),$$

за свако $x \in \mathbb{E}_\nu^n$.

Напоменимо да је вектор v псеудо-ортогоналан на векторима $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, при чему он може бити просторни, временски, или нул. За практично израчунавање векторског производа често се користи формула дата у следећој теорему.

Теорема 2.4.1. *Нека је $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ позитивно оријентисана псеудо-ортонормирана база простора $\mathbb{E}_\nu^n$ и $v_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} u_i$, $1 \leq j \leq n-1$, вектори тог простора.*

Векторски производ вектора $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ се израчунава по формули

$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \begin{vmatrix} \epsilon_1 u_1 & \cdots & \epsilon_n u_n \\ v_{11} & \cdots & v_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n-1} & \cdots & v_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

где је $\epsilon_i = \text{sgn}\langle u_i, u_i \rangle_\nu = \pm 1$.

На пример, ако су $u = (u_1, u_2, u_3)$ и $v = (v_1, v_2, v_3)$ просторни, временски, или нул вектори Лоренцовог простора $\mathbb{L}^3$ са сигнатуром $(+, +, -)$, тада је

$$u \times_L v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, -(u_1 v_3 - v_1 u_3), -(u_1 v_2 - v_1 u_2)),$$

где је e_3 временски вектор тог простора. Ако је један од вектора u или v нул вектор, тада је векторски производ $u \times_L v$ колинеаран са тим вектором. Наводимо нека општа својстава векторског производа вектора.

Теорема 2.4.2. Нека су $v_1, \dots, v_{n-1}$ вектори семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тада важе следећа тврђења:

- (а) векторски производ $v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1}$ мења знак, ако два вектора замене места;
- (б) $v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1} = 0$ ако и само ако су вектори $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ линеарно зависни;
- (в) $\langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_i \rangle_\nu = 0$, за свако $1 \leq i \leq n-1$;
- (г) $\langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_n \rangle_\nu = \langle v_1, v_2 \times v_3 \times \dots \times v_n \rangle_\nu$.

Помоћу векторског производа вектора може се одредити каузални карактер хиперравни.

Теорема 2.4.3. Нека су $v_1, \dots, v_{n-1}$ линеарно независни вектори семи-еуклидског простора $\mathbb{E}_\nu^n$ и $S = \text{span}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ хиперраван тог простора. Тада је:

- (а) $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ просторни вектор ако и само ако је S временска хиперраван;
- (б) $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ временски вектор ако и само ако је S просторна хиперраван;
- (в) $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ светлосни вектор ако и само ако је S светлосна хиперраван.

При израчунавању векторског производа два вектора у Лоренцовом простору $\mathbb{L}^3$, често се користи *Лагранжов идентитет*, наведен у следећој теорему.

Теорема 2.4.4. Ако су u и v вектори Лоренцовог простора $\mathbb{L}^3$, тада је

$$\langle u \times_L v, u \times_L v \rangle_L = -\langle u, u \rangle_L \langle v, v \rangle_L + \langle u, v \rangle_L^2.$$

2.5 Френеов и Картанов репер криве у простору $\mathbb{E}_1^3$

У простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ у зависности од каузалног карактера тангентног векторског поља и векторског поља главних нормала и бинормала, постоји одговарајући покретни репер криве. Дуж просторне и временске криве које нису праве линије, постоји *Френеов репер*, а дуж нул (светлосне) криве која није права линија, постоји *Картанов репер* ([81]). Поменути репери су дефинисани тако да се њихова оријентација поклапа са оријентацијом амбијентног простора. То практично значи да је знак бинормале изабран тако да је Френеов или Картанов репер позитивно оријентисан репер чија оријентација одређује оријентацију амбијентног простора. Помоћу векторских поља која чине покретне репере и њихових извода, дефинисане су *прва* и *друга кривина*, односно *кривина* и *торзија* криве.

Дефиниција 2.5.1. Крива α у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ је глатко пресликавање $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, при чему је I отворени интервал реалне праве.

Вектор брзине криве α је вектор $\alpha'(t)$ тангентан на криву у тачки $\alpha(t)$. Крива α је *регуларна*, ако је $\alpha'(t) \neq 0$ за свако $t \in I$. *Каузални карактер криве* одређен је каузалним карактером њеног тангентног вектора.

Дефиниција 2.5.2. Крива α у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ локално може бити:

- (а) *просторна*, ако су сви њени вектори брзине просторни;
- (б) *временска*, ако су сви њени вектори брзине временски;
- (в) *нул (светлосна)*, ако су сви њени вектори брзине нул вектори.

Дефиниција 2.5.3. Ако је $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ регуларна крива, тада функцију

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

називамо *функцијом дужине лука криве α* .

Ако је крива α просторна или временска, тада је $s'(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0$, па у том случају криву можемо параметризовати функцијом дужине лука. Ако је α нул (светлосна) крива, норма њеног вектора брзине је једнака нули, па стандардна параметризација криве дужином лука није могућа. Зато такве криве параметризујемо *функцијом псеудо-дужине лука*, која је дата формулом ([3])

$$s(t) = \int_0^t \langle \alpha''(u), \alpha''(u) \rangle^{\frac{1}{4}} du.$$

Да бисмо описали Френеов и Картанов репер дуж криве и њихове једначине, размотрићемо три случаја (А), (Б) и (В) у зависности од каузалног карактера криве.

(А) α је просторна крива;

Претпоставимо да је $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$. Тада је $T(s) = \alpha'(s)$ просторни јединични тангентни вектор криве у тачки $\alpha(s)$. Ако је $\alpha''(s) \neq 0$, разликујемо следећа три подслучаја:

$$(A.1) \quad \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle > 0;$$

Вектор главне нормале $N(s)$ је нормирани вектор $\alpha''(s)$. Вектор бинормале $B(s)$ је јединствени јединични временски вектор ортогоналан на просторну раван $span\{T, N\}$ у свакој тачки $\alpha(s)$. Једначине Френеовог репера су облика

$$(2.5.1) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

где су κ_1 и κ_2 кривина и торзија криве.

$$(A.2) \quad \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle < 0;$$

Аналогно претходном подслучају, вектор главне нормале $N(s)$ је нормирани временски вектор $\alpha''(s)$, док је вектор бинормале $B(s)$ јединствени јединични просторни вектор ортогоналан на временску раван $span\{T, N\}$ у свакој тачки $\alpha(s)$ криве. Једначине Френеовог репера гласе

$$(2.5.2) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

где су k_1 и k_2 кривина и торзија криве.

$$(A.3) \quad \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 0;$$

У овом подслучају, α се назива *псеудо нул крива*. Њен вектор главне нормале $N(s) = \alpha''(s)$ је нул вектор. Вектор бинормале $B(s)$ је нул вектор ортогоналан на $T(s)$, при чему задовољава услов $\langle N(s), B(s) \rangle = 1$. Тада једначине Френеовог репера гласе

$$(2.5.3) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & \epsilon \kappa_2 & 0 \\ -\epsilon \kappa_1 & 0 & -\epsilon \kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

при чему је $\epsilon = \langle N, B \rangle = \pm 1$, прва кривина $\kappa_1(s) = 1$ за свако s , а друга кривина $\kappa_2(s)$ је произвољна диференцијабилна функција.

(Б) α је временска крива;

Претпоставимо да је $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -1$. Тада је $T(s) = \alpha'(s)$ јединични временски тангентни вектор. Вектор главне нормале $N(s)$ добијамо нормирањем просторног вектора $\alpha''(s)$. Вектор бинормале $B(s)$ је јединствени јединични просторни вектор ортогоналан на временску раван $span\{T, N\}$ у свакој тачки $\alpha(s)$. У овом случају, једначине Френеовог репера гласе

$$(2.5.4) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

при чему су κ_1 и κ_2 кривина и торзија криве.

(B) α је нул Картанова крива;

Претпоставимо да је $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 1$. Тада је $T(s) = \alpha'(s)$ нул тангентни вектор и $N(s) = \alpha''(s)$ јединични вектор главне нормале. Вектор бинормале $B(s)$ је нул вектор ортогоналан на $N(s)$, који задовољава услов $\langle T(s), B(s) \rangle = \epsilon_0 = \pm 1$. Једначине Картановог репера $\{T, N, B\}$ гласе

$$(2.5.5) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \epsilon_0 \kappa_2 & 0 & -\epsilon_0 \kappa_1 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

где је прва кривина $\kappa_1(s) = 1$ за свако s и друга кривина $\kappa_2(s)$ произвољна диференцијабилна функција.

2.6 Френеов и Картанов репер криве у простор-времену $\mathbb{E}_1^4$

Френеов и Картанов репер криве у простор-времену $\mathbb{E}_1^4$ су дефинисани тако да се њихова оријентација поклапа са оријентацијом тог простора ([81]). То практично значи да је знак друге бинормале изабран тако да је Френеов или Картанов репер позитивно оријентисан репер чија оријентација одређује оријентацију амбијентног простора. У зависности од каузалног карактера криве, разликоваћемо три случаја (A), (B) и (B).

(A) α је просторна крива;

Ако је $\alpha'(s) \neq 0$ и $\alpha''(s) \neq 0$, имамо следеће подслучајеве:

(A.1) $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle > 0$;

Претпоставимо да је $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$. Тада је $T(s) = \alpha'(s)$ јединични тангентни вектор. Вектор главне нормале $N(s)$ се добија нормирањем вектора $\alpha''(s)$. Како је $N(s)$ јединични вектор, имамо да је $\langle N(s), N'(s) \rangle = 0$, па је

$$N'(s) = a(s)T(s) + K^\perp,$$

где је $a(s)$ произвољна диференцијабилна функција и $K^\perp$ нормална компонента вектора $N'(s)$. У зависности од каузалног карактера нормалне компоненте $K^\perp$, разликујемо наредне подслучајеве.

(A.1.1) $\langle K^\perp, K^\perp \rangle > 0$;

Вектор прве бинормале $B_1(s)$ се добија нормирањем нормалне компоненте $K^\perp$. Како су вектори $T(s)$, $N(s)$ и $B_1(s)$ просторни, вектор друге бинормале $B_2(s)$ је јединични временски вектор ортогоналан на тродимензиони потпростор $\text{span}\{T, N, B_1\}$. Једначине Френеовог репера $\{T, N, B_1, B_2\}$ су облика

$$(2.6.1) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ и $\kappa_3(s)$ прва, друга и трећа кривина криве.

$$(A.1.2) \quad \langle K^\perp, K^\perp \rangle < 0;$$

Аналогно, вектор прве бинормале $B_1(s)$ се добија нормирањем нормалне компоненте $K^\perp$. Вектор друге бинормале $B_2(s)$ је јединични просторни вектор ортогоналан на тродимензионални потпростор $span\{T, N, B_1\}$. Једначине Френеовог репера гласе

$$(2.6.2) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ и $\kappa_3(s)$ кривине криве.

$$(A.1.3) \quad \langle K^\perp, K^\perp \rangle = 0;$$

У овом подслучају, α лежи у светлосној хиперравни простор-времена $\mathbb{E}_1^4$ и назива се *парцијално нул крива*. Вектор прве бинормале $B_1(s)$ је колинеаран са вектором $K^\perp$. Вектор друге бинормале $B_2(s)$ је јединствени нул вектор ортогоналан на светлосну раван $span\{T, N\}$, тако да је $\langle B_1(s), B_2(s) \rangle = 1$. Сада једначине Френеовог репера гласе

$$(2.6.3) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \kappa_3 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & -\kappa_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

при чему су кривине $\kappa_1(s)$ и $\kappa_2(s)$ произвољне функције, а трећа кривина $\kappa_3(s) = 0$ за свако s .

$$(A.2) \quad \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle < 0;$$

Вектор главне нормале $N(s)$ се добија нормирањем вектора $\alpha''(s)$. Јединични вектор прве бинормале $B_1(s)$ је просторни вектор колинеаран са нормалном компонентом $K^\perp$. Вектор друге бинормале $B_2(s)$ је јединствени јединични просторни вектор ортогоналан на временски потпростор $span\{T, N, B_1\}$. Једначине Френеовог репера гласе

$$(2.6.4) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ и $\kappa_3(s)$ кривине криве.

$$(A.3) \quad \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 0;$$

У овом подслучају, када је вектор главне нормале $N(s) = \alpha''(s)$ нул вектор, α се назива *псеудо нул крива*. Нормирањем вектора $N'(s)$ добија се вектор прве бинормале $B_1(s)$. Вектор друге бинормале $B_2(s)$ је јединствени нул вектор ортогоналан на просторну раван $span\{T, B_1\}$ који задовољава услов $\langle N, B_2 \rangle = 1$. На тај начин,

једначине Френеовог репера су облика

$$(2.6.5) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_3 & 0 & -\kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где је прва кривина $\kappa_1(s) = 1$ за свако s , а друга и трећа кривина $\kappa_2(s)$ и $\kappa_3(s)$ су произвољне функције.

(Б) α је временска крива;

Претпоставимо да је $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -1$. Тада је $T(s) = \alpha'(s)$ временски јединични тангентни вектор. Вектор главне нормале $N(s)$ је просторни вектор добијен нормирањем вектора $\alpha''(s)$. Вектор прве бинормале $B_1(s)$ је колинеаран са нормалном компонентом вектора $K^\perp$. Вектор друге бинормале $B_2(s)$ је јединични просторни вектор ортогоналан на временски потпростор $\text{span}\{T, N, B_1\}$. Једначине Френеовог репера у овом случају гласе

$$(2.6.6) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ и $\kappa_3(s)$ кривине криве.

(В) α је нул Картанова крива;

Тада је вектор главне нормале $N(s) = \alpha''(s)$. Вектор прве бинормале $B_1(s)$ је колинеаран са нормалном компонентом $K^\perp$ вектора $N'(s)$ и задовољава услове

$$\langle B_1(s), B_1(s) \rangle = 0, \quad \langle T(s), B_1(s) \rangle = 1.$$

Вектор друге бинормале $B_2(s)$ је јединични просторни вектор ортогоналан на временски потпростор $\text{span}\{T, N, B_1\}$. Једначине Картановог репера гласе

$$(2.6.7) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ -\kappa_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

при чему је прва кривина $\kappa_1(s) = 1$ за свако s , а кривине $\kappa_2(s)$ и $\kappa_3(s)$ су произвољне функције.

2.7 Бишов репер криве у просторима $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{E}_1^3$ и $\mathbb{E}_1^4$

Покретни ортонормирани репер који је добро дефинисан и у тачкама криве у којима је њена прва кривина једнака нули, дефинисао је Л.Р. Бишоп 1975. године у раду [2]. Поменути репер чини тангентно векторско поље T и два нормална векторска

поља N_1 и N_2 добијена ротацијом векторских поља N и B Френеовог репера око тангентног векторског поља T , за одговарајући угао ротације. Угао ротације θ је изабран тако да су изводи векторских поља N_1 и N_2 по природном параметру s колинеарни са T у свакој тачки криве.

С обзиром да векторска поља N'_1 и N'_2 не ротирају у равнима $\text{span}\{T, N_2\}$ и $\text{span}\{T, N_1\}$ редом, јер су колинеарна са векторским пољем T , *Бишовов репер* се такође назива и *репер са својством минималне ротације*, а векторска поља N_1 и N_2 *релативно паралелна векторска поља*. Бишовов репер није јединствен, што тврди следећа теорема.

Теорема 2.7.1. ([2]) Ако је $\{T, N_1, N_2\}$ Бишовов репер регуларне криве у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$, тада је сваки репер облика $\{T, aN_1 + bN_2, cN_1 + dN_2\}$, где је $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ортогонална матрица са константним коефицијентима, такође Бишовов репер те криве.

Једначине Бишововог репера дуж криве у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$ гласе ([2])

$$\begin{bmatrix} T' \\ N'_1 \\ N'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

где су

$$\kappa_1(s) = \kappa(s) \cos \theta(s), \quad \kappa_2(s) = \kappa(s) \sin \theta(s),$$

прва и *друга Бишопова кривина* криве редом и $\theta(s) = \int \tau(s) ds$ угао ротације којом се од Френеовог репера добија Бишовов репер. Матрица поменуте ротације гласи

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta(s) & -\sin \theta(s) \\ 0 & \sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Аналогно, Бишовов репер $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ у еуклидском простору $\mathbb{E}^4$ садржи тангентно векторско поље T и три нормална векторска поља N_1 , N_2 и N_3 добијена ротацијом векторских поља N , B_1 и B_2 Френеовог репера за одговарајуће углове $\varphi(s)$, $\theta(s)$ и $\psi(s)$. Углови ротације су тако изабрани да су изводи векторских поља N_1 , N_2 и N_3 по природном параметру s у свакој тачки криве колинеарни са T . Стога су једначине Бишововог репера у простору $\mathbb{E}^4$ облика ([27])

$$\begin{bmatrix} T' \\ N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\kappa}_1 & \bar{\kappa}_2 & \bar{\kappa}_3 \\ -\bar{\kappa}_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\kappa}_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\kappa}_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix},$$

где су

$$\bar{\kappa}_1(s) = \kappa_1(s) \cos \theta(s) \cos \psi(s),$$

$$\bar{\kappa}_2(s) = \kappa_1(s)(-\cos \theta(s) \sin \psi(s) + \sin \varphi(s) \sin \theta(s) \cos \psi(s)),$$

$$\bar{\kappa}_3(s) = \kappa_1(s)(\sin \theta(s) \sin \psi(s) + \cos \varphi(s) \sin \theta(s) \cos \psi(s)),$$

прва, *друга* и *трећа Бишопова кривина* криве редом.

У простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ постоје различити Бишови репери криве који могу садржати не-нул и нул векторска поља. У зависности од каузалног карактера криве, наводимо једначине Бишових репера и матрице ротација помоћу којих су од Френеових репера добијени поменути репери. Притом ћемо размотрити случајеве (А), (Б), (В) и (Г).

(А) α је просторна крива;

Можемо разликовати следећа два подслучаја:

(А.1) $N_1(s)$ је временски, а $N_2(s)$ просторни вектор;

Једначине Бишовог репера гласе ([69])

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s) = \kappa(s) \cosh \theta(s)$ и $\kappa_2(s) = \kappa(s) \sinh \theta(s)$ прва и друга Бишопова кривина криве и $\theta(s) = -\int \tau(s) ds$ угао ротације. Матрица ротације којом се од Френеовог репера добија Бишов репер гласи

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta(s) & -\sinh \theta(s) \\ 0 & -\sinh \theta(s) & \cosh \theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

(А.2) $N_1(s)$ је просторни, а $N_2(s)$ временски вектор;

Једначине Бишовог репера су облика ([69])

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

при чему је $\kappa_1(s) = \kappa(s) \cosh \theta(s)$, $\kappa_2(s) = \kappa(s) \sinh \theta(s)$ и $\theta(s) = \int \tau(s) ds$. Одговарајућа матрица ротације, којом се од Френеовог репера добија Бишов репер, гласи

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta(s) & -\sinh \theta(s) \\ 0 & -\sinh \theta(s) & \cosh \theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

(Б) α је временска крива;

У овом случају, једначине Бишовог репера су аналогне претходним случајевима и гласе ([69])

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

где су кривине $\kappa_1(s) = \kappa(s) \cos \theta(s)$, $\kappa_2(s) = \kappa(s) \sin \theta(s)$ и угао ротације $\theta(s) = \int \tau(s) ds$. Матрица ротације у просторној равни је облика

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta(s) & \sin \theta(s) \\ 0 & -\sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

(В) α је псеудо нул крива;

На основу претходних случајева, можемо закључити да ако је крива просторна или временска, њен Френеов репер ротира око тангентног векторског поља T у просторној или временској равни, чиме се добија Бишов репер криве. Бишов репер псеудо нул криве у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ дефинисале су М. Грбовић и Е. Нешовић у референци [29], где је показано да Френеов репер псеудо нул криве такође ротира око T у временској равни. Оне су извеле једначине Бишовог репера дате у следећој теорему.

Теорема 2.7.2. ([29]) Нека је α псеудо нул крива у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ параметризована параметром дужине лука s са Френеовим кривинама $\kappa(s) = 1$ и $\tau(s)$. Тада:

(i) релација између Бишовог и Френеовог репера гласи

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\kappa_2} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

а једначине Бишовог репера су облика

$$\begin{bmatrix} T'_1 \\ N'_1 \\ N'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_2 & \kappa_1 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s) = 0$ и $\kappa_2(s) = c_0 e^{\int \tau(s) ds}$, $c_0 \in \mathbb{R}_0^+$ прва и друга Бишопова кривина криве;

(ii) релација између Бишовог и Френеовог репера гласи

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_1 \\ 0 & -\frac{1}{\kappa_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

а једначине Бишовог репера су облика

$$\begin{bmatrix} T'_1 \\ N'_1 \\ N'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_2 & \kappa_1 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s) = c_0 e^{\int \tau(s) ds}$, $c_0 \in \mathbb{R}_0^-$ и $\kappa_2(s) = 0$ прва и друга Бишопова кривина криве.

(Г) α је нул Картанова крива;

Бишов репер нул Картанове криве у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ дефинисале су М. Грбовић и Е. Нешовић у референци [29]. Оне су доказале да у случају нул Картанове криве, векторска поља N'_1 и N'_2 минимално ротирају, при чему су колинеарна са векторским пољем N_2 . Важно је нагласити да се Бишов репер нул Картанове криве не може добити ротацијом Картановог репера око тангентног векторског поља T , као у претходно наведеним случајевима кривих.

Теорема 2.7.3. ([29]) Нека је α нул Картанова крива у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ параметризована параметром псеудо-дужине лука s са Картановим кривинама $\kappa(s) = 1$ и $\tau(s)$. Тада релација између Бишовог и Картановог репера гласи

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 1 & 0 \\ \frac{\kappa_2}{2} & -\kappa_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

а једначине Бишовог репера су облика

$$(2.7.1) \quad \begin{bmatrix} T'_1 \\ N'_1 \\ N'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_2 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & -\kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

где је $\kappa_1(s) = 1$ прва Бишопова кривина, а друга Бишопова кривина задовољава Рикатијеву диференцијалну једначину

$$\kappa'_2(s) = -\frac{1}{2}\kappa_2^2(s) - \tau(s).$$

Бишов репер нул Картанове криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$, увели су Е. Нешовић и К. Иларслан у раду [36]. У теорему која следи, посматра се нул Картанова крива која лежи у временској хиперравни простора $\mathbb{E}_1^4$, па је њен Бишов репер истог облика као у простору $\mathbb{E}_1^3$.

Теорема 2.7.4. ([36]) Нека је α нул Картанова крива у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ параметризована параметром псеудо-дужине лука s са Картановим кривинама $\kappa_1(s) = 1, \kappa_2(s)$ и $\kappa_3(s) = 0$. Тада релација између Бишовог репера и Картановог репера криве α гласи

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_2^2}{2} & -\sigma_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

а једначине Бишовог репера су облика

$$\begin{bmatrix} T'_1 \\ N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix},$$

где је $\sigma_1(s) = 1$ прва Бишопова кривина, друга Бишопова кривина $\sigma_2(s)$ задовољава Рикатијеву диференцијалну једначину

$$\sigma'_2(s) = -\frac{1}{2}\sigma_2^2(s) - \kappa_2(s),$$

а трећа Бишопова кривина $\sigma_3(s) = 0$.

За нул Картанову криву која има трећу Картанову кривину различиту од нуле, Бишовов репер је такође добијен у раду [36]. И у овом случају изводи векторских поља N'_1 , N'_2 и N'_3 минимално ротирају, односно колинеарни су са векторским пољем N_2 .

Теорема 2.7.5. ([36]) Нека је α нул Картанова крива у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ параметризована параметром псеудо-дужине лука s са Картановим кривинама $\kappa_1(s) = 1, \kappa_2(s)$ и $\kappa_3(s) \neq 0$. Тада релација између Бишововог и Картановог репера криве α гласи

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3\sqrt{\sigma_1'^2 + \sigma_3'^2} & \sigma_1 & 0 & \sigma_3 \\ \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1'^2 + \sigma_3'^2}{2} & -\sigma_2 & 1 & -\sqrt{\sigma_1'^2 + \sigma_3'^2} \\ \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sqrt{\sigma_1'^2 + \sigma_3'^2} & -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

а једначине Бишововог репера су облика

$$\begin{bmatrix} T'_1 \\ N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & -\sigma_3 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix},$$

при чему је $\sigma_1(s) = \sin \theta(s)$ прва Бишопова кривина, друга Бишопова кривина $\sigma_2(s)$ задовољава диференцијалну једначину

$$\sigma_2(s) = \frac{\kappa_3(s) - \theta''(s)}{\theta'(s)},$$

трећа Бишопова кривина је облика $\sigma_3(s) = \cos \theta(s)$, а функција θ задовољава диференцијалну једначину

$$2\theta'(\theta''' - \kappa_3') + 2\theta''(\kappa_3 - \theta'') + \theta'^4 - (\kappa_3 - \theta'')^2 - 2\kappa_2\theta'^2 = 0,$$

$\theta' \neq 0$, $\theta(s) \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\}$ и $k \in \mathbb{Z}$.

2.8 Дарбуов репер криве у просторима $\mathbb{E}^3$ и $\mathbb{E}_1^3$

Када се крива налази на оријентисаној површи у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$, обично се посматра њен *Дарбуов репер* $\{T, \zeta, \eta\}$ одређен тангентним векторским пољем T , нормалним векторским пољем површи η дуж криве и њиховим векторским производом $\zeta = \eta \times T$. Пошто је јединично тангентно векторско поље T заједничко за Френеов и Дарбуов репер, вектори N , B , η и ζ леже у истој равни, па се Дарбуов репер може добити *ротацијом Френеовог репера* око векторског поља T за одговарајући угао ротације $\varphi(s)$. Према томе, релација између поменутих репера гласи ([1])

$$(2.8.1) \quad \begin{bmatrix} T \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

где је $\varphi(s)$ угао између вектора $\zeta(s)$ и $\eta(s)$. Стога су једначине Дарбуовог репера облика ([1])

$$(2.8.2) \quad \begin{bmatrix} T' \\ \zeta' \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix},$$

где су

$$(2.8.3) \quad k_g = \langle T', \zeta \rangle, \quad k_n = \langle T', \eta \rangle, \quad \tau_g = \langle \zeta', \eta \rangle$$

геодезијска кривина, нормална кривина и геодезијска торзија криве редом. Релације између кривина криве k_g, k_n, τ_g у односу на Дарбуов и кривина κ, τ у односу на Френеов репер, гласе ([1])

$$k_g(s) = \kappa(s) \cos \varphi(s), \quad k_n(s) = \kappa(s) \sin \varphi(s), \quad \tau_g(s) = \tau(s) + \frac{d\varphi}{ds}.$$

У простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$, у зависности од каузалног карактера површи и криве на њој, наводимо следеће могућности (А), (Б) и (В) за њен Дарбуов репер.

(А) α је просторна или временска крива на недегенеративној површи;

Нека је M недегенеративна (просторна или временска) површ у простору Минковског $\mathbb{E}_3^1$ са параметризацијом

$$x(u, t) = (x_1(u, t), x_2(u, t), x_3(u, t)),$$

где су x_1, x_2, x_3 произвољне диференцијабилне функције. Означимо са

$$N(u, t) = \frac{x_u \times x_t}{\|x_u \times x_t\|}$$

јединично нормално векторско поље површи. Нека је $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ не-нул крива са не-нул главном нормалом на површи M параметризована дужином лука s .

Дарбуов репер $\{T, \zeta, \eta\}$ криве α је позитивно оријентисан ортонормирани репер који садржи јединично тангентно векторско поље $T = \alpha'$, јединично нормално векторско поље површи

$$\eta = N(u, t)|_\alpha$$

дуж криве и јединично векторско поље $\zeta = -\epsilon_T \epsilon_\eta \eta \times T$. Поменути векторска поља задовољавају услове ([71])

$$(2.8.4) \quad \langle T, T \rangle = \epsilon_T = \pm 1, \quad \langle \zeta, \zeta \rangle = -\epsilon_T \epsilon_\eta, \quad \langle \eta, \eta \rangle = \epsilon_\eta = \pm 1,$$

$$(2.8.5) \quad \langle T, \zeta \rangle = \langle T, \eta \rangle = \langle \zeta, \eta \rangle = 0,$$

$$(2.8.6) \quad T \times \zeta = \epsilon_\eta \eta, \quad \zeta \times \eta = \epsilon_T T, \quad \eta \times T = -\epsilon_T \epsilon_\eta \zeta.$$

Геодезијска и нормална кривина и геодезијска торзија криве α дефинисане су на исти начин као у еуклидском случају. Рачунским путем се добија да једначине Дарбуовог репера гласе ([71])

$$(2.8.7) \quad \begin{bmatrix} T' \\ \zeta' \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_T k_g & k_n \\ -\epsilon_T k_g & 0 & \tau_g \\ -\epsilon_T k_n & \epsilon_T \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix}.$$

(Б) α је просторна крива на светлосној површи;

Нека је M светлосна површ, тј. површ чија је тангентна раван у регуларним тачкама светлосна ([42, 20]). Дарбуов репер $\{T, \zeta, \eta\}$ просторне криве α са не-нул или нул главном нормалом која лежи на светлосној површи M са параметризацијом $x(u, t)$, је псеудо-ортонормирани репер кога чини просторно тангентно векторско поље $T = \alpha'$, нул нормално векторско поље површи

$$\eta = x_u \times x_t|_\alpha$$

и нул векторско поље ζ . Поменута векторска поља задовољавају услове ([70])

$$(2.8.8) \quad \langle T, T \rangle = 1, \quad \langle \eta, \eta \rangle = \langle \zeta, \zeta \rangle = \langle T, \zeta \rangle = \langle T, \eta \rangle = 0, \quad \langle \zeta, \eta \rangle = \epsilon_1 = \pm 1,$$

$$(2.8.9) \quad T \times \zeta = \epsilon_1 \zeta, \quad \zeta \times \eta = T, \quad \eta \times T = \epsilon_1 \eta.$$

Отуда једначине Дарбуовог репера гласе ([70])

$$(2.8.10) \quad \begin{bmatrix} T' \\ \zeta' \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 k_n & \epsilon_1 k_g \\ -k_g & \epsilon_1 \tau_g & 0 \\ -k_n & 0 & -\epsilon_1 \tau_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix},$$

при чему су геодезијска и нормална кривина и геодезијска торзија криве α дате релацијом (2.8.3).

(В) α је нул Картанова крива на временској површи.

Дарбуов репер нул Картанове криве α на временској површи са параметризацијом $x(u, t)$, је позитивно оријентисан репер $\{T, \zeta, \eta\}$ који садржи светлосно тангентно векторско поље $T = \alpha'$, јединично просторно нормално векторско поље површи

$$\eta = \frac{x_u \times x_t}{||x_u \times x_t||}|_\alpha$$

и светлосно трансверзално векторско поље ζ , која задовољавају услове ([64])

$$(2.8.11) \quad \langle T, T \rangle = \langle \zeta, \zeta \rangle = \langle T, \eta \rangle = \langle \zeta, \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta, \eta \rangle = 1, \quad \langle T, \zeta \rangle = \epsilon_1 = \pm 1,$$

$$T \times \zeta = \eta, \quad \zeta \times \eta = \epsilon_1 \zeta, \quad \eta \times T = \epsilon_1 T, \quad \det(T, \zeta, \eta) = [T, \zeta, \eta] = 1.$$

Према томе, једначине Дарбуовог репера су облика ([64])

$$(2.8.12) \quad \begin{bmatrix} T' \\ \zeta' \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 k_g & 0 & k_n \\ 0 & -\epsilon_1 k_g & \tau_g \\ -\epsilon_1 \tau_g & -\epsilon_1 k_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix},$$

при чему су геодезијска и нормална кривина и геодезијска торзија криве α дате релацијом (2.8.3).

3 Бишов репер криве у простор-времену $\mathbb{E}_1^4$

У овом поглављу ћемо представити оригиналне резултате дисертације публиковане у радовима [13] и [14], који се односе на дефинисање Бишовог репера парцијално нул и псеудо нул криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$. Даћемо једначине Бишових репера и релације које постоје између таквих репера и Френеових репера кривих. Приказаћемо извођење одговарајуће нелинеарне диференцијалне једначине трећег реда, чија партикуларна решења одређују Бишопове репере и Бишопове кривине псеудо нул и парцијално нул криве. Применом геометријске алгебре простор-времена, ћемо одредити једначине Дарбуових бивектора Френеовог и Бишовог репера псеудо нул криве и доказати да су поменути бивектори светлосни ако и само ако су трећа Френеова и трећа Бишопова кривина једнаке нули. Такође ћемо дати геометријску интерпретацију Френеових и Бишових кривина псеудо нул криве, према којој поменуте кривине представљају површину пројекције Дарбуовог бивектора на раван разапету одговарајућим векторским пољима. Показаћемо да се Френеов репер парцијално нул криве може добити ротацијом Бишовог репера који одговара једном партикуларном решењу поменуте нелинеарне диференцијалне једначине. Одредићемо параметарске једначине светлосне хиперповрши и светлосне фокалне површи дуж парцијално нул криве у терминима Бишовог репера који је добијен ротацијом Френеовог репера. Такође ћемо доказати да светлосна фокална површ дуж парцијално нул хелисе нема скуп критичних тачака.

3.1 Бишов репер псеудо нул криве у простор-времену $\mathbb{E}_1^4$

Познато је да се Бишов репер регуларне криве у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$ може добити ротацијом Френеовог репера око тангентног векторског поља T за угао $\theta(s) = \int \tau(s)ds$, где је $\tau(s)$ торзија криве. После такве ротације, векторска поља N'_1 и N'_2 су колинеарна са тангентним векторским пољем T у свакој тачки криве, што значи да минимално ротирају у равнима $\{T, N_1\}$ и $\{T, N_2\}$ редом. Нове врсте Бишовог репера под називом *Бишов репер типа 2* и *N-Бишов репер*, добијене су у референцама [46, 86]. У еуклидском простору $\mathbb{E}^4$, Бишов репер је представљен у терминима Ојлерових углова у раду [27]. У просторима Минковског, Бишови репер временске, просторне, нул Картанове и псеудо нул криве могу се наћи у радовима [22, 69, 28, 29]. Бишов репер $\{T_1, N_1, N_2, N_3\}$ нул Картанове криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$, је уведен у раду [36] као позитивно оријентисани псеудо-ортонормирани репер који садржи нул тангентно векторско поље T_1 криве и

три векторска поља N_1 , N_2 и N_3 чији су изводи колинеарни са векторским пољем N_2 у свакој тачки. Примене Бишовог репера се могу наћи у механици ([23]), компјутерској графици ([82]), при деформацији цеви ([75]) и моделовању површи ([49]), као и у диференцијалној геометрији у циљу класификације различитих типова кривих.

Бишов репер псеудо нул криве α у простор-времени Минковског $\mathbb{E}_1^4$ ћемо дефинисати као репер који садржи векторско поље главних нормала N и три векторска поља чији изводи у односу на параметар дужине лука криве имају својство минималне ротације. Приказаћемо извођење једначина Бишовог репера и дати релацију између поменутог и Френеовог репера криве. Такође ћемо навести неке примере Бишових репера псеудо нул кривих.

У том циљу, присетимо се да је простор-време Минковског $\mathbb{E}_1^4$ реалан векторски простор $\mathbb{E}^4$ снабдевен индефинитним скаларним производом

$$\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4,$$

где су $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ произвољни вектори. Псеудо нул крива α у том простору је просторна крива чији су вектор главне нормале N и вектор друге бинормале B_2 нул вектори. Познато је да Френеов репер $\{T, N, B_1, B_2\}$ псеудо нул криве задовољава услове ([81])

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} \langle T, T \rangle = \langle B_1, B_1 \rangle = 1, \quad \langle N, N \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 0, \\ \langle T, N \rangle = \langle T, B_1 \rangle = \langle N, B_1 \rangle = \langle T, B_2 \rangle = \langle B_1, B_2 \rangle = 0, \quad \langle N, B_2 \rangle = 1. \end{aligned}$$

Стога су једначине Френеовог репера облика ([81])

$$(3.1.2) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_3 & 0 & -\kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s) = 1$, $\kappa_2(s)$ и $\kappa_3(s)$ прва, друга и трећа Френеова кривина криве. Френеов репер $\{T, N, B_1, B_2\}$ је позитивно оријентисан, ако важи релација

$$\langle T, N \times B_1 \times B_2 \rangle = \det(T, N, B_1, B_2) = 1.$$

Приметимо да је ректификациони простор $N^\perp = \text{span}\{T, N, B_1\}$ псеудо нул криве светлосни, јер садржи само линеарно зависна нул векторска поља. У раду [20] је доказано да за дата векторска поља T , N и B_1 , постоји јединствено нул трансверзално векторско поље B_2 које задовољава услове

$$\langle B_2, B_2 \rangle = 0, \quad \langle N, B_2 \rangle = 1, \quad \langle B_1, B_2 \rangle = \langle T, B_2 \rangle = 0.$$

Означимо са $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ нови репер дуж псеудо нул криве α , где је $N_1 = N$ векторско поље главних нормала, N_0 и N_2 су просторна векторска поља и N_3 је нул трансверзално векторско поље, тако да важе услови

$$(3.1.3) \quad \begin{aligned} \langle N_1, N_1 \rangle = \langle N_3, N_3 \rangle = 0, \quad \langle N_0, N_0 \rangle = \langle N_2, N_2 \rangle = \langle N_1, N_3 \rangle = 1, \\ \langle N_0, N_1 \rangle = \langle N_0, N_2 \rangle = \langle N_0, N_3 \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle = \langle N_2, N_3 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Векторска поља N'_0 , N'_2 и N'_3 у односу на репер $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ можемо декомпоновати на следећи начин

$$(3.1.4) \quad \begin{aligned} N'_0 &= a_0 N_0 + b_0 N_1 + c_0 N_2 + d_0 N_3, \\ N'_2 &= a_1 N_0 + b_1 N_1 + c_1 N_2 + d_1 N_3, \\ N'_3 &= a_2 N_0 + b_2 N_1 + c_2 N_2 + d_2 N_3, \end{aligned}$$

где су a_i , b_i , c_i , d_i , $i = 0, 1, 2$ произвољне диференцијабилне функције по параметру дужине лука s . Следећом дефиницијом уводимо *релативно паралелна векторска поља*.

Дефиниција 3.1.1. За просторна векторска поља N_0 и N_2 и светлосно трансверзално векторско поље N_3 која задовољавају услове (3.1.3) дуж псеудо нул криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ кажемо да су *релативно паралелна*, ако је нормална компонента њихових извода N'_0 , N'_2 и N'_3 , која припада потпростору $N_1^\perp = \text{span}\{N_0, N_1, N_2\}$ једнака нули.

Ако су N'_0 , N'_2 и N'_3 релативно паралелна векторска поља, на основу дефиниције 3.1.1 и релације (3.1.4) следи да су њихови изводи колинеарни са нул векторским пољем N_3 у свакој тачки криве. То значи да векторска поља N'_0 , N'_2 и N'_3 минимално ротирају у хиперравнима $N_0^\perp = \{N_1, N_2, N_3\}$, $N_2^\perp = \text{span}\{N_0, N_1, N_3\}$ и $N_3^\perp = \text{span}\{N_0, N_2, N_3\}$ редом.

Дефиниција 3.1.2. Бишопов репер $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ псеудо нул криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ је позитивно оријентисан псеудо-ортонормирани репер који садржи векторско поље главних нормала N_1 и три релативно паралелна векторска поља N_0 , N_2 , N_3 која задовољавају услове (3.1.3).

Напоменимо да је Бишопов репер $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ позитивно оријентисан, ако је

$$\langle N_0, N_1 \times N_2 \times N_3 \rangle = \det(N_0, N_1, N_2, N_3) = 1.$$

У теореме која следи ћемо одредити векторска поља Бишоповог репера у терминима Френеовог репера. Такође ћемо добити једначине Бишоповог репера и Бишопове кривине које су одређене партикуларним решењима диференцијалне једначине трећег реда.

Теорема 3.1.1. Нека је α псеудо нул крива у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ параметризована дужином лука s са Френеовим кривинама $\kappa_1(s) = 1$, $\kappa_2(s) \neq 0$, $\kappa_3(s)$, Френеовим репером $\{T, N, B_1, B_2\}$ и Бишоповим репером $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$.

(i) Релација између Бишоповог и Френеовог репера гласи

$$(3.1.5) \quad \begin{aligned} N_0 &= \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} T + \left(\frac{(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})' \sigma_1^2 \sigma_2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) N + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} B_1, \\ N_1 &= N, \\ N_2 &= -\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} T - \left(\frac{(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})' \sigma_1^3}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} + \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) N + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} B_1, \\ N_3 &= -\frac{(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})' \sigma_1^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}} T - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \frac{(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})'^2 \sigma_1^4}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^3} \right) N + \frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} B_1 + B_2; \end{aligned}$$

(ii) Једначине Бишовог репера су облика

$$(3.1.6) \quad \begin{bmatrix} N'_0 \\ N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix},$$

при чему су

$$(3.1.7) \quad \begin{aligned} \sigma_1(s) &= \kappa_2(s) \cos \theta(s), \\ \sigma_2(s) &= \kappa_2(s) \sin \theta(s), \end{aligned}$$

$$\sigma_3(s) = -\frac{\kappa_2(s)}{\theta'(s)} \left(1 + \left(\frac{\theta'(s)}{\kappa_2(s)} \right)' \right),$$

Бишопове кривине криве α , а функција $\theta(s) \neq \text{constant}$ задовољава нелинеарну диференцијалну једначину трећег реда

$$(3.1.8) \quad \left(\frac{1}{\theta'} + \frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \right)' \right)' - \frac{\kappa_2}{2} \left(\frac{1}{\theta'} + \frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \right)' \right)^2 + \frac{\theta'^2}{2\kappa_2} + \kappa_3 = 0.$$

Доказ. Нека је $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ Бишов репер псеудо нул криве α параметризоване дужином лука s . Према дефиницији 3.1.2, векторска поља N_0 , N_2 и N_3 су релативно паралелна. Применом поменутог својства, одредићемо једначине Бишовог репера. Разложићемо векторско поље N'_0 у односу на псеудо-ортонормирану базу $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ на следећи начин

$$(3.1.9) \quad N'_0 = a_0 N_0 + b_0 N_1 + c_0 N_2 + d_0 N_3,$$

где су a_0 , b_0 , c_0 и d_0 произвољне диференцијабилне функције по s . Помоћу релација (3.1.3) и (3.1.9) налазимо да је

$$(3.1.10) \quad \langle N'_0, N_0 \rangle = a_0 = 0, \quad \langle N'_0, N_1 \rangle = d_0 = -\sigma_1,$$

$$(3.1.11) \quad \langle N'_0, N_2 \rangle = c_0 = 0, \quad \langle N'_0, N_3 \rangle = b_0 = 0,$$

при чему је прва Бишопова кривина дефинисана са $\sigma_1 = -\langle N'_0, N_1 \rangle$. Заменом (3.1.10) и (3.1.11) у (3.1.9), следи да је

$$(3.1.12) \quad N'_0 = -\sigma_1 N_3.$$

Аналогно налазимо да је

$$(3.1.13) \quad N'_1 = \sigma_1 N_0 + \sigma_3 N_1 + \sigma_2 N_2, \quad N'_2 = -\sigma_2 N_3, \quad N'_3 = -\sigma_3 N_3,$$

где су са $\sigma_2 = \langle N'_1, N_2 \rangle$ и $\sigma_3 = -\langle N'_3, N_1 \rangle$ дефинисане друга и трећа Бишопова кривина. На основу релација (3.1.12) и (3.1.13) следи да су једначине Бишовог репера облика (3.1.6).

У наставку ћемо одредити релације између Бишових и Френеових кривина. Према дефиницији 3.1.2, имамо да је $N_1 = N$. Диференцирањем претходне једначине по s и применом (3.1.2) и (3.1.13), следи да је

$$N'_1 = N' = \sigma_1 N_0 + \sigma_3 N_1 + \sigma_2 N_2 = \kappa_2 B_1.$$

Последња релације даје

$$(3.1.14) \quad B_1 = \frac{\sigma_1}{\kappa_2} N_0 + \frac{\sigma_3}{\kappa_2} N_1 + \frac{\sigma_2}{\kappa_2} N_2.$$

Помоћу услова $\langle B_1, B_1 \rangle = 1$ и релација (3.1.3) и (3.1.14), добијамо

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \kappa_2^2.$$

Сада ћемо размотрити посебно следеће случајеве:

(А) $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \pm \kappa_2$;

(Б) $\sigma_1 = \pm \kappa_2, \sigma_2 = 0$;

(В) $\sigma_1 = \kappa_2 \cos \theta, \sigma_2 = \kappa_2 \sin \theta$, при чему је $\theta = \theta(s)$ произвољна диференцијабилна функција.

(А) $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \pm \kappa_2$. Заменом претходних једнакости у (3.1.14), добијамо да је

$$(3.1.15) \quad B_1 = \frac{\sigma_3}{\kappa_2} N_1 \pm N_2.$$

Тангентно векторско поље T , у односу на Бишов репер, можемо написати у облику

$$(3.1.16) \quad T = \lambda N_0 + \mu N_1 + \nu N_2 + \omega N_3,$$

за неке диференцијабилне функције $\lambda, \mu, \nu, \omega$. Помоћу релација (3.1.3), (3.1.15), (3.1.16) и услова $\langle T, B_1 \rangle = \langle T, N \rangle = 0$, налазимо да је $\nu = \omega = 0$. Отуда је

$$T = \lambda N_0 + \mu N_1.$$

Диференцирањем последње релације по s и применом релација (3.1.2), (3.1.14) и (3.1.15), добијамо

$$T' = N = N_1 = (\lambda' + \mu \sigma_1) N_0 + (\mu' + \mu \sigma_3) N_1 + \mu \sigma_2 N_2 - \lambda \sigma_1 N_3.$$

Последња једнакост имплицира систем једначина

$$\lambda' + \mu \sigma_1 = 0, \quad \mu' + \mu \sigma_3 = 1, \quad \mu \sigma_2 = 0, \quad \lambda \sigma_1 = 0.$$

Пошто је $\sigma_2 = \pm \kappa_2 \neq 0$, следи да је $\mu = 0$. Међутим, друга једначина последњег система једначина даје контрадикцију.

(Б) $\sigma_1 = \pm \kappa_2, \sigma_2 = 0$. Аналогно случају (А), добија се контрадикција.

(В) $\sigma_1 = \kappa_2 \cos \theta, \sigma_2 = \kappa_2 \sin \theta$. Применом релација (3.1.14), (3.1.16) и услова $\langle T, N \rangle = \langle T, B_1 \rangle = 0$, налазимо да је

$$\lambda = \sin \theta, \quad \nu = -\cos \theta, \quad \omega = 0.$$

Заменом последњих једнакости у (3.1.16), добијамо да је

$$(3.1.17) \quad T = \sin \theta N_0 + \mu N_1 - \cos \theta N_2.$$

Диференцирањем претходне једнакости по s и применом релација (3.1.2), (3.1.12) и (3.1.13), следи да је

$$(3.1.18) \quad N_1 = (\theta' \cos \theta + \mu \sigma_1) N_0 + (\mu' + \mu \sigma_3) N_1 + (\mu \sigma_2 + \theta' \sin \theta) N_2 + (\sigma_1 \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta) N_3.$$

Како су вектори N_0, N_1, N_2 и N_3 линеарно независни, добијамо систем једначина

$$(3.1.19) \quad \begin{aligned} \theta' \cos \theta + \mu \sigma_1 &= 0, \\ \mu' + \mu \sigma_3 &= 1, \\ \mu \sigma_2 + \theta' \sin \theta &= 0, \\ -\sigma_1 \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta &= 0. \end{aligned}$$

Ако је $\theta' = 0$, тада је $\mu \sigma_1 = \mu \sigma_2 = 0$. Ако је $\mu = 0$, друга једначина система једначина (3.1.19) даје контрадикцију. Ако је $\mu \neq 0$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, тада је $\kappa_2 = 0$ што је такође контрадикција. Зато је $\theta' \neq 0$. Заменом кривина $\sigma_1 = \kappa_2 \cos \theta$ и $\sigma_2 = \kappa_2 \sin \theta$ у релацији (3.1.19), добијамо

$$(3.1.20) \quad \mu = -\frac{\theta'}{\kappa_2}, \quad \sigma_3 = \frac{1 - \mu'}{\mu} = -\frac{\kappa_2}{\theta'} \left(1 + \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \right)' \right).$$

С друге стране, заменом кривина $\sigma_1 = \kappa_2 \cos \theta$ и $\sigma_2 = \kappa_2 \sin \theta$ у релацији (3.1.14), следи да је

$$(3.1.21) \quad B_1 = \cos \theta N_0 + \frac{\sigma_3}{\kappa_2} N_1 + \sin \theta N_2.$$

На основу релација (3.1.17) и (3.1.21) следи да су векторска поља T и B_1 изражена помоћу векторских поља Бишовог репера. У наставку ћемо изразити векторско поље B_2 помоћу N_0, N_1, N_2 и N_3 . Применом услова

$$\langle B_2, T \rangle = \langle B_2, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 0, \quad \langle B_2, N \rangle = 1$$

и релација (3.1.17), (3.1.21) и $N = N_1$, следи да је

$$(3.1.22) \quad \begin{aligned} B_2 &= \left(-\frac{\sigma_3}{\kappa_2} \cos \theta - \mu \sin \theta \right) N_0 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sigma_3}{\kappa_2} \right)^2 + \mu^2 \right) N_1 \\ &+ \left(-\frac{\sigma_3}{\kappa_2} \sin \theta + \mu \cos \theta \right) N_2 + N_3. \end{aligned}$$

Помоћу релација (3.1.17), (3.1.20), (3.1.21) и (3.1.22) добијамо

$$(3.1.23) \quad \begin{aligned} N_0 &= \sin \theta T + \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \sin \theta - \frac{\sigma_3}{\kappa_2} \cos \theta \right) N + \cos \theta B_1, \\ N_1 &= N, \\ N_2 &= -\cos \theta T - \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \cos \theta + \frac{\sigma_3}{\kappa_2} \sin \theta \right) N + \sin \theta B_1, \\ N_3 &= -\frac{\theta'}{\kappa_2} T - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sigma_3}{\kappa_2} \right)^2 + \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \right)^2 \right) N + \frac{\sigma_3}{\kappa_2} B_1 + B_2. \end{aligned}$$

Како је $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \kappa_2^2$, кореновањем добијамо да је $\kappa_2 = \pm \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Можемо претпоставити да је $\kappa_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Заменом израза

$$\kappa_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad \sin \theta = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}, \quad \frac{\theta'}{\kappa_2} = \frac{(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})' \sigma_1^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}},$$

у релацији (3.1.23), налазимо да је

$$(3.1.24) \quad \begin{aligned} N_0 &= \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} T + \left(\frac{(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})' \sigma_1^2 \sigma_2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) N + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} B_1, \\ N_1 &= N, \\ N_2 &= -\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} T - \left(\frac{(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})' \sigma_1^3}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} + \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) N + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} B_1, \\ N_3 &= -\frac{(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})' \sigma_1^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}} T - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \frac{(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})'^2 \sigma_1^4}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^3} \right) N + \frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} B_1 + B_2, \end{aligned}$$

Тиме је релација (3.1.5) доказана. Може се проверити да је

$$\langle N_0, N_1 \times N_2 \times N_3 \rangle = \det(N_0, N_1, N_2, N_3) = 1,$$

што значи да је Бишов репер позитивно оријентисан.

Да бисмо одредили непознату диференцијабилну функцију θ , из једначина Бишовог репера (3.1.6) имамо да је $N_2' = -\sigma_2 N_3$. Заменом $\sigma_2 = \kappa_2 \sin \theta$ и N_3 у последњој једнакости, добијамо

$$(3.1.25) \quad N_2' = -\kappa_2 \sin \theta \left[-\frac{\theta'}{\kappa_2} T - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sigma_3}{\kappa_2} \right)^2 + \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \right)^2 \right) N + \frac{\sigma_3}{\kappa_2} B_1 + B_2 \right].$$

С друге стране, диференцирањем релације

$$N_2 = -\cos \theta T - \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \cos \theta + \frac{\sigma_3}{\kappa_2} \sin \theta \right) N + \sin \theta B_1$$

по s и применом релације (4.3.2), налазимо да је

$$(3.1.26) \quad \begin{aligned} N_2' &= \theta' \sin \theta T - \cos \theta N - \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \cos \theta + \frac{\sigma_3}{\kappa_2} \sin \theta \right)' N \\ &- \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \cos \theta + \frac{\sigma_3}{\kappa_2} \sin \theta \right) \kappa_2 B_1 + \theta' \cos \theta B_1 + \sin \theta (\kappa_3 N - \kappa_2 B_2). \end{aligned}$$

Помоћу релација (3.1.25) и (3.1.26), добијамо нелинеарну диференцијалну једначину трећег реда облика

$$(3.1.27) \quad \left(\frac{1}{\theta'} + \frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \right)' \right)' - \frac{\kappa_2}{2} \left(\frac{1}{\theta'} + \frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta'}{\kappa_2} \right)' \right)^2 + \frac{\theta'^2}{2\kappa_2} + \kappa_3 = 0$$

коју задовољава непозната функција θ . Тиме је доказано да важи релација (3.1.8), чиме је доказ комплетиран. $\square$

Приметимо да свако партикуларно решење диференцијалне једначине (3.1.8) одређује одговарајуће Бишопове кривине дате релацијом (3.1.7). Опште решење поменуте једначине зависи од Френеових кривина $\kappa_2(s) \neq 0$ и $\kappa_3(s)$. Ако је $\kappa_2(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\kappa_3(s) = \text{constant}$, добијамо нелинеарну диференцијалну једначину трећег реда са константним коефицијентима. У општем случају, није увек могуће наћи њено опште решење у експлицитном облику.

Наводимо примере у којима је могуће наћи бар једно партикуларно решење диференцијалне једначине (3.1.8).

ПРИМЕР 3.1.1. Нека је α псеудо нул хелиса у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ параметризована дужином лука s са параметарском једначином

$$\alpha(s) = \frac{3}{\sqrt{10}} \left(\frac{1}{9} \cosh(3s), \frac{1}{9} \sinh(3s), \sin s, -\cos s \right).$$

Френеове кривине криве α гласе

$$(3.1.28) \quad \kappa_1(s) = 1, \quad \kappa_2(s) = 3, \quad \kappa_3(s) = \frac{4}{3},$$

а Френеов репер је облика

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{3}{\sqrt{10}} \left(\frac{1}{3} \sinh(3s), \frac{1}{3} \cosh(3s), \cos s, \sin s \right), \\ N(s) &= \frac{3}{\sqrt{10}} (\cosh(3s), \sinh(3s), -\sin s, \cos s), \\ B_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{10}} (3 \sinh(3s), 3 \cosh(3s), -\cos s, -\sin s), \\ B_2(s) &= \frac{5}{3\sqrt{10}} (-\cosh(3s), -\sinh(3s), -\sin s, \cos s). \end{aligned}$$

Заменом (3.1.28) у (3.1.8) добијамо диференцијалну једначину

$$\left(\frac{1}{\theta'} + \frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta'}{3} \right)' \right)' - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\theta'} + \frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta'}{3} \right)' \right)^2 + \frac{\theta'^2}{6} + \frac{4}{3} = 0$$

чије је једно партикуларно решење $\theta(s) = s$. Заменом $\theta(s) = s$ и (3.1.28) у релацији (3.1.7), следи да су Бишопове кривине криве α облика

$$(3.1.29) \quad \sigma_1(s) = 3 \cos s, \quad \sigma_2(s) = 3 \sin s, \quad \sigma_3(s) = -3.$$

Помоћу (3.1.5) и (3.1.29) добијамо да Бишопов репер криве α гласи

$$\begin{aligned} N_0(s) &= \sin(s)T(s) + \left(\frac{1}{3} \sin(s) + \cos(s) \right) N(s) + \cos(s)B_1(s), \\ N_1(s) &= N(s), \\ N_2(s) &= \cos(s)T(s) + \left(-\frac{1}{3} \cos(s) + \sin(s) \right) N(s) + \sin(s)B_1(s), \\ N_3(s) &= -\frac{1}{3}T(s) - \frac{5}{9}N(s) - B_1(s) + B_2(s). \end{aligned}$$

Није тешко проверити да Бишопов репер задовољава једначине (3.1.6).

ПРИМЕР 3.1.2. Посматрајмо псеудо нул криву α у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$, параметризовану дужином лука s , са параметарском једначином

$$\alpha(s) = \left(-\frac{s^2}{2} + \frac{1}{8} \ln s, \frac{s^2}{2} + \frac{1}{8} \ln s, \frac{s\sqrt{2}}{4}(\sin(\ln s) + \cos(\ln s)), \frac{s\sqrt{2}}{4}(\sin(\ln s) - \cos(\ln s))\right).$$

Њен Френеов репер је облика

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(-s + \frac{1}{8s}, s + \frac{1}{8s}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\ln s), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\ln s)\right), \\ N(s) &= \left(-1 - \frac{1}{8s^2}, 1 - \frac{1}{8s^2}, -\frac{1}{s\sqrt{2}} \sin(\ln s), \frac{1}{s\sqrt{2}} \cos(\ln s)\right), \\ B_1(s) &= \left(\frac{1}{4s}, \frac{1}{4s}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(\ln s) - \cos(\ln s)), \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(\ln s) - \cos(\ln s))\right), \\ B_2(s) &= \left(\frac{s^2}{2} + \frac{5}{16}, -\frac{s^2}{2} + \frac{5}{16}, -\frac{s}{2\sqrt{2}}(\sin(\ln s) + 2\cos(\ln s)), \frac{s}{2\sqrt{2}}(\cos(\ln s) - 2\sin(\ln s))\right), \end{aligned}$$

а Френеове кривине гласе

$$(3.1.30) \quad \kappa_1(s) = 1, \quad \kappa_2(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \kappa_3(s) = -\frac{1}{2}.$$

Заменом релације (3.1.30) у релацији (3.1.8) добијамо диференцијалну једначину трећег реда

$$\frac{1}{\theta'} \left((s^2 \theta')' - 1 \right)' - \frac{1}{2s^2} \left(\frac{1}{\theta'} \left((s^2 \theta')' - 1 \right) \right)^2 + \frac{s^2}{2} \theta'^2 - \frac{1}{2} = 0,$$

чије је једно партикуларно решење $\theta(s) = \ln s$. Заменом партикуларног решења $\theta(s) = \ln s$ и релације (3.1.30) у релацији (3.1.7), налазимо Бишопове кривине

$$(3.1.31) \quad \sigma_1(s) = \frac{1}{s^2} \cos(\ln s), \quad \sigma_2(s) = \frac{1}{s^2} \sin(\ln s), \quad \sigma_3(s) = -\frac{2}{s}.$$

Применом релација (3.1.5) и (3.1.31) следи да је Бишопов репер криве α облика

$$\begin{aligned} N_0(s) &= \sin(\ln s)T(s) + (s \sin(\ln s) + 2s \cos(\ln s))N(s) + \cos(\ln s)B_1(s), \\ N_1(s) &= N(s), \\ N_2(s) &= -\cos(\ln s)T(s) + (s \cos(\ln s) - 2s \sin(\ln s))N(s) + \sin(\ln s)B_1(s), \\ N_3(s) &= -sT(s) - \frac{5}{2}s^2N(s) - 2sB_1(s) + B_2(s). \end{aligned}$$

Добијени Бишопов репер задовољава једначине (3.1.6), што се може непосредно проверити.

3.2 Дарбуов бивектор Френеовог и Бишоповог репера псеудо нул криве

Дарбуов вектор (вектор угаоне брзине) Френеовог репера $\{T, N, B\}$ регуларне криве у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$, представља осу око које репер ротира када се креће

дуж криве. Познато је да он задовољава *Дарбуове једначине*, које су еквивалентне Френеовим једначинама ([52]). С друге стране, и Дарбуов репер $\{T, \zeta, \eta\}$ регуларне криве на површи у 3-димензионом еуклидском простору такође има свој Дарбуов вектор.

Познато је да у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ Френеов репер не-нул криве са не-нул главном нормалом ротира око *Дарбуовог бивектора*. Поменути бивектор задовољава одговарајуће *Дарбуове једначине* које су изражене у терминима унутрашњег производа геометријске алгебре простор-времена ([33, 34]).

У овом одељку ћемо навести оригиналне резултате докторске дисертације публиковане у референци [14], који представљају примену геометријске алгебре у циљу добијања израза за Дарбуов бивектор D Френеовог репера и Дарбуов бивектор $\tilde{D}$ Бишоповог репера псеудо нул криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$. Такође ћемо доказати да су поменути бивектори светлосни ако и само ако псеудо нул крива има трећу Френеову кривину, односно трећу Бишопову кривину једнаку нули редом. Показаћемо да се Френеове и Бишопове кривине псеудо нул криве у простор-времену Минковског могу геометријски интерпретирати као површине пројекција Дарбуовог бивектора Френеовог репера, односно Бишоповог репера редом на равни разапете одговарајућим векторским пољима.

Алгебра простор-времена је некомутативна асоцијативна геометријска алгебра $\mathbb{G}_4(\mathbb{E}_1^4)$ димензије 16, чији се елементи зову *мултивектори*. У тој алгебри, *геометријски производ* ab вектора a и b је дефинисан са ([34])

$$ab = a \cdot b + a \wedge b,$$

при чему је

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

комутативни *унутрашњи производ* и

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba)$$

некомутативни *спољашњи производ*. Применом претходних једнакости, добијамо да је

$$aa = a \cdot a + a \wedge a = a^2 = \epsilon_a \|a\|^2,$$

где је ϵ_a *сигнатура* вектора a и $\|a\| = \sqrt{|\langle a, a \rangle|}$ норма тог вектора. За вектор a кажемо да је *временски*, *просторни*, или *светлосни*, ако је редом $\epsilon_a = 1$, $\epsilon_a = -1$ и $\epsilon_a = 0$. Унутрашњи производ 1-вектора (вектора) a и бивектора (2-вектора) $b \wedge c$ је дат изразом

$$(3.2.1) \quad a \cdot (b \wedge c) = \langle a, b \rangle c - \langle a, c \rangle b = -(b \wedge c) \cdot a.$$

Унутрашњи производ два бивектора дефинисан је на следећи начин ([34])

$$(3.2.2) \quad (b \wedge a) \cdot (u \wedge v) = -\langle b, u \rangle \langle a, v \rangle + \langle b, v \rangle \langle a, u \rangle.$$

Према томе, Френеов репер $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}_1, \bar{B}_2\}$ временске криве у $\mathbb{E}_1^4$ има Дарбуов бивектор

$$\bar{D} = \bar{k}_1 \bar{N} \wedge \bar{T} + \bar{k}_2 \bar{N} \wedge \bar{B}_1 + \bar{k}_3 \bar{B}_1 \wedge \bar{B}_2$$

који представља уопштење Дарбуовог вектора D . Наиме, ако је трећа Френеова кривина $\bar{k}_3 = 0$, временска крива лежи у тродимензионом простору $\mathbb{E}_1^3$, па њен Дарбуов вектор у том случају гласи

$$D = -I\bar{D} = -I(\bar{k}_1 \bar{N} \wedge \bar{T} + \bar{k}_2 \bar{N} \wedge \bar{B}_1) = \bar{k}_1 \bar{B}_1 + \bar{k}_2 \bar{T},$$

где је I *псевдоскалар* геометријске алгебре $\mathbb{G}_3(\mathbb{E}_1^3)$ и $I(a \wedge b) = a \times b$. Остале особине геометријске алгебре простор-времена се могу наћи у радовима ([34, 35]).

Уочимо Френеов репер $\{T, N, B_1, B_2\}$ псеудо нул криве α у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ са Френеовим кривинама $\kappa_1(s) = 1, \kappa_2(s) \neq 0$ и $\kappa_3(s)$. Френеов репер одређује шест *базних бивектора*

$$\begin{aligned} E_{TN} &= T \wedge N, & E_{TB_1} &= T \wedge B_1, & E_{TB_2} &= T \wedge B_2, \\ E_{NB_1} &= N \wedge B_1, & E_{NB_2} &= N \wedge B_2, & E_{B_1B_2} &= B_1 \wedge B_2. \end{aligned}$$

Базни бивектори имају јединичну површину или површину једнаку нули и паралелни су редом 2-равнима $\text{span}\{T, N\}, \text{span}\{T, B_1\}, \text{span}\{T, B_2\}, \text{span}\{N, B_1\}, \text{span}\{N, B_2\}, \text{span}\{B_1, B_2\}$.

Дарбуов бивектор D Френеовог репера псеудо нул криве може се представити као збир својих пројекција на шест 2-равни [53]

$$(3.2.3) \quad D = aE_{TN} + bE_{TB_1} + cE_{TB_2} + dE_{NB_1} + fE_{NB_2} + hE_{B_1B_2},$$

при чему су a, b, c, d, f, h површине одговарајућих пројекција. С друге стране, Дарбуов бивектор D задовољава Дарбуове једначине облика ([33])

$$(3.2.4) \quad T' = D \cdot T, \quad N' = D \cdot N, \quad B_1' = D \cdot B_1, \quad B_2' = D \cdot B_2.$$

Помоћу релација (3.1.1), (3.1.2), (3.2.1), (3.2.3) и (3.2.4), налазимо да је

$$\begin{aligned} D \cdot T &= (aE_{TN} + bE_{TB_1} + cE_{TB_2} + dE_{NB_1} + fE_{NB_2} + hE_{B_1B_2}) \cdot T \\ &= -aN - bB_1 - cB_2 = N. \end{aligned}$$

Из претходне једнакости следи

$$(3.2.5) \quad a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0.$$

На основу релација (3.1.1), (3.1.2), (3.2.1), (3.2.3), (3.2.4) и (3.2.5), аналогно добијамо

$$\begin{aligned} D \cdot N &= cT + fN + hB_1 = \kappa_2 B_1, \\ D \cdot B_1 &= bT + dN - hB_2 = \kappa_3 N - \kappa_2 B_2, \\ D \cdot B_2 &= aT - dB_1 - fB_2 = -T - \kappa_3 B_1. \end{aligned}$$

Претходни систем једначина имплицира

$$(3.2.6) \quad f = 0, \quad h = \kappa_2, \quad d = \kappa_3.$$

Заменом релација (3.2.5) и (3.2.6) у релацији (3.2.3), добијамо да Дарбуов бивектор Френеовог репера гласи

$$(3.2.7) \quad D = -\kappa_1 E_{TN} + \kappa_2 E_{B_1B_2} + \kappa_3 E_{NB_1}.$$

Према томе, Френеове кривине

$$\kappa_1 = D \cdot E_{TB_2} = 1, \quad \kappa_2 = D \cdot E_{NB_1}, \quad \kappa_3 = D \cdot E_{B_1B_2}$$

псеудо нул криве α се могу интерпретирати као површине пројекција Дарбуовог бивектора D на светлосне 2-равни $\text{span}\{T, N\}$, $\text{span}\{B_1, B_2\}$ и $\text{span}\{N, B_1\}$ редом. Применом релација (3.1.1), (3.2.2) и (3.2.7), налазимо да је

$$D^2 = D \cdot D = 2\kappa_2\kappa_3.$$

Пошто је $\kappa_2(s) \neq 0$ за свако s , Дарбуов бивектор D је светлосни ако и само ако је трећа Френеова кривина $\kappa_3(s) = 0$. Ако је $\kappa_3(s) \neq 0$, он је просторни или временски.

У наставку ћемо посматрати Бишовов репер $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ псеудо нул криве α . Аналогно, помоћу овог репера добијамо шест базних бивектора

$$\begin{aligned} E_{N_0N_1} &= N_0 \wedge N_1, & E_{N_0N_2} &= N_0 \wedge N_2, & E_{N_0N_3} &= N_0 \wedge N_3, \\ E_{N_1N_2} &= N_1 \wedge N_2, & E_{N_1N_3} &= N_1 \wedge N_3, & E_{N_2N_3} &= N_2 \wedge N_3, \end{aligned}$$

који имају јединичну површину или површину једнаку нули. Они су такође паралелни одговарајућим 2-равнима.

Отуда Дарбуов бивектор $\tilde{D}$ Бишововог репера можемо написати у облику

$$(3.2.8) \quad \tilde{D} = \tilde{a}E_{N_0N_1} + \tilde{b}E_{N_0N_2} + \tilde{c}E_{N_0N_3} + \tilde{d}E_{N_1N_2} + \tilde{f}E_{N_1N_3} + \tilde{h}E_{N_2N_3},$$

где су $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$, $\tilde{f}$ и $\tilde{h}$ површине пројекција бивектора $\tilde{D}$ на одговарајуће 2-равни. Помоћу релација (3.1.1), (3.1.2), (3.2.1) и (3.2.8) добијамо да је једначина Дарбуовог бивектора облика

$$(3.2.9) \quad \tilde{D} = \sigma_1 E_{N_0N_1} + \sigma_2 E_{N_2N_3} + \sigma_3 E_{N_1N_3}.$$

Дакле, Бишопове кривине

$$\sigma_1 = \tilde{D} \cdot E_{N_1N_0}, \quad \sigma_2 = \tilde{D} \cdot E_{N_1N_2}, \quad \sigma_3 = \tilde{D} \cdot E_{N_1N_3},$$

псеудо нул криве α се могу интерпретирати као површине пројекција бивектора $\tilde{D}$ на равни $\text{span}\{N_0, N_1\}$, $\text{span}\{N_2, N_3\}$ и $\text{span}\{N_1, N_3\}$, редом. На основу релација (3.2.2), (3.1.3) и (3.2.9) имамо да је

$$\tilde{D}^2 = \tilde{D} \cdot \tilde{D} = \sigma_3^2.$$

Одавде следи да је Дарбуов бивектор $\tilde{D}$ светлосни ако и само ако је трећа Бишовова кривина $\sigma_3(s) = 0$. Ако је $\sigma_3(s) \neq 0$, Дарбуов бивектор $\tilde{D}$ је временски. Приметимо да Дарбуови бивектори D и $\tilde{D}$ не могу оба бити светлосни. Наиме, ако је $\kappa_3(s) = \sigma_3(s) = 0$, тада на основу релација (3.1.7) и (3.1.8) следи $\theta'(s) = 0$, што је контрадикција.

3.3 Бишовов репер парцијално нул криве у $\mathbb{E}_1^4$

У овом поглављу ћемо представити оригиналне резултате дисертације који се одnose на добијање Бишововог репера парцијално нул криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$, а који су публиковани у референци [13]. Доказаћемо да парцијално нул

крива има три Бишопова репера који су одређени партикуларним решењима нелинеарне диференцијалне једначине трећег реда. Такође ћемо показати да се Френеов репер поменуте криве може добити ротацијом Бишоповог репера који одговара партикуларном решењу $\theta(s) = \int \kappa_1(s)ds$, при чему је $\kappa_1(s)$ прва Френеова кривина криве.

Присетимо се да је парцијално нул крива просторна крива која лежи у светлосној хиперравни простора $\mathbb{E}_1^4$ и има трећу Френеову кривину $\kappa_3(s) = 0$ у свакој тачки. Њен Френеов репер $\{T, N, B_1, B_2\}$ задовољава услове

$$(3.3.1) \quad \begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle N, N \rangle = 1, & \langle B_1, B_1 \rangle &= \langle B_2, B_2 \rangle = 0, \\ \langle T, N \rangle &= \langle T, B_1 \rangle = \langle T, B_2 \rangle = \langle N, B_1 \rangle = \langle N, B_2 \rangle = 0, & \langle B_1, B_2 \rangle &= 1, \\ \langle T, N \times B_1 \times B_2 \rangle &= \det(T, N, B_1, B_2) = 1. \end{aligned}$$

На основу једначина Френеовог репера парцијално нул криве ([81])

$$(3.3.2) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & -\kappa_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

слиеди да су векторска поља T', B_1' и B_2' колинеарна са векторским пољем главне нормале N у свакој тачки криве, што значи да минимално ротирају у хиперравнима $T^\perp = \text{span}\{N, B_1, B_2\}$, $B_1^\perp = \text{span}\{T, N, B_1\}$ и $B_2^\perp = \text{span}\{T, N, B_2\}$ редом. Зато можемо рећи да Френеов репер парцијално нул криве има својство *минималне ротације*. Показаћемо да таква крива има нови репер са истим својством.

У том циљу, нека је α парцијално нул крива у простор-времену Минковског параметризована дужином лука s . Означимо са $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ нови репер дуж криве α , који задовољава услове

$$(3.3.3) \quad \begin{aligned} \langle N_2, N_2 \rangle &= \langle N_3, N_3 \rangle = 0, & \langle N_0, N_0 \rangle &= \langle N_1, N_1 \rangle = \langle N_2, N_3 \rangle = 1, \\ \langle N_0, N_1 \rangle &= \langle N_0, N_2 \rangle = \langle N_0, N_3 \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle = \langle N_1, N_3 \rangle = 0, \end{aligned}$$

при чему је $N_3 = B_2$ и

$$(3.3.4) \quad \langle N_0, N_1 \times N_2 \times N_3 \rangle = \det(N_0, N_1, N_2, N_3) = 1.$$

Следећом дефиницијом ћемо увести *релативно паралелна векторска поља*.

Дефиниција 3.3.1. За векторска поља N_0, N_1 и N_2 дуж парцијално нул криве α у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ која задовољавају услове (3.3.3) и (3.3.4) кажемо да су *релативно паралелна*, ако су њихови изводи по параметру дужине лука колинеарни са векторским пољем N_2 у свакој тачки криве.

На основу дефиниције 3.3.1 слиеди да векторска поља N_0', N_1' и N_2' минимално ротирају у хиперравнима $N_0^\perp = \text{span}\{N_1, N_2, N_3\}$, $N_1^\perp = \text{span}\{N_0, N_2, N_3\}$ и $N_2^\perp = \text{span}\{N_0, N_1, N_2\}$ респективно.

Дефиниција 3.3.2. Бишопов репер парцијално нул криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ је позитивно оријентисани псеудо-ортонормирани репер $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ који садржи векторско поље друге бинормале $N_3 = B_2$ и три релативно паралелна векторска поља N_0, N_1 и N_2 која задовољавају услове (3.3.3) и (3.3.4).

Следећом дефиницијом уводимо кривине парцијално нул криве у односу на њен Бишов репер.

Дефиниција 3.3.3. Нека је α парцијално нул крива у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ параметризована дужином лука s са Бишовим репером $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$. Тада се функције

$$(3.3.5) \quad \sigma_1(s) = -\langle N'_0(s), N_3(s) \rangle, \quad \sigma_2(s) = -\langle N'_1(s), N_3(s) \rangle, \quad \sigma_3(s) = -\langle N'_2(s), N_3(s) \rangle$$

називају *прва, друга и трећа Бишопова кривина* криве α редом.

У наставку ћемо извести једначине Бишовог репера парцијално нул криве. Аналогне једначине Бишових репера других врста кривих у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$, могу се наћи у радовима [14, 22, 36].

Теорема 3.3.1. Ако је α парцијално нул крива у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ са Бишовим репером $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$, тада су једначине тог репера облика

$$(3.3.6) \quad \begin{bmatrix} N'_0(s) \\ N'_1(s) \\ N'_2(s) \\ N'_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sigma_1(s) & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_2(s) & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3(s) & 0 \\ \sigma_1(s) & \sigma_2(s) & 0 & \sigma_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0(s) \\ N_1(s) \\ N_2(s) \\ N_3(s) \end{bmatrix},$$

при чему су σ_1, σ_2 и σ_3 Бишопове кривине криве α .

Доказ. Претпоставимо да је α парцијално нул крива параметризована дужином лука s са Бишовим репером $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$. Пошто је N_0 релативно паралелно векторско поље, према дефиницији 3.3.1, имамо да је

$$(3.3.7) \quad N'_0(s) = c_0(s)N_2(s),$$

где је $c_0(s)$ произвољна диференцијабилна функција. Помоћу релација (3.3.3), (3.3.5) и (3.3.7), налазимо да је

$$\langle N'_0(s), N_3(s) \rangle = c_0(s) = -\sigma_1(s).$$

Заменом последње релације у (3.3.7), добијамо да је

$$(3.3.8) \quad N'_0(s) = -\sigma_1(s)N_2(s).$$

На сличан начин, налазимо да је

$$(3.3.9) \quad \begin{aligned} N'_1(s) &= -\sigma_2(s)N_2(s), \\ N'_2(s) &= -\sigma_3(s)N_2(s), \\ N'_3(s) &= \sigma_1(s)N_0(s) + \sigma_2(s)N_1(s) + \sigma_3(s)N_3(s). \end{aligned}$$

Према томе, релације (3.3.8) и (3.3.9) имплицирају релацију (3.3.6). $\square$

Следећа теорема даје релацију између Бишовог и Френеовог репера, као и релацију између одговарајућих функција кривине. Аналогне релације за друге врсте кривих у простору $\mathbb{E}_1^4$, добијене су у радовима [14, 22, 36].

Теорема 3.3.2. Нека је α парцијално нул крива у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ параметризована дужином лука s , са Френеовим кривинама $\kappa_1(s) \neq 0$, $\kappa_2(s) \neq 0$, $\kappa_3(s) = 0$ и Бишоповим кривинама $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$ и $\sigma_3(s)$.

(i) Тада су Бишопове кривине криве α су облика

$$(3.3.10) \quad \begin{aligned} \sigma_1(s) &= \kappa_2(s) \cos \theta(s), \\ \sigma_2(s) &= \kappa_2(s) \sin \theta(s), \\ \sigma_3(s) &= \frac{\kappa_2(s)}{\theta'(s)} \left(\frac{\kappa_1(s) - \theta'(s)}{\kappa_2(s)} \right)', \end{aligned}$$

при чему функција $\theta(s) \neq \text{constant}$ задовољава нелинеарну диференцијалну једначину трећег реда

$$(3.3.11) \quad \left(\frac{1}{\theta'(s)} \left(\frac{\kappa_1(s) - \theta'(s)}{\kappa_2(s)} \right)' \right)' = \frac{\theta'^2(s) - \kappa_1^2(s)}{2\kappa_2(s)} - \frac{\kappa_2(s)}{2\theta'^2(s)} \left(\frac{\kappa_1(s) - \theta'(s)}{\kappa_2(s)} \right)'^2;$$

(ii) Релација између Бишоповог и Френеовог репера гласи

$$\begin{aligned} N_0 &= -\sin \theta T - \cos \theta N + \left[\sin \theta \left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right) - \cos \theta \left(\frac{1}{\theta'} \left(\frac{\kappa_1 - \theta'}{\kappa_2} \right)' \right) \right] B_2, \\ N_1 &= \cos \theta T - \sin \theta N - \left[\cos \theta \left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right) + \sin \theta \left(\frac{1}{\theta'} \left(\frac{\kappa_1 - \theta'}{\kappa_2} \right)' \right) \right] B_2, \\ N_2 &= \left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right) T + \frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right)' N + B_1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right)' \right)^2 \right] B_2, \\ N_3 &= B_2. \end{aligned}$$

Доказ. Претпоставимо да је $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ Бишопов репер парцијално нул криве α параметризоване дужином лука s . Диференцирањем једначине $N_3 = B_2$ по s и применом релација (3.3.2) и (3.3.6), налазимо да је

$$N'_3 = B'_2 = \sigma_1 N_0 + \sigma_2 N_1 + \sigma_3 N_3 = -\kappa_2 N.$$

Одавде је

$$(3.3.12) \quad N = -\frac{\sigma_1}{\kappa_2} N_0 - \frac{\sigma_2}{\kappa_2} N_1 - \frac{\sigma_3}{\kappa_2} N_3.$$

Применом услова $\langle N, N \rangle = 1$ и релација (3.3.3) и (3.3.12), добијамо да је

$$(3.3.13) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \kappa_2^2.$$

Можемо претпоставити да је

$$(3.3.14) \quad \sigma_1 = \kappa_2 \cos \theta, \quad \sigma_2 = \kappa_2 \sin \theta,$$

где је θ произвољна диференцијабилна функција по s . Сада ћемо посебно размотрити могуће случајеве **(А)** $\theta(s) = \theta_0 \in \mathbb{R}$ и **(Б)** $\theta(s) \neq \text{constant}$.

(А) $\theta(s) = \theta_0 \in \mathbb{R}$.

Помоћу релација $\theta(s) = \theta_0$, (3.3.12) и (3.3.14), добијамо да је

$$(3.3.15) \quad N = -\cos \theta_0 N_0 - \sin \theta_0 N_1 - \frac{\sigma_3}{k_2} N_3.$$

Тангентно векторско поље T можемо написати у облику

$$(3.3.16) \quad T = \lambda N_0 + \mu N_1 + \nu N_2 + \omega N_3,$$

при чему су λ , μ , ν и ω произвољне диференцијабилне функције по s . Релације (3.3.15), (3.3.16) и услови $\langle T, T \rangle = 1$, $\langle T, N \rangle = \langle T, B_2 \rangle = 0$ дају

$$(3.3.17) \quad \nu = 0, \quad -\lambda \cos \theta_0 - \mu \sin \theta_0 = 0, \quad \lambda^2 + \mu^2 = 1.$$

Решење претходног система једначина гласи

$$(3.3.18) \quad \lambda = -\sin \theta_0, \quad \mu = \cos \theta_0.$$

Заменом (3.3.18) и $\nu = 0$ у (3.3.16), добијамо да је

$$(3.3.19) \quad T = -\sin \theta_0 N_0 + \cos \theta_0 N_1 + \omega N_3.$$

На основу релација (3.3.2) и (3.3.15) следи

$$(3.3.20) \quad T' = \kappa_1 N = -\kappa_1 \left(\cos \theta_0 N_0 + \sin \theta_0 N_1 + \frac{\sigma_3}{\kappa_2} N_3 \right).$$

С друге стране, диференцирањем релације (3.3.19) по s и применом релација (3.3.6), (3.3.14) и (3.3.20), налазимо да је

$$(3.3.21) \quad T' = \omega \kappa_2 \cos \theta_0 N_0 + \omega \kappa_2 \sin \theta_0 N_1 + (\omega' + \omega \sigma_3) N_3.$$

Помоћу релација (3.3.20) и (3.3.21), добијамо да је

$$(3.3.22) \quad \omega = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2}, \quad -\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)' - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sigma_3 = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sigma_3,$$

Претходна релација имплицира

$$(3.3.23) \quad \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \text{constant}$$

што је контрадикција, јер Френеове кривине κ_1 и κ_2 криве α не задовољавају релацију (3.3.23) у општем случају.

(Б) $\theta(s) \neq \text{constant}$.

Заменом релације (3.3.14) у релацији (3.3.12), добијамо да је

$$(3.3.24) \quad N = -\cos \theta N_0 - \sin \theta N_1 - \frac{\sigma_3}{k_2} N_3.$$

Помоћу релација (3.3.2) и (3.3.24), налазимо да је

$$(3.3.25) \quad T' = \kappa_1 N = -\kappa_1 \left(\cos \theta N_0 + \sin \theta N_1 + \frac{\sigma_3}{k_2} N_3 \right).$$

Диференцирањем релације (3.3.24) по s добијамо да је

$$(3.3.26) \quad N' = (\theta' \sin \theta - \sigma_3 \cos \theta)N_0 - (\theta' \cos \theta + \sigma_3 \sin \theta)N_1 + \kappa_2 N_2 - \left(\left(\frac{\sigma_3}{\kappa_2} \right)' + \frac{\sigma_3^2}{\kappa_2} \right) N_3.$$

На основу релације (3.3.2), имамо да је

$$(3.3.27) \quad N' = -\kappa_1 T + \kappa_2 B_1.$$

Сада релације (3.3.1), (3.3.3), (3.3.26) и (3.3.27) имплицирају да је

$$\langle N', N' \rangle = \kappa_1^2 = \theta'^2 - \sigma_3^2 - 2\kappa_2 \left(\frac{\sigma_3}{\kappa_2} \right)'.$$

Отуда је

$$(3.3.28) \quad \left(\frac{\sigma_3}{\kappa_2} \right)' = \frac{1}{2\kappa_2} (\theta'^2 - \kappa_1^2 - \sigma_3^2).$$

Помоћу услова $\langle T, T \rangle = 1$, $\langle T, N \rangle = 0$, $\langle T, B_2 \rangle = 0$ и релације (3.3.24), налазимо да је

$$(3.3.29) \quad T = -\sin \theta N_0 + \cos \theta N_1 + dN_3,$$

где је d произвољна диференцијабилна функција по s . Диференцирањем релације (3.3.29) по s и применом (3.3.14), добијамо

$$(3.3.30) \quad T' = (-\theta' \cos \theta + d\kappa_2 \cos \theta)N_0 + (-\theta' \sin \theta + d\kappa_2 \sin \theta)N_1 + (d' + d\sigma_3)N_3.$$

Сада на основу релација (3.3.25) и (3.3.30), налазимо да је

$$(3.3.31) \quad d = \frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2}, \quad d' + d\sigma_3 = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sigma_3.$$

Дакле, трећа Бишопова кривина криве α се може написати у облику

$$(3.3.32) \quad \sigma_3 = \frac{\kappa_2}{\theta'} \left(\frac{\kappa_1 - \theta'}{\kappa_2} \right)'.$$

На основу релација (3.3.14) и (3.3.32) следи да важи релација (3.3.10). Заменом релације (3.3.32) у релацији (3.3.28), добијамо нелинеарну диференцијалну једначину (3.3.11), чиме је тврђење (i) доказано.

Да бисмо доказали тврђење (ii), помножићемо релацију (3.3.29) са $-\sin \theta$ и релацију (3.3.24) са $-\cos \theta$. Сабирањем добијених једначина и применом релација (3.3.31) и (3.3.32), налазимо да је

$$(3.3.33) \quad N_0 = -\sin \theta T - \cos \theta N + \left[\sin \theta \left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right) - \cos \theta \left(\frac{1}{\theta'} \left(\frac{\kappa_1 - \theta'}{\kappa_2} \right)' \right) \right] B_2.$$

Аналогно, множењем релације (3.3.29) са $\cos \theta$, релације (3.3.24) са $-\sin \theta$ и сабирањем добијених једначина, следи да је

$$(3.3.34) \quad N_1 = \cos \theta T - \sin \theta N - \left[\cos \theta \left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right) + \sin \theta \left(\frac{1}{\theta'} \left(\frac{\kappa_1 - \theta'}{\kappa_2} \right)' \right) \right] B_2.$$

Заменом релација (3.3.33) и (3.3.34) у релацији (3.3.26) и применом релације (3.3.27), добијамо да је

$$N_2 = \left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right) T + \frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right)' N + B_1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta' - \kappa_1}{\kappa_2} \right)' \right)^2 \right] B_2.$$

Последња релација заједно са релацијама (3.3.33) и (3.3.34) даје релацију између Бишовог и Френеовог репера, чиме је тврђење (ii) доказано. $\square$

Према теорему 3.3.2, свако партикуларно решење нелинеарне диференцијалне једначине (3.3.11) одређује Бишов репер и Бишове кривине парцијално нул криве α . Једноставним рачуном се може проверити да је $\theta(s) = \int \kappa_1(s) ds$ једно партикуларно решење те једначине, где је $k_1(s)$ прва Френеова кривина криве α . У општем случају, сва три партикуларна решења се не могу експлицитно изразити. У наредној теорему ћемо доказати да се Френеов репер криве α може добити ротацијом Бишовог репера који одговара партикуларном решењу $\theta(s) = \int k_1(s) ds$.

Теорема 3.3.3. Френеов репер парцијално нул криве α у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ са Френеовим кривинама $\kappa_1(s) \neq 0$, $\kappa_2(s) \neq 0$, $\kappa_3(s) = 0$, може се добити ротацијом Бишовог репера који одговара партикуларном решењу $\theta(s) = \int k_1(s) ds$ диференцијалне једначине (3.3.11), око временске равни $\text{span}\{N_2, N_3\}$ за хиперболички угао $\omega(s) = -\theta(s) - 90^\circ$.

Доказ. Претпоставимо да је α парцијално нул крива у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ са Френеовим кривинама $\kappa_1(s) \neq 0$, $\kappa_2(s) \neq 0$ и $\kappa_3(s) = 0$. Заменом партикуларног решења $\theta(s) = \int k_1(s) ds$ у релацији између Бишовог и Френеовог репера датој у теорему 3.3.2, добијамо да Бишов репер криве α гласи

$$\begin{aligned} N_0 &= -\sin \theta T - \cos \theta N, \\ N_1 &= \cos \theta T - \sin \theta N, \\ N_2 &= B_1, \\ N_3 &= B_2. \end{aligned} \tag{3.3.35}$$

На основу претходне релације имамо да је

$$\begin{aligned} T &= -\sin \theta N_0 + \cos \theta N_1, \\ N &= -\cos \theta N_0 - \sin \theta N_1, \\ B_1 &= N_2, \\ B_2 &= N_3. \end{aligned} \tag{3.3.36}$$

Дакле, Френеов репер се може добити ротацијом Бишовог репера око временске равни $\text{span}\{N_2, N_3\}$ за хиперболички угао $\omega(s) = -\theta(s) - 90^\circ$. $\square$

ПРИМЕР 3.3.1. Уочимо парцијално нул хелису α у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ са параметарском једначином

$$\alpha(s) = (\sin(s) + \cos(s) - 2s, \sin(s) + \cos(s) - 2s, \cos(s), \sin(s)).$$

Њене Френеове кривине гласе

$$(3.3.37) \quad \kappa_1(s) = 1, \quad \kappa_2(s) = -2, \quad \kappa_3(s) = 0,$$

а Френеов репер је облика

$$\begin{aligned} T(s) &= (\cos(s) - \sin(s) - 2, \cos(s) - \sin(s) - 2, -\sin(s), \cos(s)), \\ N(s) &= (-\sin(s) - \cos(s), -\sin(s) - \cos(s), -\cos(s), -\sin(s)), \\ B_1(s) &= (1, 1, 0, 0), \\ B_2(s) &= (2\cos(s) - 2\sin(s) - \frac{7}{2}, 2\cos(s) - 2\sin(s) - \frac{5}{2}, -2\sin(s) - 1, 2\cos(s) - 1). \end{aligned}$$

Заменом (3.3.37) у (3.3.11), добијамо нелинеарну диференцијалну једначину трећег реда

$$(3.3.38) \quad -2\theta'\theta''' + 3\theta''^2 - \theta'^2(\theta'^2 - 1) = 0.$$

Увођењем смене $\theta'(s) = t(s)$, где је $t(s)$ произвољна диференцијабилна функција, претходна диференцијална једначина се своди на диференцијалну једначину

$$-2tt'' + 3t'^2 - t^2(t^2 - 1) = 0.$$

Увођењем нове смене $t'(s) = p(s)$, где је $p(s)$ произвољна диференцијабилна функција, последња диференцијална једначина се своди на Бернулијеву диференцијалну једначину првог реда, а затим на линеарну диференцијалну једначину првог реда. Једноставним рачуном добијамо да диференцијална једначина (3.3.38) има три партикуларна решења $\theta(s) = s$, $\theta(s) = -s$ и

$$(3.3.39) \quad \theta(s) = 2 \arctan \left(\sqrt{5} \tan\left(\frac{s}{2}\right) - 2 \right).$$

Помоћу релација $\theta(s) = -s$, (3.3.10) и (3.3.37), налазимо да су Бишопове кривине криве α облика

$$\sigma_1(s) = -2\cos(s), \quad \sigma_2(s) = 2\sin(s), \quad \sigma_3(s) = 0.$$

Према томе, Бишопов репер који одговара партикуларном решењу $\theta(s) = -s$, гласи

$$(3.3.40) \quad \begin{aligned} N_0(s) &= \sin(s)T(s) - \cos(s)N(s) - \sin(s)B_2(s), \\ N_1(s) &= \cos(s)T(s) + \sin(s)N(s) - \cos(s)B_2(s), \\ N_2(s) &= T(s) + B_1(s) - \frac{1}{2}B_2(s), \\ N_3(s) &= B_2(s). \end{aligned}$$

Заменом другог партикуларног решења $\theta(s) = s$ у релацији (3.3.10) и применом (3.3.37), добијамо Бишопове кривине

$$\sigma_1(s) = -2\cos s, \quad \sigma_2(s) = -2\sin s, \quad \sigma_3(s) = 0.$$

У овом случају, Бишов репер

$$\begin{aligned}
 (3.3.41) \quad N_0(s) &= -\sin(s)T(s) - \cos(s)N(s), \\
 N_1(s) &= \cos(s)T(s) - \sin(s)N(s), \\
 N_2(s) &= B_1(s), \\
 N_3(s) &= B_2(s),
 \end{aligned}$$

који одговара партикуларном решењу $\theta(s) = s$, је добијен ротацијом Френеовог репера око временске равни $\text{span}\{B_1, B_2\}$. Заменом трећег партикуларног решења (3.3.39) у релацији (3.3.10) и применом (3.3.37), налазимо да су Бишопове кривине криве α облика

$$\begin{aligned}
 \sigma_1(s) &= -2 \cos(2 \arctan(\sqrt{5} \tan(\frac{s}{2}) - 2)), \\
 \sigma_2(s) &= -2 \sin(2 \arctan(\sqrt{5} \tan(\frac{s}{2}) - 2)), \\
 \sigma_3(s) &= \frac{2 \cos s}{2 \sin s - \sqrt{5}}.
 \end{aligned}$$

У овом случају, Бишов репер криве α гласи

$$\begin{aligned}
 N_0 &= -\sin \theta T - \cos \theta N + \left[\sin \theta \left(\frac{1 - \theta'}{2} \right) - \cos \theta \left(\frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta' - 1}{2} \right)' \right) \right] B_2, \\
 N_1 &= \cos \theta T - \sin \theta N - \left[\cos \theta \left(\frac{1 - \theta'}{2} \right) + \sin \theta \left(\frac{1}{\theta'} \left(\frac{\theta' - 1}{2} \right)' \right) \right] B_2, \\
 N_2 &= \left(1 - \frac{\theta'}{2} \right) T + \frac{1}{\theta'} \left(\frac{1 - \theta'}{2} \right)' N + B_1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 - \theta'}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\theta'} \left(\frac{1 - \theta'}{2} \right)' \right)^2 \right] B_2, \\
 N_3 &= B_2
 \end{aligned}$$

при чему је функција $\theta(s)$ дата релацијом (3.3.39). Сва три добијена Бишопова репера задовољавају једначине (3.3.6), што се може непосредно проверити.

3.4 Светлосна хиперповрш и светлосна фокална површ

Светлосне хиперповрши у простору Минковског $\mathbb{E}_1^n$ су хиперповрши са позитивно семи-дефинитном првом фундаменталном формом. Оне су тангентне на светлосни конус у свакој регуларној тачки и представљају моделе за различите врсте хоризонта у теорији квантне гравитације. Њихови *сингуларитети*, тј. *критичне вредности* дуж просторне подмногострукости, класификовани су у референцама [44, 45]. Скуп свих сингуларних тачака на светлосној хиперповрши дуж њене просторне подмногострукости, назива се *светлосни фокални скуп*. У референци [45] су проучаване светлосне хиперповрши и светлосне фокалне површи дуж просторне криве са ненул главном нормалом у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$. У овом поглављу ћемо описати светлосне хиперповрши и светлосне фокалне површи дуж парцијално нул

криве у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ користећи њен Бишов репер добијен ротацијом Френеовог репера. Такође ћемо доказати да светлосна фокална површ дуж парцијално нул хелисе нема сингуларних тачака.

У раду [45] је доказано да је слика светлосне хиперповрши дуж просторне криве γ независна од избора јединичног нормалног временског векторског поља усмереног ка будућности дуж те криве. Аналогна особина важи за слику светлосне хиперповрши дуж парцијално нул криве. У том циљу, уочимо јединично нормално временско векторско поље дуж парцијално нул криве α , усмерено ка будућности

$$(3.4.1) \quad n^T = \frac{\sqrt{2}}{2}(B_1 - B_2),$$

где су B_1 и B_2 векторска поља прве и друге бинормале. Означимо са

$$\alpha^\perp = \{V \in \mathbb{E}_1^4 \mid \langle \alpha', V \rangle = 0\}$$

3-димензиони *псеудо-нормални простор* криве α . Дводимензиона јединична псеудосфера у односу на n^T је дата изразом

$$N_1(\alpha)_p[n^T] = \{\xi \in \alpha^\perp \mid \langle \xi, n^T(p) \rangle = 0, \quad \langle \xi, \xi \rangle = 1\}.$$

Гаусова слика псеудосфере $N_1(\alpha)_p[n^T]$ на светлосном конусу, има параметризацију облика

$$(3.4.2) \quad LG[n^T](s, \phi) = n^T(s) + \cos \phi N(s) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \phi (B_1(s) + B_2(s)).$$

Параметризација светлосне хиперповрши

$$LH_\alpha(n^T) : N_1(\alpha)_p[n^T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^4$$

дуж просторне криве α у односу на n^T , гласи ([45])

$$(3.4.3) \quad LH_\alpha((s, \phi), t) = \alpha(s) + tLG[n^T](s, \phi).$$

У следећој теореме ћемо добити параметризацију светлосне хиперповрши дуж парцијално нул криве у терминима векторских поља Бишовог вектора који се добија ротацијом Френеовог репера.

Теорема 3.4.1. Нека је α парцијално нул крива у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ са Бишовим репером (3.3.35). Тада светлосна хиперповрш дуж криве α има параметризацију облика

$$(3.4.4) \quad \begin{aligned} LH_\alpha((s, \phi), t) = \alpha(s) &+ t \left[-\cos \phi \cos \theta N_0(s) - \cos \phi \sin \theta N_1(s) \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sin \phi)N_2(s) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \phi - 1)N_3(s) \right], \end{aligned}$$

при чему је $\theta(s) = \int \kappa_1(s) ds$ и $\kappa_1(s)$ прва Френеова кривина криве α .

Доказ. Помоћу релација (3.4.1), (3.4.2) и (3.4.3), налазимо да светлосна хиперповрш дуж парцијално нул криве α у односу на n^T има параметризацију облика

$$(3.4.5) \quad \begin{aligned} LH_\alpha((s, \phi), t) = \alpha(s) &+ t \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (B_1(s) - B_2(s)) + \cos \phi N(s) \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \phi (B_1(s) + B_2(s)) \right]. \end{aligned}$$

Заменом релације (3.3.36) у релацији (3.4.5), добијамо параметризацију (3.4.4). $\square$

У наставку ћемо одредити параметризацију светлосне фокалне површи LF_α дуж парцијално нул криве α . Та површ представља скуп критичних вредности светлосне хиперповрши LH_α . У том циљу, најпре ћемо дефинисати *функцију квадрата Лоренцовог растојања* $G : I \times \mathbb{E}_1^4 \rightarrow \mathbb{R}$ дуж парцијално нул криве α на следећи начин:

$$G(p, \lambda) = G(s, \lambda) = \langle \alpha(s) - \lambda, \alpha(s) - \lambda \rangle,$$

при чему $\lambda \in \mathbb{E}_1^4$ и $p = \alpha(s)$.

У раду [45] је доказано да *дискриминантни скуп* реда 2 функције $G(p, \lambda)$ дуж просторне криве γ , дефинисан са

$$D_G^2 = \{\lambda \in \mathbb{E}_1^4 \mid \exists s \in I, G(s, \lambda) = \frac{\partial G}{\partial s}(s, \lambda) = \frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(s, \lambda) = 0\}.$$

представља светлосну фокалну површ LF_γ . За фиксно $\lambda = \lambda_0$, уведемо ознаку $G(p, \lambda_0) = g(p)$. Израчунавањем првог и другог извода функције $g(p)$ по s , добијамо

$$(3.4.6) \quad \begin{aligned} g'(p) &= 2\langle \alpha'(s), \alpha(s) - \lambda_0 \rangle, \\ g''(p) &= 2(\langle \alpha''(s), \alpha(s) - \lambda_0 \rangle + 1). \end{aligned}$$

Помоћу једнакости (3.4.6) у наредној теореми ћемо одредити параметризацију светлосне фокалне површи дуж парцијално нул криве α .

Теорема 3.4.2. Нека је α парцијално нул крива у простор-времену Минковског $\mathbb{E}_1^4$ са Бишовим репером (3.3.35). Тада светлосна фокална површ дуж криве α има параметризацију облика

$$(3.4.7) \quad \begin{aligned} LF_\alpha(s, \phi) = \alpha(s) &+ \frac{\sqrt{2}}{2\theta' \cos \phi} [-\sqrt{2} \cos \phi \cos \theta N_0(s) - \sqrt{2} \cos \phi \sin \theta N_1(s) \\ &+ (1 + \sin \phi) N_2(s) + (\sin \phi - 1) N_3(s)], \end{aligned}$$

при чему је $\cos \phi \neq 0$ и $\theta'(s) = \kappa_1(s) \neq 0$.

Доказ. Нека је λ_0 фиксна тачка на светлосној хиперповрши са параметризацијом (3.4.4). Тада је

$$\lambda_0 = \alpha(s) + t \left[\frac{B_1(s) - B_2(s)}{\sqrt{2}} + \cos \phi N(s) + \sin \phi \left(\frac{B_1(s) + B_2(s)}{\sqrt{2}} \right) \right].$$

Претходна релација даје

$$(3.4.8) \quad \alpha(s) - \lambda_0 = -t \left[\frac{B_1(s) - B_2(s)}{\sqrt{2}} + \cos \phi N(s) + \sin \phi \left(\frac{B_1(s) + B_2(s)}{\sqrt{2}} \right) \right].$$

Заменом релација (3.4.8) и $\alpha''(s) = \kappa_1(s)N(s) = \theta'(s)N(s)$ у (3.4.6) и применом релације (3.3.1), добијамо

$$g''(p) = 2(1 - t\theta'(s) \cos \phi).$$

Према томе, $g''(p) = 0$ ако и само ако је

$$(3.4.9) \quad t = \frac{1}{\theta'(s) \cos \phi},$$

где је $\theta'(s) = \kappa_1(s) \neq 0$ и $\cos \phi \neq 0$. Заменом релације (3.4.9) у релацији (3.4.5) добијамо параметризацију светлосне фокалне површи

$$LF_\alpha(s, \phi) = \alpha(s) + \frac{\sqrt{2}}{2\theta'(s) \cos \phi} [B_1(s) - B_2(s) + \sqrt{2} \cos \phi N(s) + \sin \phi (B_1(s) + B_2(s))].$$

Заменом релације (3.3.36) у претходној релацији добијамо параметризацију светлосне фокалне површи (3.4.7). $\square$

У референци [45] је доказано да дискриминантни скуп реда 3 функције $G(p, \lambda)$ представља скуп сингуларних тачака светлосне фокалне површи дуж просторне криве у простору $\mathbb{E}_1^4$. У следећој теорему ћемо аналогно доказати да светлосна фокална површ $LF_\alpha(s, \phi)$ дуж парцијално нул хелисе, нема скуп сингуларних тачака.

Теорема 3.4.3. Нека је α парцијално нул хелиса у простору $\mathbb{E}_1^4$ са Бишовим репером (3.3.35). Тада светлосна фокална површ дуж криве α нема скуп сингуларних тачака.

Доказ. Претпоставимо да је α парцијално нул хелиса. Диференцирањем релације (3.4.6) по s , налазимо да је

$$g'''(p) = \frac{\sqrt{2}\kappa_2(s)(1 - \sin \phi)}{\cos \phi},$$

где је $\cos \phi \neq 0$. Тада је $g'''(p) = 0$ ако и само ако је $\sin \phi = 1$. Претходна једнакост имплицира $\cos \phi = 0$, што је контрадикција. $\square$

4 Уопштени Дарбуов репер криве у простору $\mathbb{E}_1^3$

Геометријске особине криве која лежи на светлосној површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$, могу изразити помоћу њене геодезијске кривине, нормалне кривине и геодезијске торзије, које су одређене векторским пољима Дарбуовог репера ([54, 70, 78]). Познато је да Дарбуов репер има кључну улогу у дефинисању специјалних врста кривих на површима ([60, 66, 41]). Осим тога, Дарбуов репер има и друге бројне примене, на пример у карактеризацији просторних искошених хелиса типа k ([70]) и псеудо-сферних Дарбуових слика кривих ([83, 84, 88]), у проучавању уопштених фокалних површи просторних кривих ([55]), у добијању релација између псеудо-сферних нормалних Дарбуових слика просторних кривих и светлосних површи дуж тих кривих ([42]), итд.

У овом поглављу ћемо показати да постоји општији начин да се дефинише Дарбуов репер криве на датој површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$. Притом ћемо посматрати просторну и псеудо нул криву на светлосној површи и нул Картанову криву на временској површи. У сваком од поменутих случајева, дефинисаћемо *уопштени Дарбуов репер криве* који се у посебном случају своди на њен Дарбуов репер. Прецизније, дефинисаћемо *уопштени Дарбуов репер прве врсте*, чија су векторска поља изражена помоћу функција λ и μ , које представљају решење одговарајуће Рикатијеве и линеарне диференцијалне једначине првог реда. Такође ћемо дефинисати *уопштени Дарбуов репер друге врсте*, који се добија ротацијом Дарбуовог репера за одговарајући хиперболички угао.

4.1 Уопштени Дарбуов репер просторне криве

Светлосне (нул, дегенеративне) подмногострукости представљају математичке моделе неких основних појмова у теорији физике, посебно у Ајнштајновој општој теорији релативности. На пример, светлосне подмногострукости имају важну улогу у испитивању коначног, Кошијевог и Крускаловог хоризонта, а нул геодезијским линијама су понекад представљене путање честица без тежине. Основна особина нул подмногострукости која их разликује од семи-Риманових многострукости се огледа у томе да њихов нормални сноп сече тангентни сноп, при чему је индукована метрика на подмногострукости дегенеративна ([20]). Неке карактеризације светлосних површи и хиперповрши могу се наћи у референцама ([5, 40, 63]). Просторне површи имерзоване у нул хиперповрши су од значаја у космологији и теорији сингуларитета ([76]).

У овом одељку ћемо изложити оригиналне резултате дисертације који су публиковани у раду [16], а који се односе на дефинисање *уопштеног Дарбуовог репера прве и друге врсте* просторне криве α са не-нул главном нормалом, која лежи на светлосној површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$. У оквиру поменутих резултата ћемо увести кривине криве α у односу на уопштени Дарбуов репер и помоћу њих добити једначине репера. Показаћемо да такав репер постоји дуж просторне праве линије на преносној површи која није светлосна, а која садржи скуп светлосних тачака. Дефинисаћемо светлосне преносне површи на којима су тангентна и бинормална индикатриса нул Картанове криве просторне линије кривине и навести одговарајуће примере.

У том циљу, присетимо се да Френеов репер $\{T, N, B\}$ просторне криве α са не-нул главном нормалом у простору $\mathbb{E}_1^3$ задовољава услове ([81])

$$(4.1.1) \quad \langle T, T \rangle = 1, \quad \langle N, N \rangle = -\langle B, B \rangle = \epsilon = \pm 1, \quad \langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0,$$

$$(4.1.2) \quad T \times N = -\epsilon B, \quad N \times B = T, \quad B \times T = \epsilon N.$$

У овом случају, једначине Френеовог репера гласе ([52])

$$(4.1.3) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\epsilon \tau \\ 0 & -\epsilon \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

где су κ и τ кривина и торзија криве α , респективно.

Према дефиницији, површ у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ је *светосна* (нул, дегенеративна), ако је тангентна раван у свакој регуларној тачки површи светлосна ([20, 42]). Посебно, тачка (u_0, t_0) на светлосној површи са параметризацијом $x(u, t)$ је *регуларна*, односно *сингуларна*, ако је $x_u \times x_t|_{(u_0, t_0)} \neq 0$ односно $x_u \times x_t|_{(u_0, t_0)} = 0$.

Дарбуов репер $\{T, \zeta, \eta\}$ просторне криве α са не-нул главном нормалом на светлосној површи са параметризацијом $x(u, t)$ је псеудо-ортонормирани репер кога чини просторно тангентно векторско поље $T = \alpha'$, нул нормално векторско поље

$$\eta = x_u \times x_t|_{\alpha}$$

и нул векторско поље ζ тако да су задовољени услови ([70])

$$(4.1.4) \quad \langle T, T \rangle = 1, \quad \langle \eta, \eta \rangle = \langle \zeta, \zeta \rangle = \langle T, \zeta \rangle = \langle T, \eta \rangle = 0, \quad \langle \zeta, \eta \rangle = \epsilon_1 = \pm 1,$$

$$(4.1.5) \quad T \times \zeta = \epsilon_1 \eta, \quad \zeta \times \eta = T, \quad \eta \times T = \epsilon_1 \zeta.$$

Стога једначине Дарбуовог репера гласе ([70])

$$(4.1.6) \quad \begin{bmatrix} T' \\ \zeta' \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 k_n & \epsilon_1 k_g \\ -k_g & \epsilon_1 \tau_g & 0 \\ -k_n & 0 & -\epsilon_1 \tau_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix},$$

где су k_n , k_g и τ_g нормална кривина, геодезијска кривина и геодезијска торзија криве α редом. Крива α се назива *геодезијска линија*, *асимптотска линија* и *линија кривине*, ако је редом $k_g(s) = 0$, $k_n(s) = 0$ и $\tau_g(s) = 0$ редом за свако s .

У циљу краће формулације, у свим дефиницијама и теоремама које следе у овом одељку нека α означава просторну криву параметризовану дужином лука s са не-нул главном нормалом на светлосној површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$. Крива α може бити геодезијска, асимптотска или линија кривине. Ако је α права линија, на основу релација (4.1.3) и (4.1.6) следи

$$T'(s) = \epsilon_1 k_n \zeta + \epsilon_1 k_g \eta = 0.$$

Отуда је $k_n(s) = k_g(s) = 0$. С друге стране, ако је $\kappa(s) \neq 0$ за свако s , помоћу релација (4.1.3) и (4.1.6) добијамо да је

$$T' = \epsilon \kappa N = \epsilon_1 k_n \zeta + \epsilon_1 k_g \eta.$$

Претходна једнакост и услов $\langle N, N \rangle = \epsilon = \pm 1$ имплицирају да је

$$\langle T', T' \rangle = \epsilon \kappa^2 = 2\epsilon_1 k_n k_g \neq 0.$$

Одавде је $k_n(s) \neq 0$ и $k_g(s) \neq 0$ за свако s , чиме је доказана следећа теорема.

Теорема 4.1.1. Крива α је геодезијска и асимптотска линија ако и само ако је права.

Да бисмо показали да постоји општији начин да се уведе Дарбуов репер дуж криве α , скалираћемо векторско поље η , тј. нул нормално векторско поље површи дуж криве α , тако да је

$$(4.1.7) \quad \tilde{\eta}(s) = \mu(s)\eta(s),$$

при чему је $\mu(s) \neq 0$ произвољна диференцијабилна функција. Претпоставимо да постоји нови репер $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ криве α који садржи векторско поље $\tilde{\eta}$ дато релацијом (4.1.7) и задовољава услове

$$(4.1.8) \quad \langle \tilde{T}, \tilde{T} \rangle = 1, \quad \langle \tilde{T}, \tilde{\zeta} \rangle = \langle \tilde{T}, \tilde{\eta} \rangle = \langle \tilde{\zeta}, \tilde{\zeta} \rangle = \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\zeta}, \tilde{\eta} \rangle = \epsilon_2 = \pm 1,$$

$$(4.1.9) \quad \tilde{T} \times \tilde{\zeta} = \epsilon_2 \tilde{\eta}, \quad \tilde{\zeta} \times \tilde{\eta} = \tilde{T}, \quad \tilde{\eta} \times \tilde{T} = \epsilon_2 \tilde{\eta}.$$

Псеудо-ортонормирани репер $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ криве α који задовољава услове (4.1.7)-(4.1.9) представља *уопштење њеног Дарбуовог репера*. Наиме, постоје два таква репера, које ћемо увести наредним двома дефиницијама.

Дефиниција 4.1.1. Уопштени Дарбуов репер прве врсте криве α је репер $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ облика

$$(4.1.10) \quad \begin{aligned} \tilde{T}(s) &= T(s) + \lambda(s)\eta(s), \\ \tilde{\zeta}(s) &= -\epsilon_2 \frac{\lambda(s)}{\mu(s)} T(s) + \frac{1}{\mu(s)} \zeta(s) - \epsilon_2 \frac{\lambda^2(s)}{2\mu(s)} \eta(s), \\ \tilde{\eta}(s) &= \mu(s)\eta(s), \end{aligned}$$

где је $\lambda(s) \neq 0$ диференцијабилна функција која задовољава Рикатијеву диференцијалну једначину

$$(4.1.11) \quad 2\epsilon_2 \lambda'(s) - 2\lambda(s)\tau_g(s) + \epsilon_2 \lambda^2(s)k_n(s) = 0,$$

а $\mu(s) \neq 0$ диференцијабилна функција која задовољава линеарну диференцијалну једначину

$$(4.1.12) \quad \mu'(s) + \mu(s)\lambda(s)k_n(s) = 0.$$

Дефиниција 4.1.2. Уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α је репер $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ облика

$$(4.1.13) \quad \begin{aligned} \tilde{T}(s) &= T(s), \\ \tilde{\zeta}(s) &= \frac{1}{\mu_0} \zeta(s), \\ \tilde{\eta}(s) &= \mu_0 \eta(s), \end{aligned}$$

где је μ_0 произвољан реалан број различит од нуле.

Према дефиницијама 4.1.1 и 4.1.2, уопштени Дарбуови репери (4.1.10) и (4.1.13) нису јединствени. Ако у релацији (4.1.10) важи $\lambda(s) = 0$ и $\mu(s) = 1$ за свако s , што смо искључили као могућност, векторска поља уопштеног Дарбуовог репера прве врсте се поклапају са векторским пољима Дарбуовог репера $\{T, \zeta, \eta\}$. Такође, ако у релацији (4.1.10) важи $\lambda(s) = 0$ за свако s , што смо такође искључили као могућност, уопштени Дарбуов репер прве врсте се поклапа са уопштеним Дарбуовим репером друге врсте.

Наредном дефиницијом уводимо кривине криве α у односу на њене уопштене Дарбуове репере прве и друге врсте.

Дефиниција 4.1.3. Нека је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер прве или друге врсте криве α . Кривине криве α дате формулама

$$(4.1.14) \quad \tilde{k}_n = \langle \tilde{T}', \tilde{\eta} \rangle, \quad \tilde{k}_g = \langle \tilde{T}', \tilde{\zeta} \rangle, \quad \tilde{\tau}_g = \langle \tilde{\zeta}', \tilde{\eta} \rangle.$$

се називају *уопштена нормална кривина*, *уопштена геодезијска кривина* и *уопштена геодезијска торзија*, редом.

Применом релације (4.1.14) добијамо следећу теорему.

Теорема 4.1.2. Ако крива α има уопштени Дарбуов репер $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ дат релацијама (4.1.10) или (4.1.13), једначине репера гласе

$$(4.1.15) \quad \begin{bmatrix} \tilde{T}' \\ \tilde{\zeta}' \\ \tilde{\eta}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_2 \tilde{k}_n & \epsilon_2 \tilde{k}_g \\ -\tilde{k}_g & \epsilon_2 \tilde{\tau}_g & 0 \\ -\tilde{k}_n & 0 & -\epsilon_2 \tilde{\tau}_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{\zeta} \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix}.$$

Помоћу дефиниција 4.1.1-4.1.3 и теореме 4.1.2 ћемо добити релацију између кривина k_g, k_n, τ_g криве α у односу на Дарбуов репер и кривина $\tilde{k}_g, \tilde{k}_n$ и $\tilde{\tau}_g$ у односу на одговарајући уопштени Дарбуов репер.

Теорема 4.1.3. Релација између кривина криве α у односу на Дарбуов репер и кривина у односу на уопштени Дарбуов репер $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ дат релацијама (4.1.10) или (4.1.13), гласи

$$(4.1.16) \quad \begin{aligned} \tilde{k}_n(s) &= \mu(s) k_n(s), \\ \tilde{\tau}_g(s) &= \tau_g(s), \\ \tilde{k}_g(s) &= \frac{1}{\mu(s)} k_g(s), \end{aligned}$$

при чему функција $\mu(s) \neq 0$ задовољава линеарну диференцијалну једначину (4.1.12) ако је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер прве врсте, односно $\mu(s) \in R_0$ за свако s , ако је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер друге врсте.

Доказ. Претпоставимо да је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер дат релацијом (4.1.10). Диференцирањем релације $\tilde{\eta} = \mu\eta$ по параметру дужине лука s и применом релације (4.1.6), налазимо да је

$$(4.1.17) \quad \tilde{\eta}' = (-\mu k_n)T + (\mu' - \epsilon_1 \mu \tau_g)\eta.$$

Према релацијама (4.1.10) и (4.1.15), имамо да је

$$(4.1.18) \quad \tilde{\eta}' = -\tilde{k}_n \tilde{T} - \epsilon_2 \tilde{\tau}_g \tilde{\eta} = (-\tilde{k}_n)T + (-\lambda \tilde{k}_n - \epsilon_2 \mu \tilde{\tau}_g)\eta.$$

Релације (4.1.17) и (4.1.18) дају

$$\tilde{k}_n = \mu k_n, \quad \tilde{\tau}_g = -\epsilon_2 \lambda k_n - \epsilon_2 \frac{\mu'}{\mu} + \tau_g.$$

Како функција μ задовољава (4.1.12), следи да је

$$\tilde{\tau}_g = \tau_g.$$

Помоћу (4.1.10) и (4.1.14) налазимо да је

$$\tilde{k}_g = \langle \tilde{T}', \tilde{\zeta} \rangle = \langle T' + \lambda' \eta + \lambda \eta', -\epsilon_2 \frac{\lambda}{\mu} T + \frac{1}{\mu} \zeta - \epsilon_2 \frac{\lambda^2}{2\mu} \eta \rangle.$$

Претходна релација заједно са (4.1.4) и (4.1.6) имплицира да је

$$\tilde{k}_g = \frac{1}{\mu} k_g + \epsilon_2 \frac{1}{\mu} \lambda' - \frac{1}{\mu} \lambda \tau_g + \epsilon_2 \frac{1}{2\mu} \lambda^2 k_n,$$

Како функција λ задовољава Рикатијеву диференцијалну једначину (4.1.11), на основу последње једнакости добијамо да је

$$\tilde{k}_g = \frac{1}{\mu} k_g,$$

чиме је доказана релација (4.1.16).

Претпоставимо сада да је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер дат релацијом (4.1.13). Применом релација (4.1.4) и (4.1.14) добијамо релацију (4.1.16), чиме је теорема доказана. $\square$

На тај начин, добијамо нову карактеризацију просторних кривих са не-нул главном нормалом, које су геодезијске, асимптотске, или линије кривине на светлосној површи.

Теорема 4.1.4. Крива α је геодезијска линија, асимптотска линија, или линија кривине ако и само ако је $\tilde{k}_g(s) = 0$, $\tilde{k}_n(s) = 0$, или $\tilde{\tau}_g(s) = 0$ редом за свако s .

У следећим двама теоремама доказаћемо да векторска поља Картановог репера нул Картанове криве β одређују светлосне преносне површи на којима су тангентна и бинормална индикатриса криве β просторне линије кривине са уопштеном геодезијском торзијом $\tilde{\tau}_g(s) = 0$ за свако s .

Теорема 4.1.5. Нека је β нул Картанова крива у простору $\mathbb{E}_1^3$ параметризована параметром псеудо-дужине лука s са торзијом $\tau_\beta(s) \neq \text{constant}$ и Картановим репером $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$. Тада је преносна површ M са параметризацијом

$$(4.1.19) \quad x(s, t) = T_\beta(s) + tB_\beta(s),$$

$t \neq \frac{1}{\tau_\beta(s)}$, светлосна површ на којој је тангентна индикатриса T_β криве β просторна линија кривине са уопштеном геодезијском торзијом $\tilde{\tau}_g(s) = 0$.

Доказ. Претпоставимо да је β нул Картанова крива параметризована параметром псеудо-дужине лука s са торзијом $\tau_\beta(s) \neq \text{constant}$ и Картановим репером $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ који задовољава услове

$$(4.1.20) \quad \langle T_\beta, T_\beta \rangle = \langle B_\beta, B_\beta \rangle = \langle T_\beta, N_\beta \rangle = \langle N_\beta, B_\beta \rangle = 0,$$

$$(4.1.21) \quad \langle N_\beta, N_\beta \rangle = 1, \quad \langle T_\beta, B_\beta \rangle = \epsilon_0 = \pm 1,$$

$$(4.1.22) \quad T_\beta \times N_\beta = \epsilon_0 T_\beta, \quad N_\beta \times B_\beta = \epsilon_0 B_\beta, \quad B_\beta \times T_\beta = N_\beta.$$

Уочимо површ M са параметризацијом (4.1.19). Парцијалним диференцирањем релације (4.1.19) по s и t и применом релација (2.5.5) и (4.1.22), налазимо да је нормално векторско поље површи облика

$$(4.1.23) \quad N(s, t) = x_s \times x_t = \epsilon_0(1 - t\tau_\beta(s))B_\beta(s).$$

Претпоставимо да је $t \neq \frac{1}{\tau_\beta(s)}$. Тада је $N(s, t)$ нул векторско поље, па је површ M светлосна. Означимо са $\alpha = T_\beta$ тангентну индикатрису криве β и са $\{T, \zeta, \eta\}$ њен Дарбуов репер. На основу релација (2.5.5), (4.1.21) и (4.1.23) налазимо да је

$$(4.1.24) \quad T(s) = \alpha'(s) = N_\beta(s), \quad \zeta(s) = -\epsilon_0 T_\beta(s), \quad \eta(s) = N(s, 0) = \epsilon_0 B_\beta(s).$$

Како је

$$\langle T_\beta, B_\beta \rangle = \epsilon_0 = -\langle \zeta, \eta \rangle = -\epsilon_1,$$

релације (2.5.5) и (4.1.24) дају

$$T'(s) = \epsilon_0(\tau_\beta(s)T_\beta(s) - B_\beta(s)).$$

Тада је $\langle T', T' \rangle = -2\epsilon_0\tau_\beta \neq 0$, што имплицира да крива α има не-нул главну нормалу. Применом релација (4.1.20) и (4.1.24), добијамо да је

$$\tau_g(s) = \langle \zeta'(s), \eta(s) \rangle = -\langle N_\beta, B_\beta \rangle = 0.$$

Отуда је α просторна линија кривине, па на основу теореме 4.1.4 следи да α има уопштено геодезијску торзију $\tilde{\tau}_g(s) = 0$. $\square$

Теорема 4.1.6. Нека је β нул Картанова хелиса у простору $\mathbb{E}_1^3$ са торзијом $\tau_\beta(s) = c_0 \in \mathbb{R}_0$ и Картановим репером $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$. Тада је преносна површ M са параметризацијом

$$(4.1.25) \quad x(s, t) = B_\beta(s) + tT_\beta(s),$$

$t \neq c_0$, светлосна површ на којој је бинормална индикатриса B_β криве β просторна линија кривине са уопштеном геодезијском торзијом $\tilde{\tau}_g(s) = 0$.

Доказ. Претпоставимо да је β нул Картанова хелиса параметризована параметром псеудо-дужине лука s са Картановим репером $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ и торзијом $\tau_\beta(s) = c_0 \in \mathbb{R}_0$ за свако s . Посматрајмо преносну површ M са параметризацијом (4.1.25). Нормално векторско поље површи је облика

$$N(s, t) = x_s \times x_t = \epsilon_0(c_0 - t)T_\beta(s).$$

Нека је $t \neq c_0$. Тада је $N(s, t)$ нул векторско поље, што имплицира да је површ M светлосна. Означимо са $\alpha = B_\beta$ бинормалну индикатрису криве β и са $\{T, \zeta, \eta\}$ њен Дарбуов репер. Применом релације (2.5.5) налазимо да је

$$(4.1.26) \quad T = -\operatorname{sgn}(c_0)N_\beta, \quad \zeta = -\epsilon_0 \frac{\operatorname{sgn}(c_0)}{c_0}B_\beta, \quad \eta = \epsilon_0 c_0 T_\beta.$$

На основу релација (2.5.5) и (4.1.26) следи да је

$$T' = \operatorname{sgn}(c_0)\epsilon_0(B_\beta - c_0T_\beta),$$

па је

$$\langle T', T' \rangle = -2\epsilon_0 c_0 \neq 0.$$

Према томе, просторна крива α има не-нул главну нормалу. Помоћу релација (4.1.20) и (4.1.26), налазимо да је

$$\tau_g(s) = \langle \zeta'(s), \eta(s) \rangle = 0.$$

Отуда је α линија кривине, па теорема 4.1.4 имплицира да α има уопштену геодезијску торзију $\tilde{\tau}_g(s) = 0$. $\square$

У наставку ћемо на примерима одредити уопштене Дарбуове репере просторних кривих са не-нул главном нормалом на светлосним површима.

ПРИМЕР 4.1.1. Посматрајмо транслациону површ M у простору $\mathbb{E}_1^3$ са параметризацијом (слика 4.1)

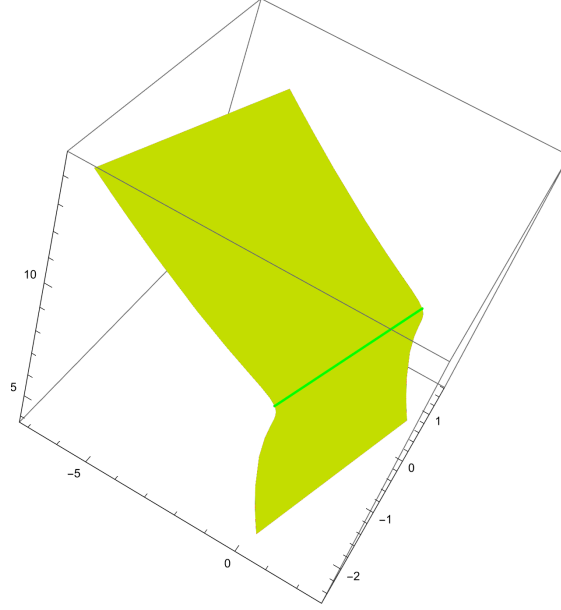
$$x(s, t) = \alpha(s) + \beta(t),$$

где је $\alpha(s) = (s, s\sqrt{2}, 7)$ просторна права линија и

$$\beta(t) = \frac{1}{4}(\sqrt{2} \sinh t - t^2, (1 - \sqrt{2})t^2, t^2 - 2 \sinh t),$$

$s, t \in \mathbb{R}$. Нормално векторско поље површи M гласи

$$N(s, t) = x_s \times x_t = (\cosh t - t)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$



Слика 4.1: Транслациона површ M са просторном правом линијом α

Пошто је $x_s \times x_t \neq 0$ и $\langle x_s \times x_t, x_s \times x_t \rangle = 0$, површ M је светлосна. Дарбуов репер криве $\alpha(s) = x(s, 0)$ је облика

$$T(s) = (1, \sqrt{2}, 0), \quad \zeta(s) = (\sqrt{2}, 1, 1), \quad \eta(s) = x_s \times x_t|_\alpha = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Рачунским путем налазимо да је

$$(4.1.27) \quad k_g(s) = k_n(s) = \tau_g(s) = 0.$$

Заменом релације (4.1.27) у (4.1.11) и (4.1.12) добијамо да је $\lambda(s) = \lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $\mu(s) = \mu_0 \in \mathbb{R}_0$. На основу дефиниција 4.1.1 и 4.1.2 следи да уопштени Дарбуови репери криве α гласе

$$\tilde{T} = T + \lambda_0 \eta, \quad \tilde{\zeta} = -\frac{\lambda_0}{\mu_0} T + \frac{1}{\mu_0} \zeta - \frac{\lambda_0^2}{2\mu_0} \eta, \quad \tilde{\eta} = \mu_0 \eta,$$

односно

$$\tilde{T} = T, \quad \tilde{\zeta} = \frac{1}{\mu_0} \zeta, \quad \tilde{\eta} = \mu_0 \eta.$$

Пошто су у оба случаја векторска поља $\tilde{T}$, $\tilde{\zeta}$ и $\tilde{\eta}$ константна, налазимо да је

$$(4.1.28) \quad \tilde{k}_g(s) = \tilde{k}_n(s) = \tilde{\tau}_g(s) = 0.$$

На основу релација (4.1.27) и (4.1.28) следи да важи теорема 4.1.4.

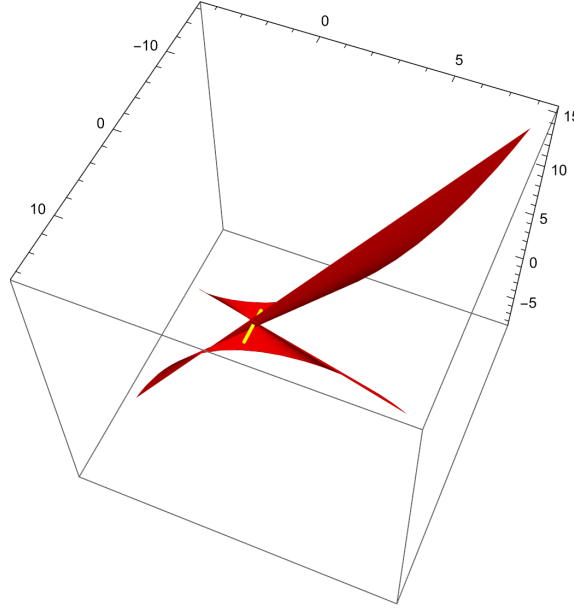
ПРИМЕР 4.1.2. Нека је M преносна површ у простору $\mathbb{E}_1^3$ са параметризацијом (слика 4.2)

$$x(s, t) = \left(s \sinh s - \cosh s, s \cosh s - \sinh s, \frac{s^2}{2}\right) + t(\sinh s, \cosh s, s),$$

$s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_0$. Нормално векторско поље површи M је облика

$$N(s, t) = x_s \times x_t = (s + t)(-s \sinh s + \cosh s, -s \cosh s + \sinh s, 1)$$

одакле је $\langle N(s, t), N(s, t) \rangle = s^2(s + t)^2$. Према томе, $N(s, t)$ је нул векторско поље, ако је $s = 0$ и $t \neq 0$. Према томе, површ M није светлосна, али садржи скуп регуларних тачака $x(0, t)$ у којима је тангентна раван светлосна.



Слика 4.2: Преносна површ M са просторном правом линијом β

Поменути скуп тачака припада просторној правој линији $\beta(t) = x(0, t) = (-1, t, 0)$ чији Дарбуов репер гласи

$$T(t) = (0, 1, 0), \quad \zeta(t) = \left(-\frac{1}{2t}, 0, \frac{1}{2t}\right), \quad \eta(t) = x_s \times x_t|_{\beta} = (t, 0, t).$$

Отуда су кривине криве β облика

$$(4.1.29) \quad k_g(t) = k_n(t) = 0, \quad \tau_g(t) = -\frac{1}{t}.$$

Заменом релације (4.1.29) у релацијама (4.1.11) и (4.1.12) и применом релације $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, добијамо да је

$$(4.1.30) \quad \lambda(t) = \frac{1}{t}, \quad \mu(t) = \mu_0 \in \mathbb{R}_0.$$

Помоћу релација (4.1.10), (4.1.13) и (4.1.30) налазимо да уопштени Дарбуови репери прве и друге врсте криве β редом гласе

$$\tilde{T}(t) = (1, 1, 1), \quad \tilde{\zeta}(t) = \left(-\frac{1}{\mu_0 t}, -\frac{1}{\mu_0 t}, 0\right), \quad \tilde{\eta}(t) = (\mu_0 t, 0, \mu_0 t),$$

$$\tilde{T}(t) = (0, 1, 0), \quad \tilde{\zeta}(t) = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{1}{2t}, 0, \frac{1}{2t}\right), \quad \tilde{\eta}(t) = \mu_0(t, 0, t).$$

Није тешко проверити да су кривине криве β у односу на уопштени Дарбуов репер прве и друге врсте облика

$$(4.1.31) \quad \tilde{k}_g(t) = \tilde{k}_n(t) = 0, \quad \tilde{\tau}_g(t) = -\frac{1}{t},$$

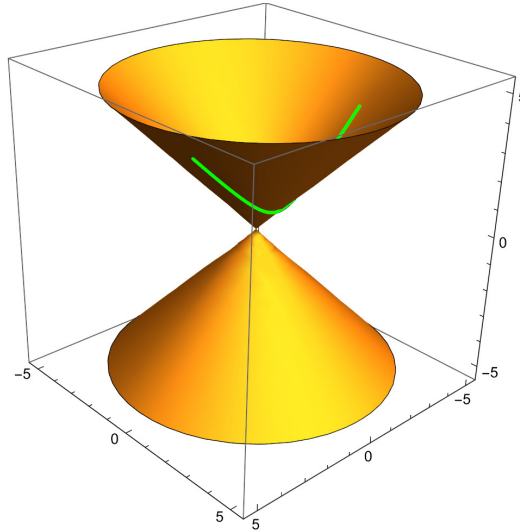
па на основу (4.1.29) и (4.1.31) следи да важи тврђење теореме 4.1.4.

ПРИМЕР 4.1.3. Посматрајмо светлосни конус C у простору $\mathbb{E}_1^3$ са параметризацијом (слика 4.3)

$$x(s, t) = t\alpha(s),$$

где је $\alpha(s) = (\cosh s, \sinh s, 1)$ просторна кружница са временским вектором главне нормале, $t \neq 0$ и $s \in \mathbb{R}$. Нормално векторско поље конуса гласи

$$N(s, t) = x_s \times x_t = -t\alpha(s).$$



Слика 4.3: Светлосни конус C са просторном кривом α

Отуда Дарбуов репер криве α гласи

$$\begin{aligned} T(s) &= (\sinh s, \cosh s, 0), \\ \zeta(s) &= \left(\frac{1}{2} \cosh s, \frac{1}{2} \sinh s, -\frac{1}{2} \right), \\ \eta(s) &= x_s \times x_t|_{\alpha} = (-\cosh s, -\sinh s, -1), \end{aligned}$$

па су њене кривине облика

$$(4.1.32) \quad k_g(s) = -\frac{1}{2}, \quad k_n(s) = 1, \quad \tau_g(s) = 0.$$

Пошто је $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, помоћу (4.1.11), (4.1.12) и (4.1.32), налазимо да је

$$\lambda(s) = \frac{2}{s}, \quad \mu(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Заменом претходне релације у (4.1.10), следи да уопштени Дарбуов репер прве врсте криве α гласи

$$(4.1.33) \quad \tilde{T}(s) = T(s) + \frac{2}{s}\eta(s), \quad \tilde{\zeta}(s) = -2sT(s) + s^2\zeta(s) - 2\eta(s), \quad \tilde{\eta}(s) = \frac{1}{s^2}\eta(s).$$

Помоћу релација (4.1.14) и (4.1.33), добијамо

$$(4.1.34) \quad \tilde{k}_g(s) = -\frac{s^2}{2}, \quad \tilde{k}_n(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \tilde{\tau}_g(s) = 0.$$

Уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α је облика

$$(4.1.35) \quad \tilde{T}(s) = T(s), \quad \tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{\mu_0}\zeta(s), \quad \tilde{\eta}(s) = \mu_0\eta(s),$$

$\mu_0 \in \mathbb{R}_0$. Користећи (4.1.14) и (4.1.35), налазимо да је

$$(4.1.36) \quad \tilde{k}_g(s) = -\frac{1}{2\mu_0}, \quad \tilde{k}_n(s) = \mu_0, \quad \tilde{\tau}_g(s) = 0.$$

Према томе, релације (4.1.32), (4.1.34) и (4.1.36) имплицирају да важи тврђење теореме 4.1.4.

ПРИМЕР 4.1.4. Нека је β нул Картанова крива у простору $\mathbb{E}_1^3$ са параметарском једначином

$$\beta(s) = \left(\frac{s^4}{4} + \frac{1}{16} \ln s, \frac{s^4}{4} - \frac{1}{16} \ln s, \frac{s^2}{4} \right),$$

$s \in \mathbb{R}^+$. Рачунским путем налазимо да Картанов репер криве β гласи

$$(4.1.37) \quad \begin{aligned} T_\beta(s) &= \left(s^3 + \frac{1}{16s}, s^3 - \frac{1}{16s}, \frac{s}{2} \right), \\ N_\beta(s) &= \left(3s^2 - \frac{1}{16s^2}, 3s^2 + \frac{1}{16s^2}, \frac{1}{2} \right), \\ B_\beta(s) &= \left(-\frac{9s}{2} - \frac{1}{32s^3}, -\frac{9s}{2} + \frac{1}{32s^3}, \frac{3}{4s} \right). \end{aligned}$$

Помоћу релације (4.1.37) добијамо да је торзија криве β облика

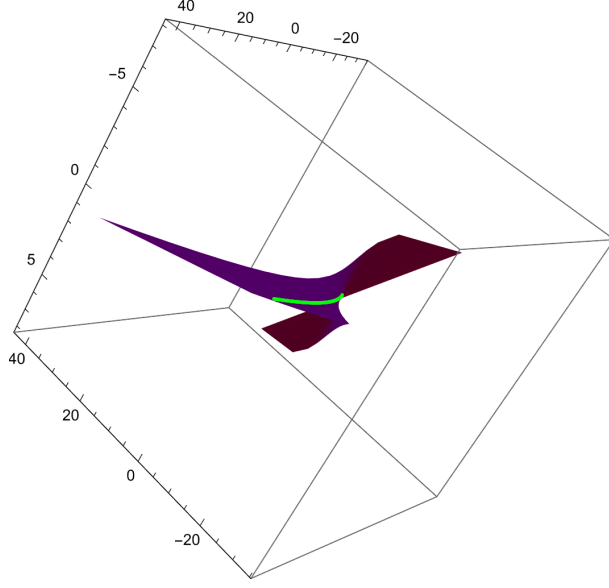
$$\tau_\beta(s) = \langle N'_\beta(s), B_\beta(s) \rangle = \frac{3}{2s^2}.$$

Уочимо преносну површ M са параметризацијом (слика 4.4)

$$x(s, t) = T_\beta(s) + tB_\beta(s),$$

$s \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}$. Тада је нормално векторско поље површи облика

$$N(s, t) = x_s \times x_t = \frac{2s^2 - 3t}{2s^2} B_\beta(s).$$



Слика 4.4: Преносна површ M са кривом T_β

Претпоставимо да је $t \neq \frac{1}{\tau_\beta(s)} = \frac{2s^2}{3}$. Тада је $N(s, t)$ нул векторско поље, па је M светлосна површ. Није тешко проверити да је $T_\beta(s)$ просторна крива са не-нул векторским пољем главних нормала.

Дарбуов репер криве T_β гласи

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(3s^2 - \frac{1}{16s^2}, 3s^2 + \frac{1}{16s^2}, \frac{1}{2} \right), \\ \zeta(s) &= - \left(s^3 + \frac{1}{16s}, s^3 - \frac{1}{16s}, \frac{s}{2} \right), \\ \eta(s) &= \left(-\frac{9s}{2} - \frac{1}{32s^3}, -\frac{9s}{2} + \frac{1}{32s^3}, \frac{3}{4s} \right), \end{aligned}$$

па су њене кривине

$$(4.1.38) \quad k_g(s) = 1, \quad k_n(s) = \frac{3}{2s^2}, \quad \tau_g(s) = 0.$$

Како је $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$, помоћу релација (4.1.11), (4.1.12) и (4.1.38) налазимо да је

$$\lambda(s) = -\frac{4s}{3}, \quad \mu(s) = s^2.$$

Применом (4.1.10) добијамо да уопштени Дарбуов репер прве врсте криве T_β гласи

$$\begin{aligned} \tilde{T}(s) &= T(s) - \frac{4s}{3}\eta(s), \\ \tilde{\zeta}(s) &= -\frac{4}{3s}T(s) + \frac{1}{s^2}\zeta(s) + \frac{8}{9}\eta(s), \\ \tilde{\eta}(s) &= s^2\eta(s). \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

Помоћу (4.1.14) и (4.1.39) налазимо да су кривине криве T_β облика

$$(4.1.40) \quad \tilde{k}_g(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \tilde{k}_n(s) = \frac{3}{2}, \quad \tilde{\tau}_g(s) = 0.$$

Уопштени Дарбуов репер друге врсте криве T_β гласи

$$(4.1.41) \quad \tilde{T}(s) = T(s), \quad \tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{\mu_0} \zeta(s), \quad \tilde{\eta}(s) = \mu_0 \eta(s),$$

$\mu_0 \in \mathbb{R}_0$. Применом релација (4.1.14) и (4.1.41), добијамо да је

$$(4.1.42) \quad \tilde{k}_g(s) = \frac{1}{\mu_0}, \quad \tilde{k}_n(s) = \frac{3\mu_0}{2s^2}, \quad \tilde{\tau}_g(s) = 0.$$

Према томе, на основу релација (4.1.38), (4.1.40) и (4.1.42) следи да важи тврђење теореме 4.1.5.

4.2 Уопштени Дарбуов репер псеудо нул криве

Псеудо нул крива је просторна крива са нул векторским пољем главних нормала и бинормала. Када таква крива лежи на светлосној површи, њене геометријске особине могу се изразити у терминима геодезијске и нормалне кривине и геодезијске торзије, које су одређене њеним Дарбуовим репером ([54, 70, 78]). Посебне врсте псеудо нул кривих на просторним, временским и светлосним површима у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$, дефинисане у терминима векторског поља Дарбуовог репера, су псеудо нул искошене хелисе типа k и псеудо нул изофотне криве ([66, 70]). Познато је да Френеов и Дарбуов репер псеудо нул криве имају своје осе ротације - *Дарбуове векторе* који задовољавају одговарајуће релације ([66]).

У овом одељку ћемо изложити оригиналне резултате дисертације публиковане у раду [15], који се односе на дефинисање *уопштеног Дарбуовог репера прве врсте* и *уопштеног Дарбуовог репера друге врсте* псеудо нул криве на светлосној површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$. Најпре ћемо доказати да је свака псеудо нул крива на светлосној површи геодезијска или асимптотска линија. Затим ћемо извести једначине уопштеног Дарбуовог репера псеудо нул криве и релације између њених кривина у односу на Дарбуов репер и кривина у односу на уопштени Дарбуов репер. Одредићемо параметарске једначине Дарбуовог вектора Френеовог, Дарбуовог и уопштеног Дарбуовог репера и наћи потребне и довољне услове при којима поменути вектори имају исти правац.

Присетимо се да *Френеов репер* $\{T, N, B\}$ псеудо нул криве α задовољава услове ([81])

$$(4.2.1) \quad \langle T, T \rangle = 1, \quad \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = 0, \quad \langle N, B \rangle = \epsilon = \pm 1,$$

$$(4.2.2) \quad T \times N = \epsilon N, \quad N \times B = T, \quad B \times T = \epsilon B.$$

Овај репер је *позитивно оријентисан*, тј.

$$[T, N, B] = \det(T, N, B) = 1.$$

Једначине Френеовог репера су облика

$$(4.2.3) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \epsilon\tau & 0 \\ -\epsilon\kappa & 0 & -\epsilon\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

где је $\kappa(s) = 1$ *кривина* и $\tau(s)$ *торзија* криве α , респективно. Када је $k(s) = 1$ и $\tau(s) = 0$ за свако s , крива α је *псеудо нул кружница*, а када је $k(s) = 1$ и $\tau(s) = \text{constant} \neq 0$ за свако s , крива α је *псеудо нул хелиса*.

Дарбуов репер $\{T, \zeta, \eta\}$ псеудо нул криве α на светлосној површи са параметризацијом $x(u, t)$ је псеудо ортонормирани репер који садржи тангентно векторско поље $T = \alpha'$, нул векторско поље

$$\eta = x_u \times x_t|_\alpha$$

и нул векторско поље ζ , тако да важе услови ([70])

$$(4.2.4) \quad \langle T, T \rangle = 1, \quad \langle \eta, \eta \rangle = \langle \zeta, \zeta \rangle = \langle T, \zeta \rangle = \langle T, \eta \rangle = 0, \quad \langle \zeta, \eta \rangle = \epsilon_1 = \pm 1,$$

$$(4.2.5) \quad T \times \zeta = \epsilon_1 \zeta, \quad \zeta \times \eta = T, \quad \eta \times T = \epsilon_1 \eta.$$

Дефиниција 4.2.1. ([70]) *Геодезијска кривина, нормална кривина и геодезијска торзија* псеудо нул криве α на светлосној површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, редом су дате формулама

$$(4.2.6) \quad k_g = \langle T', \zeta \rangle, \quad k_n = \langle T', \eta \rangle, \quad \tau_g = \langle \zeta', \eta \rangle.$$

Дефиниција 4.2.2. ([70]) Псеудо нул крива α на светлосној површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ се назива *геодезијска линија, асимптотска линија и линија кривине*, ако је $k_g(s) = 0$, $k_n(s) = 0$ и $\tau_g(s) = 0$ редом за свако s .

Једначине *Дарбуовог репера* псеудо нул криве α на светлосној површи гласе ([70])

$$(4.2.7) \quad \begin{bmatrix} T' \\ \zeta' \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 k_n & \epsilon_1 k_g \\ -k_g & \epsilon_1 \tau_g & 0 \\ -k_n & 0 & -\epsilon_1 \tau_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Најпре ћемо доказати следећу геометријску особину псеудо нул кривих.

Теорема 4.2.1. Свака псеудо нул крива која лежи на светлосној површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ је геодезијска или асимптотска линија.

Доказ. Помоћу релације $T' = \epsilon_1(k_n \zeta + k_g \eta)$ и услова $\langle N, N \rangle = \langle T', T' \rangle = 0$, добијамо $k_n(s)k_g(s) = 0$. Дакле, $k_g(s) = 0$ и $k_n(s) \neq 0$, или $k_n(s) = 0$ и $k_g(s) \neq 0$. Ако је $k_n(s) = k_g(s) = 0$, из релација (4.2.3) и (4.2.7) следи $N(s) = T'(s) = 0$. Међутим, то је контрадикција, јер је $N(s)$ нул вектор. $\square$

У свим дефиницијама, теоремама и последицама које следе, нека α означава псеудо нул криву параметризовану дужином лука s која лежи на светлосној површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$. Помоћу једначина Френеовог и Дарбуовог репера криве α и претходне теореме, добијамо следеће две последице.

ПОСЛЕДИЦА 4.2.1. Ако је α геодезијска линија са нормалном кривином $k_n(s) \neq 0$, једначине њеног Дарбуовог репера гласе

$$(4.2.8) \quad \begin{bmatrix} T' \\ \zeta' \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 k_n & 0 \\ 0 & \epsilon_1 \tau_g & 0 \\ -k_n & 0 & -\epsilon_1 \tau_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix},$$

при чему је

$$(4.2.9) \quad T = T, \quad N = \epsilon_1 k_n \zeta, \quad B = \frac{\epsilon_1}{k_n} \eta,$$

а кривине криве α задовољавају једнакост

$$(4.2.10) \quad \tau = \epsilon_1 \frac{k'_n}{k_n} + \tau_g.$$

ПОСЛЕДИЦА 4.2.2. Ако је α асимптотска линија са геодезијском кривином $k_g(s) \neq 0$, једначине њеног Дарбуовог репера гласе

$$(4.2.11) \quad \begin{bmatrix} T' \\ \zeta' \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon_1 k_g \\ -k_g & \epsilon_1 \tau_g & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_1 \tau_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix},$$

при чему је

$$(4.2.12) \quad T = T, \quad N = \epsilon_1 k_g \eta, \quad B = -\frac{\epsilon_1}{k_g} \zeta,$$

а кривине криве α задовољавају једнакост

$$(4.2.13) \quad \tau = -\epsilon_1 \frac{k'_g}{k_g} + \tau_g.$$

Пошто је η нул векторско поље, можемо га скалирати произвољном диференцијабилном функцијом, чиме ћемо добити нови репер дуж криве α .

Дефиниција 4.2.3. Уопштени Дарбуов репер прве врсте криве α је репер $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ облика

$$(4.2.14) \quad \begin{aligned} \tilde{T}(s) &= T(s) + \lambda(s)\eta(s), \\ \tilde{\zeta}(s) &= -\epsilon_2 \frac{\lambda(s)}{\mu(s)} T(s) + \frac{1}{\mu(s)} \zeta(s) - \epsilon_2 \frac{\lambda^2(s)}{2\mu(s)} \eta(s), \\ \tilde{\eta}(s) &= \mu(s)\eta(s), \end{aligned}$$

где су $\lambda(s) \neq 0$ и $\mu(s) \neq 0$ диференцијабилне функције које редом задовољавају Рикатијеву диференцијалну једначину

$$(4.2.15) \quad 2\epsilon_2 \lambda'(s) - 2\lambda(s)\tau_g(s) + \epsilon_2 \lambda^2(s)k_n(s) = 0,$$

и линеарну диференцијалну једначину првог реда

$$(4.2.16) \quad \mu'(s) + \mu(s)\lambda(s)k_n(s) = 0.$$

Такође ћемо дефинисати још један репер дуж криве α који представља уопштење њеног Дарбуовог репера.

Дефиниција 4.2.4. Уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α је репер $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ облика

$$(4.2.17) \quad \begin{aligned} \tilde{T}(s) &= T(s), \\ \tilde{\zeta}(s) &= \frac{1}{\mu_0} \zeta(s), \\ \tilde{\eta}(s) &= \mu_0 \eta(s), \end{aligned}$$

где је μ_0 произвољан реалан број различит од нуле.

Према дефиницијама 4.2.3 и 4.2.4, уопштени Дарбуови репери (4.2.14) и (4.2.17) нису јединствени. Уведени уопштени Дарбуови репери задовољавају услове

$$(4.2.18) \quad \tilde{\eta}(s) = \mu \eta,$$

$$(4.2.19) \quad \langle \tilde{T}, \tilde{T} \rangle = 1, \quad \langle \tilde{T}, \tilde{\zeta} \rangle = \langle \tilde{T}, \tilde{\eta} \rangle = \langle \tilde{\zeta}, \tilde{\zeta} \rangle = \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\zeta}, \tilde{\eta} \rangle = \epsilon_2 = \pm 1,$$

$$(4.2.20) \quad \tilde{T} \times \tilde{\zeta} = \epsilon_2 \tilde{\eta}, \quad \tilde{\zeta} \times \tilde{\eta} = \tilde{T}, \quad \tilde{\eta} \times \tilde{T} = \epsilon_2 \tilde{\zeta},$$

У наставку ћемо дефинисати кривине криве α у односу на њен уопштени Дарбуов репер прве и друге врсте.

Дефиниција 4.2.5. Кривине криве α дате формулама

$$(4.2.21) \quad \tilde{k}_n = \langle \tilde{T}', \tilde{\eta} \rangle, \quad \tilde{k}_g = \langle \tilde{T}', \tilde{\zeta} \rangle, \quad \tilde{\tau}_g = \langle \tilde{\zeta}', \tilde{\eta} \rangle.$$

се називају *уопштена нормална кривина*, *уопштена геодезијска кривина* и *уопштена геодезијска торзија*, редом.

Применом релације (4.2.21) се може доказати следећа теорема, која даје једначине уопштеног Дарбуовог репера.

Теорема 4.2.2. Ако крива α има уопштени Дарбуов репер дат релацијом (4.2.14) или (4.2.17), једначине репера гласе

$$(4.2.22) \quad \begin{bmatrix} \tilde{T}' \\ \tilde{\zeta}' \\ \tilde{\eta}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_2 \tilde{k}_n & \epsilon_2 \tilde{k}_g \\ -\tilde{k}_g & \epsilon_2 \tilde{\tau}_g & 0 \\ -\tilde{k}_n & 0 & -\epsilon_2 \tilde{\tau}_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{\zeta} \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix}.$$

Помоћу дефиниција 4.2.3-4.2.5 и теореме 4.2.2 ћемо одредити релацију између кривина k_g, k_n, τ_g криве α у односу на Дарбуов репер и кривина $\tilde{k}_g, \tilde{k}_n$ и $\tilde{\tau}_g$ у односу на уведене репере, која се може доказати аналогно теорему 4.1.3 из претходног одељка.

Теорема 4.2.3. Релација између кривина криве α у односу на Дарбуов репер и кривина у односу на уопштени Дарбуов репер $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ дат релацијом (4.2.14) или (4.2.17), гласи

$$(4.2.23) \quad \begin{aligned} \tilde{k}_n(s) &= \mu(s)k_n(s), \\ \tilde{\tau}_g(s) &= \tau_g(s), \\ \tilde{k}_g(s) &= \frac{1}{\mu(s)}k_g(s), \end{aligned}$$

при чему функција $\mu(s) \neq 0$ задовољава линеарну диференцијалну једначину (4.2.16) ако је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер прве врсте, односно $\mu(s) \in R_0$ за свако s , ако је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер друге врсте.

Сада ћемо дати интересантну геометријску карактеризацију псеудо нул геодезијских линија, асимптотских линија и линија кривине које леже на светлосној површи.

Теорема 4.2.4. Крива α је геодезијска линија, асимптотска линија и линија кривине ако и само ако је $\tilde{k}_g(s) = 0$, $\tilde{k}_n(s) = 0$ и $\tilde{\tau}_g(s) = 0$ редом за свако s .

У наставку ћемо извести параметарске једначине Дарбуовог вектора Френеовог, Дарбуовог и уопштеног Дарбуовог репера криве α . Такође ћемо одредити потребне и довољне услове под којима поменути вектори имају исти правац. Означимо са D Дарбуов вектор Дарбуовог репера. Он задовољава Дарбуове једначине облика

$$(4.2.24) \quad T' = D \times T, \quad N' = D \times N, \quad B' = D \times B.$$

Помоћу релација (4.2.3) и (4.2.24), добијамо да D има параметарску једначину

$$(4.2.25) \quad D(s) = \tau(s)T(s) - \epsilon N(s),$$

где је $\epsilon = \pm 1 = \langle N, B \rangle$. Дарбуови вектори $\bar{D}$ и $\tilde{D}$ Дарбуовог и уопштеног Дарбуовог репера редом задовољавају Дарбуове једначине облика

$$(4.2.26) \quad T' = \bar{D} \times T, \quad \zeta' = \bar{D} \times \zeta, \quad \eta' = \bar{D} \times \eta$$

и

$$(4.2.27) \quad \tilde{T}' = \tilde{D} \times \tilde{T}, \quad \tilde{\zeta}' = \tilde{D} \times \tilde{\zeta}, \quad \tilde{\eta}' = \tilde{D} \times \tilde{\eta}.$$

Релације (4.2.5), (4.2.7), (4.2.20), (4.2.22), (4.2.26) и (4.2.27) дају

$$(4.2.28) \quad \bar{D}(s) = \tau_g(s)T(s) - k_n(s)\zeta(s) + k_g(s)\eta(s),$$

и

$$(4.2.29) \quad \tilde{D}(s) = \tilde{\tau}_g(s)\tilde{T}(s) - \tilde{k}_n(s)\tilde{\zeta}(s) + \tilde{k}_g(s)\tilde{\eta}(s).$$

Одредићемо потребне и довољне услове при којима вектори D , $\bar{D}$ и $\tilde{D}$ имају исти правац. Према теорему 4.2.1, размотрићемо посебно два могућа случаја: **(А)** α је геодезијска крива и **(Б)** α је асимптотска крива.

(А) α је геодезијска крива. Према теорему 4.2.3, имамо да је

$$k_g(s) = \tilde{k}_g(s) = 0, \quad \tau_g(s) = \tilde{\tau}_g(s), \quad k_n(s) = \mu(s)k_n(s).$$

Тада релације (4.2.9), (4.2.25) и (4.2.28) имплицирају следећу теорему.

Теорема 4.2.5. Дарбуови вектори D и $\bar{D}$ Френеовог и Дарбуовог репера редом геодезијске криве α имају исти правац ако и само ако је $\tau(s) = \tau_g(s)$ за свако s .

Ако је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α , применом релације (4.2.17) добијамо

$$\tilde{D}(s) = \tilde{\tau}_g(s)\tilde{T}(s) - \tilde{k}_n(s)\tilde{\zeta}(s) = \tau_g(s)T(s) - \mu_0 k_n(s) \frac{1}{\mu_0} \zeta(s) = \bar{D}(s).$$

Стога важи следеће тврђење.

Теорема 4.2.6. Дарбуови вектори $\tilde{D}$ и $\bar{D}$ уопштеног Дарбуовог репера друге врсте и Дарбуовог репера редом геодезијске криве α су колинеарни.

На основу релација (4.2.10), (4.2.14), (4.2.15), (4.2.25) и (4.2.29), следи да важи следећа особина.

Теорема 4.2.7. Дарбуови вектори $\tilde{D}$ и D уопштеног Дарбуовог репера прве врсте и Френеовог репера редом геодезијске криве α имају исти правац ако и само ако је

$$(4.2.30) \quad \tau(s) = -\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0, \quad \lambda(s) = -2\epsilon_2 \frac{\tau_g(s)}{k_n(s)}.$$

(Б) α је асимптотска крива. Према теорему 4.2.3, важе једнакости

$$\tilde{k}_g(s) = \frac{1}{\mu(s)} k_g(s), \quad \tau_g(s) = \tilde{\tau}_g(s), \quad \tilde{k}_n(s) = k_n(s) = 0.$$

Применом релација (4.2.9), (4.2.25) и (4.2.28) добијамо следећу теорему.

Теорема 4.2.8. Дарбуови вектори D и $\bar{D}$ Френеовог и Дарбуовог репера редом асимптотске криве α имају исти правац ако и само ако је $\tau(s) = \tau_g(s)$.

Ако је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α , применом релације (4.2.17) налазимо да је

$$\tilde{D}(s) = \tilde{\tau}_g(s)\tilde{T}(s) + \tilde{k}_g(s)\tilde{\eta}(s) = \tau_g(s)T(s) + \frac{1}{\mu_0} k_g(s) \mu_0 \eta(s) = \bar{D}(s).$$

Тиме је доказана следећа особина.

Теорема 4.2.9. Дарбуови вектори $\tilde{D}$ и $\bar{D}$ уопштеног Дарбуовог репера прве врсте и Дарбуовог репера редом асимптотске криве α су колинеарни.

На основу релација (4.2.14), (4.2.15), (4.2.25) и (4.2.29) следи да важи следеће тврђење.

Теорема 4.2.10. Дарбуови вектори $\tilde{D}$ и D уопштеног Дарбуовог репера прве врсте и Френеовог репера редом асимптотске криве α имају исти правац ако и само ако је $\tau(s) = \tau_g(s) = 0$ за свако s .

Теореме 4.2.8, 4.2.9 и 4.2.10 имплицирају следећу последицу.

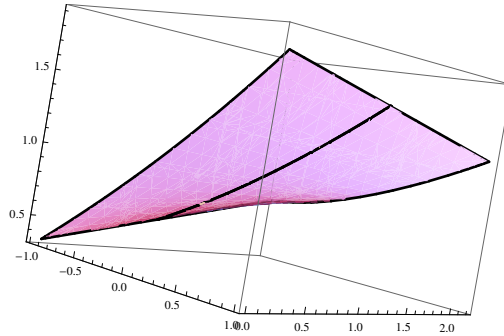
ПОСЛЕДИЦА 4.2.3. Једине псеудо нул асимптотске криве на светлосној површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, чији Дарбуови вектори Френеовог, Дарбуовог и уопштеног Дарбуовог репера прве и друге врсте имају исти правац, су псеудо нул кружнице.

У примерима који следе одредићемо параметарску једначину Дарбуовог вектора Френеовог, Дарбуовог и уопштеног Дарбуовог репера и показати да под одговарајућим условима поменути вектори имају исти правац.

ПРИМЕР 4.2.1. Нека је M преносна површ у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ са параметарском једначином (слика 4.5)

$$x(s, t) = \alpha(s) + tB(s),$$

где је $\alpha(s) = (e^s, e^s, s)$ псеудо нул хелиса са вектором бинормале $B(s)$, $s, t \in \mathbb{R}$ и $t \neq 1$.



Слика 4.5: Псеудо нул хелиса α на преносној површи M

Френеов репер криве α је облика

$$(4.2.31) \quad T(s) = (e^s, e^s, 1), \quad N(s) = (e^s, e^s, 0), \quad B(s) = \left(-\frac{e^{2s} + 1}{2e^s}, \frac{1 - e^{2s}}{2e^s}, -1\right),$$

па кривина и торзија те криве гласе

$$k(s) = 1, \quad \tau(s) = 1.$$

Пошто је $T \times N = \epsilon N = N$, следи да је $\epsilon = 1$. Нормално векторско поље површи M је облика

$$U(s, t) = x_s \times x_t = (t - 1)B(s).$$

Како је $t \neq 1$, $U(s, t)$ је нул векторско поље. Отуда је површ M светлосна. Рачунским путем налазимо да Дарбуов репер криве α гласи

$$(4.2.32) \quad T(s) = \alpha'(s), \quad \zeta(s) = -N(s), \quad \eta(s) = x_s \times x_t|_{\alpha} = -B(s),$$

па су кривине криве α

$$(4.2.33) \quad k_g(s) = 0, \quad k_n(s) = -1, \quad \tau_g(s) = 1.$$

Заменом релације (4.2.31) у релацијама (4.2.15) и (4.2.16) и применом релације $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 1$, добијамо

$$(4.2.34) \quad \lambda(s) = -\frac{2e^s}{e^s - 1}, \quad \mu(s) = \frac{1}{(1 - e^s)^2}.$$

Према дефиницији 4.2.3 следи да α има уопштени Дарбуов репер прве врсте облика

$$(4.2.35) \quad \tilde{T}(s) = T(s) - \frac{2e^s}{e^s - 1}\eta(s),$$

$$(4.2.36) \quad \tilde{\zeta}(s) = 2e^s(e^s - 1)T(s) + (1 - e^s)^2\zeta(s) - 2e^{2s}\eta(s),$$

$$(4.2.37) \quad \tilde{\eta}(s) = \frac{1}{(1 - e^s)^2}\eta(s).$$

Сада на основу релација (4.2.21), (4.2.35), (4.2.36) и (4.2.37) добијамо да су кривине криве α у односу на уопштени Дарбуов репер прве врсте

$$(4.2.38) \quad \tilde{k}_g(s) = 0, \quad \tilde{k}_n(s) = -\frac{1}{(1 - e^s)^2}, \quad \tilde{\tau}_g(s) = 1.$$

Према дефиницији 4.2.4 налазимо да уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α гласи

$$(4.2.39) \quad \tilde{T}(s) = T(s), \quad \tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{\mu_0}\zeta(s), \quad \tilde{\eta}(s) = \mu_0\eta(s),$$

$\mu_0 \in \mathbb{R}_0$. Применом релација (4.2.21), (4.2.35), (4.2.36) и (4.2.37), следи да је

$$(4.2.40) \quad \tilde{k}_g(s) = 0, \quad \tilde{k}_n(s) = -\mu_0, \quad \tilde{\tau}_g(s) = 1.$$

Према томе, релације (4.2.33), (4.2.38) и (4.2.40) имплицирају да важе тврђења теорема 4.2.3 и 4.2.4. Осим тога, помоћу релација (4.2.31), (4.2.32), (4.2.33), (4.2.39), (4.2.40) и $\tau(s) = \epsilon = 1$ налазимо да Дарбуови вектори D , $\bar{D}$ и $\tilde{D}$ имају параметарске једначине

$$\begin{aligned} D(s) &= \tau(s)T(s) - \epsilon N(s) = (0, 0, 1), \\ \bar{D}(s) &= \tau_g(s)T(s) - k_n(s)\zeta(s) = (0, 0, 1), \\ \tilde{D}(s) &= \tilde{\tau}_g(s)\tilde{T}(s) - \tilde{k}_n(s)\tilde{\zeta}(s) = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Дакле, важе тврђења теорема 4.2.5 и 4.2.6.

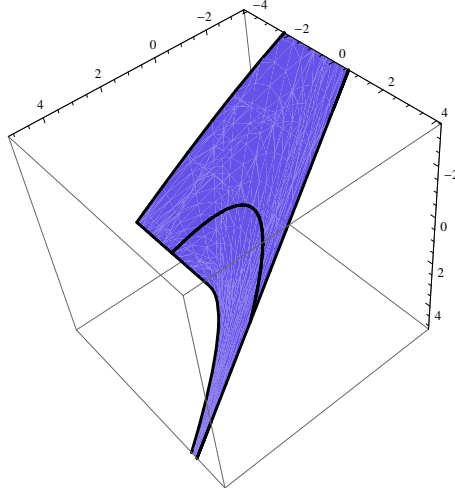
ПРИМЕР 4.2.2. Нека је M преносна површ у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ са параметризацијом (слика 4.6)

$$x(s, t) = \alpha(s) + t(T(s) + 2N(s)),$$

где је $\alpha(s) = (\frac{s^2}{2}, \frac{s^2}{2}, s)$ псеудо нул кружница са тангентним векторским пољем T , векторским пољем главних нормала N , $s, t \in \mathbb{R}$ и $t \neq 2$.

Френеов репер криве α гласи

$$(4.2.41) \quad T(s) = (s, s, 1), \quad N(s) = (1, 1, 0), \quad B(s) = (-\frac{1+s^2}{2}, \frac{1-s^2}{2}, -s),$$



Слика 4.6: Псеудо нул кружница α на површи M

па је

$$(4.2.42) \quad k(s) = 1, \quad \tau(s) = 0.$$

Како је $T \times N = \epsilon N = N$, следи да је $\epsilon = 1$. Нормално векторско поље површи M је облика

$$U(s, t) = x_s \times x_t = (2 - t)N(s).$$

Пошто је по претпоставци $t \neq 2$, $U(s, t)$ је нул векторско поље. Отуда је M светлосна раван са параметарском једначином $x_1 = x_2$. Рачунским путем добијамо да Дарбуов репер криве α гласи

$$(4.2.43) \quad T(s) = \alpha'(s), \quad \zeta(s) = -\frac{1}{2}B(s), \quad \eta(s) = x_s \times x_t|_{\alpha} = 2N(s).$$

Помоћу релације (4.2.6) налазимо да је

$$(4.2.44) \quad k_g(s) = -\frac{1}{2}, \quad k_n(s) = 0, \quad \tau_g(s) = 0.$$

Одавде следи да је α асимптотска крива и линија кривине. Заменом релације (4.2.44) у релацијама (4.2.15) и (4.2.16) и применом $\epsilon_2 = \epsilon_1 = -1$, добијамо

$$(4.2.45) \quad \lambda(s) = \lambda_0 \in \mathbb{R}_0, \quad \mu(s) = \mu_0 \in \mathbb{R}_0.$$

Помоћу дефиниције 4.2.3 и релација (4.2.14) и (4.2.45) налазимо да је уопштени Дарбуов репер прве врсте криве α облика

$$(4.2.46) \quad \tilde{T}(s) = T(s) + \lambda_0 \eta(s),$$

$$(4.2.47) \quad \tilde{\zeta}(s) = \frac{\lambda_0}{\mu_0} T(s) + \frac{1}{\mu_0} \zeta(s) + \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \eta(s),$$

$$(4.2.48) \quad \tilde{\eta}(s) = \mu_0 \eta(s).$$

Применом релација (4.2.21), (4.2.46), (4.2.47) и (4.2.48) следи да кривине криве α у односу на уопштени Дарбуов репер прве врсте гласе

$$(4.2.49) \quad \tilde{k}_g(s) = -\frac{1}{2\mu_0}, \quad \tilde{k}_n(s) = 0, \quad \tilde{\tau}_g(s) = 0.$$

С друге стране, на основу дефиниције 4.2.4 налазимо да је

$$(4.2.50) \quad \tilde{T}(s) = T(s), \quad \tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{\mu_0}\zeta(s), \quad \tilde{\eta}(s) = \mu_0\eta(s),$$

па је

$$(4.2.51) \quad \tilde{k}_g(s) = -\frac{1}{2\mu_0}, \quad \tilde{k}_n(s) = 0, \quad \tilde{\tau}_g(s) = 0.$$

Сада помоћу релација (4.2.44), (4.2.49) и (4.2.51) закључујемо да важе теореме 4.2.3 и 4.2.4. Такође, релације (4.2.41), (4.2.42), (4.2.46), (4.2.48) и (4.2.49) имплицирају да Дарбуови вектори D и $\tilde{D}$ гласе

$$\begin{aligned} D(s) &= \tau(s)T(s) - \epsilon N(s) = (-1, -1, 0), \\ \tilde{D}(s) &= \tilde{\tau}_g(s)\tilde{T}(s) + \tilde{k}_g(s)\tilde{\eta}(s) = (-1, -1, 0), \end{aligned}$$

па важи тврђење теореме 4.2.10. Применом релација (4.2.41), (4.2.43), (4.2.44), (4.2.50) и (4.2.51), добијамо

$$\bar{D}(s) = \tilde{D}(s) = (-1, -1, 0),$$

што значи да важи последица 4.2.3.

ПРИМЕР 4.2.3. Уочимо преносну површ M у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ са параметризацијом (слика 4.7)

$$x(s, t) = \alpha(s) + tN(s),$$

при чему је

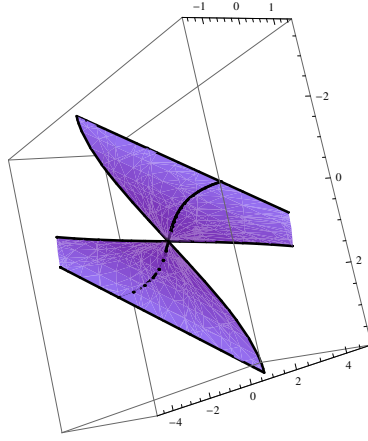
$$\alpha(s) = \left(\frac{s^3}{12}, \frac{s^3 + 12s}{12\sqrt{2}}, \frac{s^3 - 12s}{12\sqrt{2}} \right),$$

псеудо нул базна крива, N векторско поље њених главних нормала, $s, t \in \mathbb{R}$ и $s \neq 0$. Рачунским путем налазимо да Френеов репер криве α гласи

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(\frac{s^2}{4}, \frac{s^2 + 4}{4\sqrt{2}}, \frac{s^2 - 4}{4\sqrt{2}} \right), \\ N(s) &= s \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right), \\ B(s) &= \left(\frac{s^3}{16} + \frac{1}{s}, \frac{s^3}{16\sqrt{2}} + \frac{s\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{s\sqrt{2}}, \frac{s^3}{16\sqrt{2}} - \frac{s\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{s\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Отуда су кривине криве α облика

$$k(s) = 1, \quad \tau(s) = -\frac{1}{s}.$$



Слика 4.7: Псеудо нул крива α на површи M

Пошто је $T \times N = \epsilon N = -N$, имамо да је $\epsilon = -1$. Нормално векторско поље површи M гласи

$$U(s, t) = x_s \times x_t = -N(s).$$

Како је $s \neq 0$, $U(s, t)$ је нул векторско поље. Дакле, M је светлосна преносна површ. Дарбуов репер дуж криве α чине векторска поља

$$(4.2.52) \quad T(s) = \alpha'(s), \quad \zeta(s) = B(s), \quad \eta(s) = x_s \times x_t|_{\alpha} = -N(s).$$

Одавде применом релације (4.2.6) налазимо да је

$$(4.2.53) \quad k_g(s) = -1, \quad k_n(s) = 0, \quad \tau_g(s) = -\frac{1}{s}.$$

Према томе, α је асимптотска линија. Помоћу релација (4.2.15), (4.2.16), (4.2.53) и $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 1$, добијамо да је

$$(4.2.54) \quad \lambda(s) = s, \quad \mu(s) = \mu_0 \in \mathbb{R}_0.$$

На основу дефиниције 4.2.3 и релација (4.2.14) и (4.2.54), следи да је

$$\begin{aligned} \tilde{T}(s) &= T(s) + s\eta(s), \\ \tilde{\zeta}(s) &= -\frac{s}{\mu_0}T(s) + \frac{1}{\mu_0}\zeta(s) - \frac{s^2}{2\mu_0}\eta(s), \\ \tilde{\eta}(s) &= \mu_0\eta(s). \end{aligned}$$

Применом последње релације, налазимо да је

$$(4.2.55) \quad \tilde{k}_g(s) = -\frac{1}{\mu_0}, \quad \tilde{k}_n(s) = 0, \quad \tilde{\tau}_g(s) = -\frac{1}{s}.$$

С друге стране, уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α гласи

$$(4.2.56) \quad \tilde{T}(s) = T(s), \quad \tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{\mu_0}\zeta(s), \quad \tilde{\eta}(s) = \mu_0\eta(s),$$

па су одговарајуће кривине облика

$$(4.2.57) \quad \tilde{k}_g(s) = -\frac{1}{\mu_0}, \quad \tilde{k}_n(s) = 0, \quad \tilde{\tau}_g(s) = -\frac{1}{s}.$$

На основу релација (4.2.53), (4.2.55) и (4.2.57) закључујемо да важе теореме 4.2.3 и 4.2.4. Осим тога, релације (4.2.52), (4.2.53), (4.2.56) и (4.2.57) имплицирају да је

$$\begin{aligned} \bar{D}(s) &= \tau_g(s)T(s) + k_g(s)\eta(s) = \left(\frac{s}{4}, \frac{s^2 - 4}{4s\sqrt{2}}, \frac{s^2 + 4}{4s\sqrt{2}}\right), \\ \tilde{D}(s) &= \tilde{\tau}_g(s)\tilde{T}(s) + \tilde{k}_g(s)\tilde{\eta}(s) = \left(\frac{s}{4}, \frac{s^2 - 4}{4s\sqrt{2}}, \frac{s^2 + 4}{4s\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$

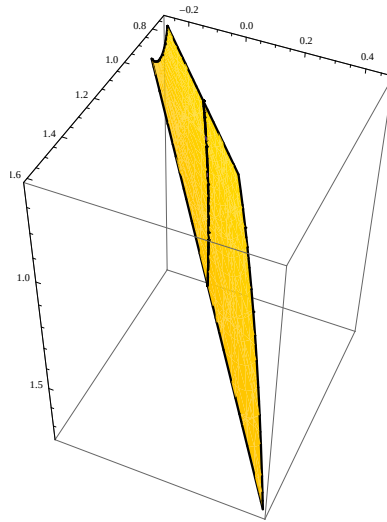
што значи да важи тврђење теореме 4.2.9.

ПРИМЕР 4.2.4. Уочимо преносну површ M у простору $\mathbb{E}_1^3$ са параметарском једначином (слика 4.8)

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\left(-\frac{1}{2}e^{6s} - \frac{1}{8}e^{2s}, -\frac{e^{4s}}{2}, \frac{1}{8}e^{2s} - \frac{1}{2}e^{6s}\right),$$

где је $\alpha(s) = (e^{2s}, s, e^{2s})$ псеудо нул хелиса, $s, t \in \mathbb{R}$ и $t \neq e^{-4s}$. Френеов репер криве α је облика

$$\begin{aligned} T(s) &= (2e^{2s}, 1, 2e^{2s}), \\ N(s) &= 4e^{2s}(1, 0, 1), \\ B(s) &= \left(\frac{1}{2}e^{2s} + \frac{1}{8}e^{-2s}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}e^{-2s} + \frac{1}{2}e^{2s}\right), \end{aligned}$$



Слика 4.8: Псеудо нул хелиса α на површи M

па њене Френеове кривине гласе

$$(4.2.58) \quad k(s) = 1, \quad \tau(s) = -2.$$

Пошто је $T \times N = \epsilon N = -N$, добијамо да је $\epsilon = -1$. Нормално векторско поље површи M је облика

$$U(s, t) = x_s \times x_t = (1 - te^{4s})\eta(s).$$

Како је по претпоставци $t \neq e^{-4s}$, $U(s, t)$ је светлосно векторско поље, што имплицира да је површ M светлосна. Рачунским путем налазимо да Дарбуов репер дуж криве α гласи

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s), \\ \zeta(s) &= -4e^{-2s}(1, 0, 1), \\ \eta(s) &= x_s \times x_t|_\alpha = \left(-\frac{1}{2}e^{6s} - \frac{1}{8}e^{2s}, -\frac{e^{4s}}{2}, \frac{1}{8}e^{2s} - \frac{1}{2}e^{6s}\right), \end{aligned}$$

па су одговарајуће кривине

$$(4.2.59) \quad k_g(s) = 0, \quad k_n(s) = e^{4s}, \quad \tau_g(s) = 2.$$

Према томе, α је геодезијска линија. Помоћу релација (4.2.59), (4.2.15), (4.2.16) и $\epsilon_2 = \epsilon_1 = -1$, добијамо

$$(4.2.60) \quad \lambda(s) = \frac{4}{e^{4s}}, \quad \mu(s) = e^{-4s}.$$

Применом дефиниције 4.2.3, следи да уопштени Дарбуов репер прве врсте криве α чине векторска поља

$$(4.2.61) \quad \tilde{T}(s) = T(s) + \frac{4}{e^{4s}}\eta(s),$$

$$(4.2.62) \quad \begin{aligned} \tilde{\zeta}(s) &= 4T(s) + e^{4s}\zeta(s) + \frac{8}{e^{4s}}\eta(s), \\ \tilde{\eta}(s) &= e^{-4s}\eta(s). \end{aligned}$$

Користећи претходни репер и релацију (4.2.21), добијамо да је

$$(4.2.63) \quad \tilde{k}_g(s) = 0, \quad \tilde{k}_n(s) = 1, \quad \tilde{\tau}_g(s) = 2.$$

С друге стране, применом дефиниције 4.2.4, следи да уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α гласи

$$\tilde{T}(s) = T(s), \quad \tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{\mu_0}\zeta(s), \quad \tilde{\eta}(s) = \mu_0\eta(s),$$

где $\mu_0 \in \mathbb{R}_0$. Отуда је

$$(4.2.64) \quad \tilde{k}_g(s) = 0, \quad \tilde{k}_n(s) = \mu_0 e^{4s}, \quad \tilde{\tau}_g(s) = 2.$$

На основу релација (4.2.59), (4.2.63) и (4.2.64) закључујемо да важе тврђења теорема 4.2.3 и 4.2.4. Такође, применом релација (4.2.25), (4.2.29), (4.2.58), (4.2.61) и (4.2.62), следи

$$\begin{aligned} D(s) &= -2T(s) + N(s) = (0, -2, 0), \\ \tilde{D}(s) &= \tilde{\tau}_g(s)\tilde{T}(s) - \tilde{k}_n(s)\tilde{\zeta}(s) = (0, -2, 0). \end{aligned}$$

Према томе, важи и теорема 4.2.7.

4.3 Уопштени Дарбуов репер нул Картанове криве

У овом одељку ћемо представити оригиналне резултате дисертације публиковане у радовима [17] и [31]. У тим радовима су уведене нул Картанове нормалне изофотне и нормалне силуетне криве на временској површи помоћу *уопштеног Дарбуовог репера* криве. У том циљу, присетимо се да Картанов репер нул Картанове криве задовољава услове

$$(4.3.1) \quad \langle T, T \rangle = \langle B, B \rangle = \langle T, N \rangle = \langle N, B \rangle = 0, \quad \langle N, N \rangle = 1, \quad \langle T, B \rangle = \epsilon = \pm 1,$$

$$(4.3.2) \quad T \times N = \epsilon T, \quad N \times B = \epsilon B, \quad B \times T = N.$$

Картанов репер нул Картанове криве је *позитивно оријентисан*, односно задовољава релацију

$$\det(T, N, B) = [T, N, B] = 1.$$

Према томе, једначине Картановог репера гласе ([81])

$$(4.3.3) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \epsilon\tau & 0 & -\epsilon\kappa \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Геодезијска кривина, нормална кривина и геодезијска торзија нул Картанове криве на временској површи су редом дате формулама ([64])

$$(4.3.4) \quad k_g(s) = \langle T'(s), \zeta(s) \rangle, \quad k_n(s) = \langle T'(s), \eta(s) \rangle, \quad \tau_g(s) = \langle \zeta'(s), \eta(s) \rangle,$$

при чему је $\{T, \zeta, \eta\}$ Дарбуов репер криве. Ако је $k_g(s) = 0$, $k_n(s) = 0$ и $\tau_g(s) = 0$ за свако s , нул Картанова крива се редом назива *геодезијска линија*, *асимптотска линија* и *линија кривине*.

Једначине Дарбуовог репера нул Картанове криве на временској површи гласе ([64])

$$(4.3.5) \quad \begin{bmatrix} T' \\ \zeta' \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 k_g & 0 & k_n \\ 0 & -\epsilon_1 k_g & \tau_g \\ -\epsilon_1 \tau_g & -\epsilon_1 k_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Отуда је *Дарбуов вектор* Дарбуовог репера $\{T, \zeta, \eta\}$ нул Картанове криве облика

$$(4.3.6) \quad D = \tau_g T - k_n \zeta + k_g \eta.$$

Најпре ћемо доказати следећу теорему која се односи на нормалну кривину нул Картанове криве.

Теорема 4.3.1. Нул Картанова крива на временској површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ са Картановим репером $\{T, N, B\}$ и Дарбуовим репером $\{T, \zeta, \eta\}$, има нормалну кривину $k_n(s) = -\epsilon\epsilon_1$, где је $\langle T, B \rangle = \epsilon$ и $\langle T, \zeta \rangle = \epsilon_1$.

Доказ. Претпоставимо да је α нул Картанова крива на временској површи. По-моћу релација (4.3.1), (4.3.3) и (4.3.5) налазимо да је

$$\langle T', T' \rangle = \langle N, N \rangle = k_n^2 = 1.$$

Релације (4.3.1), (4.3.3) и (4.3.5) такође дају

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \epsilon_1 k_g & 0 & k_n \\ -\frac{\epsilon}{2} k_g^2 & \epsilon \epsilon_1 & -\epsilon \epsilon_1 \frac{k_g}{k_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \zeta \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Пошто су Картанов и Дарбуов репер криве α позитивно оријентисани, применом претходне релације добијамо

$$[T, N, B] = [T, \epsilon_1 k_g T + k_n \eta, -\frac{\epsilon}{2} k_g^2 T + \epsilon \epsilon_1 \zeta - \epsilon \epsilon_1 \frac{k_g}{k_n} \eta] = [T, k_n \eta, \epsilon \epsilon_1 \zeta] = 1,$$

одакле је $k_n(s) = -\epsilon \epsilon_1$. □

Последица 4.3.1. Не постоје нул Картанове асимптотске криве на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$.

У дефиницијама и теоремама које следе, са α ћемо означити нул Картанову криву параметризовану параметром псеудо-дужине лука s која лежи на временској површи са Дарбуовим репером $\{T, \zeta, \eta\}$. Разликоваћемо два случаја, када је уопштени Дарбуов репер криве α добијен скалирањем нул тангентног векторског поља T - случај (А) и када је добијен скалирањем нул векторског поља ζ - случај (Б).

Случај (А). Пошто је T нул тангентно векторско поље криве α , можемо га скалирати произвољном функцијом, чиме ћемо добити нови репер дуж криве ([17]).

Дефиниција 4.3.1. Уопштени Дарбуов репер прве врсте криве α је репер

$$\begin{aligned} \tilde{T}(s) &= \mu(s)T(s), \\ \tilde{\zeta}(s) &= -\epsilon_1 \frac{\lambda(s)}{\mu(s)} \eta(s) + \frac{1}{\mu(s)} \zeta(s) - \epsilon_1 \frac{\lambda^2(s)}{2\mu(s)} T(s), \\ \tilde{\eta}(s) &= \eta(s) + \lambda(s)T(s), \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

где су $\lambda(s) \neq 0$ и $\mu(s) \neq 0$ диференцијабилне функције које редом задовољавају Рикатијеву диференцијалну једначину

$$2\epsilon_1 \lambda'(s) + 2\lambda(s)k_g(s) - \epsilon_1 \lambda^2(s)k_n(s) = 0, \tag{4.3.8}$$

и линеарну диференцијалну једначину првог реда

$$\mu'(s) - \mu(s)\lambda(s)k_n(s) = 0. \tag{4.3.9}$$

Дефиниција 4.3.2. Уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α је репер

$$\begin{aligned} \tilde{T}(s) &= \mu_0 T(s), \\ \tilde{\zeta}(s) &= \frac{1}{\mu_0} \zeta(s), \\ \tilde{\eta}(s) &= \eta(s), \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

где је μ_0 произвољан реалан број различит од нуле.

Ако је $\lambda(s) = 0$ и $\mu(s) = 1$ за свако s , векторска поља уопштеног Дарбуовог репера (4.3.7) поклапају се са векторским пољима Дарбуовог репера $\{T, \zeta, \eta\}$. Такође, ако је $\lambda(s) = 0$ за свако s , уопштени Дарбуов репер прве врсте своди се на уопштени Дарбуов репер друге врсте. Напоменимо да се уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α добија ротацијом Дарбуовог репера $\{T, \zeta, \eta\}$ око просторне осе η за константан хиперболички угао $\theta = \ln \mu_0$, при чему $\mu_0 \in \mathbb{R}^+$.

До на изометрије простора $\mathbb{E}_1^3$, можемо претпоставити да су у некој тачки криве α вектори $T(s)$ и $\zeta(s)$ облика

$$T(s) = (a_1(s), a_1(s), 0), \quad \zeta(s) = \left(-\frac{1}{2}a_1(s), \frac{1}{2}a_1(s), 0\right),$$

при чему је $a_1(s)$ произвољна диференцијабилна функција. Применом хиперболичке ротације R_θ за хиперболички угао θ око просторне осе η колинеарне са вектором $(0, 0, 1)$, добијамо

$$R_{\theta(s)}(T(s)) = \begin{bmatrix} \cosh \theta(s) & \sinh \theta(s) & 0 \\ \sinh \theta(s) & \cosh \theta(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(s) \\ a_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} = e^{\theta(s)}T(s) = \tilde{T}(s) = \mu_0 T(s),$$

$$R_{\theta(s)}(\zeta(s)) = \begin{bmatrix} \cosh \theta(s) & \sinh \theta(s) & 0 \\ \sinh \theta(s) & \cosh \theta(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a_1(s) \\ \frac{1}{2}a_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-\theta(s)}\zeta(s) = \tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{\mu_0}\zeta(s).$$

Одавде налазимо да је $\theta(s) = \ln \mu_0$. За $\mu_0 = 1$, следи да је $\theta(s) = 0$ за свако s , па се у том случају уопштени Дарбуов репер друге врсте поклапа са Дарбуовим репером.

Посебно, ако је $\mu_0 = -\omega_0 < 0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$, уопштени Дарбуов репер друге врсте се добија ротацијом Дарбуовог репера око просторне осе η за хиперболички угао $\theta(s) = \ln \omega_0$, а затим применом рефлексије у односу на просторну осу η .

Може се проверити да уопштени Дарбуови репери прве и друге врсте криве α задовољавају услове

$$(4.3.11) \quad \langle \tilde{T}, \tilde{T} \rangle = \langle \tilde{\zeta}, \tilde{\zeta} \rangle = \langle \tilde{T}, \tilde{\eta} \rangle = \langle \tilde{\zeta}, \tilde{\eta} \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle = 1, \quad \langle \tilde{T}, \tilde{\zeta} \rangle = \epsilon_1 = \pm 1,$$

$$(4.3.12) \quad \tilde{T} \times \tilde{\zeta} = \tilde{\eta}, \quad \tilde{\zeta} \times \tilde{\eta} = \epsilon_1 \tilde{\zeta}, \quad \tilde{\eta} \times \tilde{T} = \epsilon_1 \tilde{T},$$

$$(4.3.13) \quad \det(\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}) = [\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}] = 1.$$

У наставку ћемо аналогно одељцима 4.3.1 и 4.3.2, дефинисати кривине криве α у односу на њене уопштене Дарбуове репере.

Дефиниција 4.3.3. Кривине криве α дате формулама

$$(4.3.14) \quad \tilde{k}_n(s) = \langle \tilde{T}'(s), \tilde{\eta}(s) \rangle, \quad \tilde{k}_g(s) = \langle \tilde{T}'(s), \tilde{\zeta}(s) \rangle, \quad \tilde{\tau}_g(s) = \langle \tilde{\zeta}'(s), \tilde{\eta}(s) \rangle,$$

се редом називају *уопштена нормална кривина*, *уопштена геодезијска кривина* и *уопштена геодезијска торзија*.

Применом релација (4.3.11) и (4.3.14) може се доказати следеће тврђење.

Теорема 4.3.2. Ако је уопштени Дарбуов репер криве α облика (4.3.7) или (4.3.10), тада једначине репера гласе

$$(4.3.15) \quad \begin{bmatrix} \tilde{T}' \\ \tilde{\zeta}' \\ \tilde{\eta}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \tilde{k}_g & 0 & \tilde{k}_n \\ 0 & -\epsilon_1 \tilde{k}_g & \tilde{\tau}_g \\ -\epsilon_1 \tilde{\tau}_g & -\epsilon_1 \tilde{k}_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{\zeta} \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix}.$$

У теореме која следи, помоћу дефиниција 4.3.2, 4.3.3 и теореме 4.3.2 добијају се релације између кривина k_g , k_n , τ_g и $\tilde{k}_g$, $\tilde{k}_n$ и $\tilde{\tau}_g$.

Теорема 4.3.3. Кривине криве α у односу на Дарбуов репер и њене кривине у односу на уопштене Дарбуове репере (4.3.7) и (4.3.10), задовољавају једнакости

$$(4.3.16) \quad \begin{aligned} \tilde{k}_n(s) &= \mu(s)k_n(s), \\ \tilde{k}_g(s) &= k_g(s), \\ \tilde{\tau}_g(s) &= \frac{1}{\mu(s)}\tau_g(s), \end{aligned}$$

при чему функција $\mu(s) \neq 0$ задовољава диференцијалну једначину (4.3.9) ако је уопштени Дарбуов репер дат релацијом (4.3.7), односно $\mu(s) = \mu_0 \in \mathbb{R}_0$ ако је уопштени Дарбуов репер дат релацијом (4.3.10).

Доказ. Претпоставимо најпре да је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер прве врсте криве α облика (4.3.7). Диференцирањем релације $\tilde{T} = \mu T$ по s и применом релације (4.3.5), добијамо

$$(4.3.17) \quad \tilde{T}' = (\epsilon_1 \mu k_g + \mu')T + \mu k_n \eta.$$

Помоћу релација (4.3.7) и (4.3.15), налазимо

$$(4.3.18) \quad \tilde{T}' = \epsilon_1 \tilde{k}_g \tilde{T} + \tilde{k}_n \tilde{\eta} = (\epsilon_1 \tilde{k}_g \mu + \tilde{k}_n \lambda)T + \tilde{k}_n \eta.$$

Релације (4.3.17) и (4.3.18) дају

$$(4.3.19) \quad \tilde{k}_n = \mu k_n, \quad \tilde{k}_g = -\epsilon_1 \lambda k_n + \epsilon_1 \frac{\mu'}{\mu} + k_g.$$

Диференцирањем релације $\tilde{\eta} = \eta + \lambda T$ по s и применом (4.3.5), имамо да је

$$\tilde{\eta}' = (\lambda' + \epsilon_1 \lambda k_g - \epsilon_1 \tau_g)T - \epsilon_1 k_n \zeta + \lambda k_n \eta.$$

Релације (4.3.7) и (4.3.15) имплицирају

$$\tilde{\eta}' = (-\epsilon_1 \tilde{\tau}_g \mu + \tilde{k}_n \frac{\lambda^2}{2\mu})T - \epsilon_1 \tilde{k}_n \frac{1}{\mu} \zeta + \tilde{k}_n \frac{\lambda}{\mu} \eta.$$

На основу последње две релације добијамо

$$(4.3.20) \quad \tilde{\tau}_g = -\epsilon_1 \frac{\lambda'}{\mu} + \epsilon_1 \frac{\lambda^2}{2\mu} k_n - \frac{1}{\mu} \lambda k_g + \frac{1}{\mu} \tau_g.$$

Заменом $\mu' = \mu\lambda k_n$ у релацији (4.3.19) и $\lambda' = \frac{\lambda^2}{2}k_n - \epsilon_1\lambda k_g$ у релацији (4.3.20), следи да важи релација (4.3.16).

Претпоставимо сада да је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α дат релацијом (4.3.10). Диференцирањем релација $\tilde{\eta} = \eta$ и $\tilde{T} = \mu_0 T$ по s и применом релација (4.3.5) и (4.3.10), добијамо

$$(4.3.21) \quad -\epsilon_1\tau_g T - \epsilon_1 k_n \zeta = -\epsilon_1 \tilde{\tau}_g \mu_0 T - \epsilon_1 \tilde{k}_n \frac{1}{\mu_0} \zeta, \quad \epsilon_1 \tilde{k}_g \tilde{T} + \tilde{k}_n \tilde{\eta} = \mu_0(\epsilon_1 k_g T + k_n \eta).$$

Тада релација (4.3.21) имплицира

$$\tilde{k}_n = \mu_0 k_n, \quad \tilde{k}_g = k_g, \quad \tilde{\tau}_g = \frac{1}{\mu_0} \tau_g,$$

чиме је доказана релација (4.3.16). $\square$

Теорема 4.3.3 омогућава нову карактеризацију нул Картанових геодезијских кривих и линија кривине на временској површи.

ПОСЛЕДИЦА 4.3.2. Нул Картанова крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ је геодезијска линија и линија кривине ако и само ако је редом $\tilde{k}_g(s) = 0$ за свако s , односно $\tilde{\tau}_g(s) = 0$ за свако s .

ПРИМЕР 4.3.1. Уочимо B -скрол у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ са параметризацијом (слика 4.9)

$$x(s, t) = \alpha(s) + tB(s),$$

где је $\alpha(s) = (s, \sin s, \cos s)$ нул Картанова хелиса, B векторско поље њених бинормала, $s \in I \subset \mathbb{R}$, $s > 0$ и $t \in \mathbb{R}$. Рачунским путем налазимо да Картанов репер криве α гласи

$$(4.3.22) \quad \begin{aligned} T(s) &= (1, \cos s, -\sin s), \\ N(s) &= (0, -\sin s, -\cos s), \\ B(s) &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cos s, -\frac{1}{2} \sin s\right). \end{aligned}$$

Помоћу релација (4.3.2) и (4.3.22) следи $T \times N = \epsilon T = T$, па је $\epsilon = 1$. Применом (3.2.1) и (4.3.22) добијамо да су кривине криве α облика

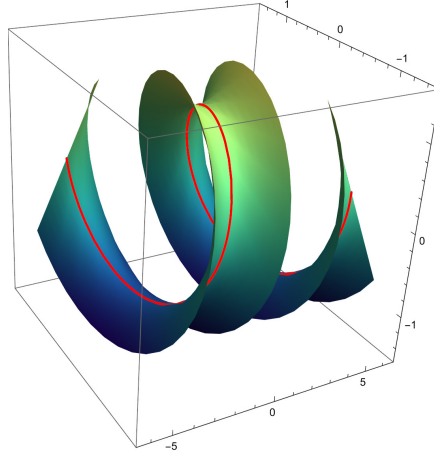
$$\kappa(s) = 1, \quad \tau(s) = -\frac{1}{2}.$$

Јединично нормално векторско поље B -скрола гласи

$$U(s, t) = \frac{x_s \times x_t}{\|x_s \times x_t\|} = -N(s) + \frac{t}{2}B(s).$$

Пошто је $U(s, t)$ просторно векторско поље за свако s и t , B -скрол је временска површ. Дарбуов репер криве α је облика

$$(4.3.23) \quad \begin{aligned} T(s) &= (1, \cos s, -\sin s), \\ \zeta(s) &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cos s, -\frac{1}{2} \sin s\right), \\ \eta(s) &= (0, \sin s, \cos s). \end{aligned}$$



Слика 4.9: Нул Картанова хелиса α на B -скролу

На основу релација (2.8.12) и (4.3.23), следи $\eta \times T = \epsilon_1 T = T$, одакле је $\epsilon_1 = 1$. Релације (4.3.4) и (4.3.23) дају

$$(4.3.24) \quad k_g(s) = 0, \quad k_n(s) = -1, \quad \tau_g(s) = -\frac{1}{2},$$

што значи да је α геодезијска крива. Заменом релације (4.3.24) у релацијама (4.3.8) и (4.3.9) и помоћу једнакости $\epsilon_1 = 1$, добијамо

$$(4.3.25) \quad \lambda(s) = \frac{2}{s}, \quad \mu(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Према дефиницији 4.3.1, уопштени Дарбуов репер прве врсте криве α гласи

$$(4.3.26) \quad \tilde{T}(s) = \frac{1}{s^2}T(s), \quad \tilde{\zeta}(s) = -2T(s) + s^2\zeta(s) - 2s\eta(s), \quad \tilde{\eta}(s) = \frac{2}{s}T(s) + \eta(s).$$

Применом релација (4.3.14) и (4.3.26) имамо да је

$$(4.3.27) \quad \tilde{k}_g(s) = 0, \quad \tilde{k}_n(s) = -\frac{1}{s^2}, \quad \tilde{\tau}_g(s) = -\frac{s^2}{2}.$$

На основу дефиниције 4.3.2, налазимо да је

$$(4.3.28) \quad \tilde{T}(s) = \mu_0 T(s), \quad \tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{\mu_0} \zeta(s), \quad \tilde{\eta}(s) = \eta(s),$$

где $\mu_0 \in \mathbb{R}_0$. Тада релације (4.3.14) и (4.3.28) дају

$$(4.3.29) \quad \tilde{k}_g(s) = 0, \quad \tilde{k}_n(s) = -\mu_0, \quad \tilde{\tau}_g(s) = -\frac{1}{2\mu_0}.$$

Према томе, на основу (4.3.24), (4.3.27) и (4.3.29) закључујемо да важи теорема 4.3.3. Како је $\epsilon = \epsilon_1 = 1$ и $k_n(s) = -1$, такође важи и тврђење теореме 4.3.1.

Случај (Б). Пошто је ζ нул векторско поље, аналогно случају (А) оно се може скалирати произвољном функцијом и на тај начин добити нови репер криве α ([31]).

Дефиниција 4.3.4. Уопштени Дарбуов репер прве врсте криве α је репер

$$(4.3.30) \quad \begin{aligned} \tilde{T}(s) &= \frac{1}{\mu(s)}T(s) - \epsilon_2 \frac{\lambda^2(s)}{2\mu(s)}\zeta(s) - \epsilon_2 \frac{\lambda(s)}{\mu(s)}\eta(s), \\ \tilde{\zeta}(s) &= \mu(s)\zeta(s), \\ \tilde{\eta}(s) &= \eta(s) + \lambda(s)\zeta(s), \end{aligned}$$

где су $\lambda(s) \neq 0$ и $\mu(s) \neq 0$ диференцијабилне функције које редом задовољавају Рикатијеву диференцијалну једначину

$$(4.3.31) \quad 2\epsilon_1\lambda'(s) - 2\lambda(s)k_g(s) - \epsilon_1\lambda^2(s)\tau_g(s) = 0,$$

и линеарну диференцијалну једначину првог реда

$$(4.3.32) \quad \mu'(s) - \mu(s)\lambda(s)\tau_g(s) = 0.$$

Дефиниција 4.3.5. Уопштени Дарбуов репер друге врсте криве α је репер

$$(4.3.33) \quad \begin{aligned} \tilde{T}(s) &= \frac{1}{\mu_0}T(s), \\ \tilde{\zeta}(s) &= \mu_0\zeta(s), \\ \tilde{\eta}(s) &= \eta(s), \end{aligned}$$

где је μ_0 произвољан реалан број различит од нуле.

Рачунским путем се може проверити да уопштени Дарбуови репери прве и друге врсте задовољавају услове

$$(4.3.34) \quad \langle \tilde{T}, \tilde{T} \rangle = \langle \tilde{\zeta}, \tilde{\zeta} \rangle = \langle \tilde{T}, \tilde{\eta} \rangle = \langle \tilde{\zeta}, \tilde{\eta} \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle = 1, \quad \langle \tilde{T}, \tilde{\zeta} \rangle = \epsilon_1 = \pm 1,$$

$$(4.3.35) \quad \tilde{T} \times \tilde{\zeta} = \tilde{\eta}, \quad \tilde{\zeta} \times \tilde{\eta} = \epsilon_1 \tilde{\zeta}, \quad \tilde{\eta} \times \tilde{T} = \epsilon_1 \tilde{T},$$

$$(4.3.36) \quad \det(\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}) = [\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}] = 1,$$

Кривине криве α у односу на уопштене Дарбуове репере (4.3.30) и (4.3.33) се уводе аналогно случају (А).

Дефиниција 4.3.6. Кривине криве α дате релацијама

$$(4.3.37) \quad \tilde{k}_n(s) = \langle \tilde{T}'(s), \tilde{\eta}(s) \rangle, \quad \tilde{k}_g(s) = \langle \tilde{T}'(s), \tilde{\zeta}(s) \rangle, \quad \tilde{\tau}_g(s) = \langle \tilde{\zeta}'(s), \tilde{\eta}(s) \rangle.$$

се редом називају *уопштена нормална кривина*, *уопштена геодезијска кривина* и *уопштена геодезијска торзија*.

Помоћу релација (4.3.34) и (4.3.37), може се доказати следећа теорема.

Теорема 4.3.4. Ако је уопштени Дарбуов репер криве α облика (4.3.30) или (4.3.33), једначине репера гласе

$$(4.3.38) \quad \begin{bmatrix} \tilde{T}' \\ \tilde{\zeta}' \\ \tilde{\eta}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \tilde{k}_g & 0 & \tilde{k}_n \\ 0 & -\epsilon_1 \tilde{k}_g & \tilde{\tau}_g \\ -\epsilon_1 \tilde{\tau}_g & -\epsilon_1 \tilde{k}_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{\zeta} \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix}.$$

Следеће тврђење даје релације између кривина k_g , k_n , τ_g и $\tilde{k}_g$, $\tilde{k}_n$ и $\tilde{\tau}_g$.

Теорема 4.3.5. Кривине криве α у односу на Дарбуов репер и у односу на уопштене Дарбуове репере (4.3.26) и (4.3.29), задовољавају једнакости

$$(4.3.39) \quad \begin{aligned} \tilde{k}_n(s) &= \frac{1}{\mu(s)} k_n(s), \\ \tilde{k}_g(s) &= k_g(s), \\ \tilde{\tau}_g(s) &= \mu(s) \tau_g(s), \end{aligned}$$

при чему функција $\mu(s) \neq 0$ задовољава диференцијалну једначину (4.3.31) ако је уопштени Дарбуов репер дат релацијом (4.3.29), односно $\mu(s) = \mu_0 \in \mathbb{R}_0$ ако је уопштени Дарбуов репер дат релацијом (4.3.32).

Доказ. Нека је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер дат релацијом (4.3.30). Диференцирањем релације $\zeta = \mu \zeta$ по s и применом (4.3.5) добијамо

$$(4.3.40) \quad \tilde{\zeta}' = (-\epsilon_1 \mu k_g + \mu') \zeta + \mu \tau_g \eta.$$

На основу (4.3.29) и (4.3.38), имамо да је

$$(4.3.41) \quad \tilde{\zeta}' = -\epsilon_1 \tilde{k}_g \tilde{\zeta} + \tilde{\tau}_g \tilde{\eta} = (-\epsilon_1 \tilde{k}_g \mu + \tilde{\tau}_g \lambda) \zeta + \tilde{\tau}_g \eta.$$

Претходне две релације дају

$$(4.3.42) \quad \tilde{\tau}_g = \mu \tau_g, \quad \tilde{k}_g = \epsilon_1 \lambda \tau_g - \epsilon_1 \frac{\mu'}{\mu} + k_g.$$

Диференцирањем релације $\tilde{\eta} = \eta + \lambda \zeta$ и применом (4.3.5), налазимо да је

$$\tilde{\eta}' = -\epsilon_1 \tau_g T + (\lambda' - \epsilon_1 \lambda k_g - \epsilon_1 k_n) \zeta + \lambda \tau_g \eta.$$

Помоћу релација (4.3.30) и (4.3.38) следи

$$\tilde{\eta}' = -\epsilon_1 \tau_g T + \left(\frac{\lambda^2}{2} \tau_g - \epsilon_1 \mu \tilde{k}_n \right) \zeta + \lambda \tau_g \eta.$$

На основу последње две релације добијамо

$$(4.3.43) \quad \tilde{k}_n = -\epsilon_1 \frac{\lambda'}{\mu} + \epsilon_1 \frac{\lambda^2}{2\mu} \tau_g + \frac{1}{\mu} \lambda k_g + \frac{1}{\mu} k_n.$$

С друге стране, помоћу (4.3.31) и (4.3.32) налазимо да је

$$\lambda' = \frac{\lambda^2}{2} \tau_g + \epsilon_1 \lambda k_g, \quad \mu' = \mu \lambda \tau_g.$$

Заменом претходних израза за λ' и μ' у релацијама (4.3.42) и (4.3.43), добијамо тражену релацију (4.3.39).

Претпоставимо сада да је $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ уопштени Дарбуов репер облика (4.3.33). Дифференцирањем једнакости $\tilde{\eta} = \eta$ и $\tilde{T} = \frac{1}{\mu_0}T$ по s и применом (4.3.5) и (4.3.37) налазимо да је

$$(4.3.44) \quad -\epsilon_1 \tau_g T - \epsilon_1 k_n \zeta = -\epsilon_1 \tilde{\tau}_g \frac{1}{\mu_0} T - \epsilon_1 \tilde{k}_n \mu_0 \zeta, \quad \epsilon_1 \tilde{k}_g \tilde{T} + \tilde{k}_n \tilde{\eta} = \frac{1}{\mu_0} (\epsilon_1 k_g T + k_n \eta).$$

Претходна релација даје

$$\tilde{k}_n = \mu_0 k_n, \quad \tilde{k}_g = k_g, \quad \tilde{\tau}_g = \frac{1}{\mu_0} \tau_g,$$

чиме је теорема доказана. □

На основу претходне теореме, аналогно случају (А) добијамо нову карактеризацију нул Картанових кривих које су геодезијске криве и линије кривине на временској површи.

Последица 4.3.3. Нул Картанова крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ је геодезијска линија ако и само ако је $\tilde{k}_g(s) = 0$ за свако s , односно линија кривине ако и само ако је $\tilde{\tau}_g(s) = 0$ за свако s .

5 Криве одређене уопштеним Дарбуовим репером

Изофотне и силуетне криве (контурни генератори) играју важну улогу у диференцијалној геометрији кривих и површи, теорији визуализације, визуелној психофизици ([9, 50, 61]) и рачунарски подржаном геометријском дизајну ([77, 73, 80]). Изофотне криве имају особину да нормала површи дуж таквих кривих образује константан угао са датим фиксираним правцем који представља осу криве ([19]). Оне се могу интерпретирати као криве чије су тачке подједнако осветљене паралелним светлосним зрацима. Ако је нормала површи ортогонална на осу, добија се *силуетна крива* која раздваја осветљени део површи од њеног неосветљеног дела.

Посебне врсте хелиса у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$, дефинисане помоћу векторског поља које лежи у нормалној, ректификационој, или оскулаторној равни криве и образује константан угао са датим фиксираним правцем, уведене су у референци [57]. Такво векторско поље је константно у односу на Френеов репер, тј. задовољава услов $V' = D \times V$, где је D Дарбуов вектор Френеовог репера. Одговарајуће врсте хелиса и изофотних кривих добијених применом нумеричких метода се могу наћи у референцама [74, 21, 71].

Минковски Питагорејске ходографске криве (или краће МПХ криве) су посебна врста полиномијалних кривих у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$, чији се квадрат брзине може написати у облику полинома ([62]). Ако се глатки сегмент трансформације медијалне осе представи у терминима МПХ криве, граничне криве одговарајућег домена су рационалне криве, тј. пресликавања која у хомогеним координатама имају полиномијалну репрезентацију. Познато је да су једине МПХ кубне криве просторне кубне уопштене хелисе и нул Картанове кубне уопштене хелисе (нул Картанове кубике).

Изофотне криве, релативно нормалне-искошене хелисе и уопштене хелисе које леже на површи у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$, имају особину да одговарајуће векторско поље њиховог Дарбуовог репера $\{T, \zeta, \eta\}$ редом задовољава услов

$$\langle \eta, U \rangle = \text{constant} \neq 0, \quad \langle \zeta, V \rangle = \text{constant}, \quad \langle T, W \rangle = \text{constant},$$

где су $U, V, W \in \mathbb{E}_1^3$ осе поменутих кривих. Одговарајуће релације између нул Картанових изофотних кривих, релативно нормалних-искошених хелиса и уопштених хелиса које леже на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, добијене су у раду [64].

У овом поглављу ћемо представити оригиналне резултате докторске дисертације који су публиковани у радовима [17, 31]. У оквиру поменутих резултата, дефинисаћемо *нул Картанове нормалне изофотне и нормалне силуетне криве* у терминима векторског поља $\tilde{\eta} = \eta + \lambda T$ које лежи у нормалној равни криве, припада њеном

уопштеном Дарбуовом реперу прве врсте и задовољава услов $\langle \tilde{\eta}, W \rangle = \text{constant}$, где је W оса криве. Аналогно ћемо увести нул Картанове *ректификационе изофотне* и *ректификационе силуетне криве* у терминима векторског поља $\tilde{\eta} = \eta + \lambda \zeta$ које лежи у ректификационој равни криве, припада њеном уопштеном Дарбуовом реперу прве врсте и задовољава услов $\langle \tilde{\eta}, W \rangle = \text{constant}$, где је W оса криве. Доказаћемо да су све четири поменуте врсте кривих са константном геодезијском кривином и константном геодезијском торзијом, нул Картанове хелисе и нул Картанове кубне криве и одредити параметарске једначине њихових оса. Такође ћемо добити релацију између Минковски Питагорејских ходографских кривих и нул Картанових нормалних изофотних и нормалних силуетних кривих. Даћемо нумеричке примере нул Картанових нормалних изофотних и нормалних силуетних кривих који су добијени интеграљењем система диференцијалних једначина првог реда при почетним условима. Доказаћемо да оса нул Картанове ректификационе изофотне криве са константним кривином $k_g \neq 0$ и $\tau_g \neq 0$ има правац Дарбуовог вектора Дарбуовог репера. Такође ћемо доказати да су нул Картанове ректификационе изофотне криве са константним кривином $k_g \neq 0$ и $\tau_g \neq 0$ уопштене хелисе, релативно нормалне-искошене хелисе и изофотне криве у односу на исту осу.

5.1 Нул Картанове нормалне изофотне криве

Дарбуов репер $\{T, \zeta, \eta\}$ дуж регуларне криве која лежи на површи у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$ одређује три међусобно ортогоналне равни $T^\perp$, $\zeta^\perp$ и $\eta^\perp$, које редом називамо *нормална*, *ректификациона* и *оскулаторна раван* ([32]). У овом одељку ћемо уопштити појам нул Картанове изофотне криве помоћу векторског поља које лежи у нормалној равни криве и припада њеном уопштеном Дарбуовом реперу прве врсте. На тај начин ћемо дефинисати две нове врсте кривих - *нормалне изофотне* и *нормалне силуетне криве*. У том циљу, учимо векторско поље

$$(5.1.1) \quad \tilde{\eta}(s) = \eta(s) + \lambda(s)T(s)$$

уопштеног Дарбуовог репера прве врсте нул Картанове криве α на временској површи. У свакој тачки криве, оно лежи у њеној нормалној равни $T^\perp = \text{span}\{T, \eta\}$, при чему диференцијабилна функција $\lambda \neq 0$ задовољава Рикатијеву диференцијалну једначину

$$2\epsilon_1 \lambda'(s) + 2\lambda(s)k_g(s) - \epsilon_1 \lambda^2(s)k_n(s) = 0.$$

Напоменимо да је векторско поље $\tilde{\eta}$ константно у односу на уопштени Дарбуов репер прве врсте. Константна векторска поља у односу на Френеов репер су разматрана у референци [57]. Сада смо у могућности да дефинишемо нову врсту нул Картанових кривих, која представља уопштење изофотних кривих.

Дефиниција 5.1.1. Нул Картанова крива α на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са уопштеним Дарбуовим репером прве врсте $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ се назива *нормална изофотна крива са осом W* , ако постоји константан вектор W у простору $\mathbb{E}_1^3$ тако да је

$$(5.1.2) \quad \langle \tilde{\eta}, W \rangle = c_0,$$

$c_0 \in \mathbb{R}_0$.

У наставку ћемо добити карактеризације нул Картанових нормалних изофотних кривих, при чему ћемо претпоставити да су њихове кривине $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$ константне. На основу теореме 4.3.1 имамо да је нормална кривина таквих кривих $k_n(s) = \pm 1$. Најпре ћемо доказати следећу теорему за нул Картанове криве на временској површи.

Теорема 5.1.1. Нул Картанова крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са константном геодезијском кривином $k_g(s)$ и константном геодезијском торзијом $\tau_g(s)$ је нул Картанова хелиса или нул Картанова кубна крива.

Доказ. Претпоставимо да нул Картанова крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ има константне кривине $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$. Помоћу релација (3.2.1) и (4.3.5) налазимо да је

$$T'(s) = N(s) = \epsilon_1 k_g(s) T(s) + k_n(s) \eta(s).$$

Диференцирањем претходне једначине по s , добијамо

$$N'(s) = (\epsilon_1 k'_g(s) + k_g^2(s) - \epsilon_1 k_n(s) \tau_g(s)) T(s) - \epsilon_1 k_n^2(s) \zeta(s) + \epsilon_1 k_g(s) k_n(s) \eta(s).$$

Тада је $\langle N'(s), N'(s) \rangle = -2\epsilon \tau(s) = -2\epsilon_1 k'_g(s) - k_g^2(s) - 2\epsilon \tau_g(s)$. Последња релација даје

$$(5.1.3) \quad \tau(s) = \tau_g(s) + \frac{\epsilon}{2} k_g^2(s) + \epsilon \epsilon_1 k'_g(s).$$

Према томе, α је нул Картанова хелиса ако је $\tau(s) = \text{constant} \neq 0$, односно нул Картанова кубна крива ако је $\tau(s) = 0$. $\square$

Према претходној теорему, нул Картанове нормалне изофотне криве са константним кривинама $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$, су нул Картанове хелисе или нул Картанове кубне криве. У циљу добијања параметарских једначина њихових оса и релација у односу на друге врсте кривих, можемо разликовати четири случаја.

(1) $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$;

Теорема 5.1.2. Нека је α нул Картанова нормална изофотна крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$. Тада њена оса има параметарску једначину

$$(5.1.4) \quad W(s) = -\frac{c_0 \tau_g(s)}{k_g(s)} T(s) - \frac{\epsilon \epsilon_1 c_0}{k_g(s)} \zeta(s) - c_0 \eta(s),$$

при чему је $c_0 = \langle \tilde{\eta}, W \rangle \in \mathbb{R}_0$.

Доказ. Према теорему 4.3.1, имамо да је нормална кривина криве α облика

$$(5.1.5) \quad k_n(s) = -\epsilon \epsilon_1.$$

Заменом (5.1.5) у релацији (4.3.8) и решавањем Рикатијеве диференцијалне једначине, налазимо да је $\lambda(s) = -2\epsilon k_g(s)$. Отуда је $\lambda(s) = \lambda_0 \in \mathbb{R}_0$ и

$$(5.1.6) \quad k_g(s) = -\frac{1}{2} \epsilon \lambda_0.$$

Претпоставимо да се оса криве α може написати у облику

$$(5.1.7) \quad W(s) = a(s)T(s) + b(s)\zeta(s) + c(s)\eta(s),$$

где су $a(s)$, $b(s)$ и $c(s)$ произвољне диференцијабилне функције по параметру псеудодужине лука s . Диференцирањем релације (5.1.7) по s и применом (4.3.5), добијамо систем од три диференцијалне једначине првог реда

$$(5.1.8) \quad \begin{aligned} a'(s) + \epsilon_1 a(s)k_g(s) - \epsilon_1 c(s)\tau_g(s) &= 0, \\ b'(s) - \epsilon_1 b(s)k_g(s) - \epsilon_1 c(s)k_n(s) &= 0, \\ c'(s) + a(s)k_n(s) + b(s)\tau_g(s) &= 0. \end{aligned}$$

Релације (2.8.7), (5.1.1), (5.1.2) и (5.1.7) дају

$$(5.1.9) \quad c(s) = c_0 - \epsilon_1 \lambda(s)b(s).$$

Како је $\lambda(s) = \lambda_0$, заменом (5.1.9) у (5.1.8), претходни систем једначина постаје

$$(5.1.10) \quad \begin{aligned} a'(s) + \epsilon_1 a(s)k_g(s) - \epsilon_1 \tau_g(s)(c_0 - \epsilon_1 \lambda_0 b(s)) &= 0, \\ b'(s) - \epsilon_1 b(s)k_g(s) - \epsilon_1 k_n(s)(c_0 - \epsilon_1 \lambda_0 b(s)) &= 0, \\ -\epsilon_1 \lambda_0 b'(s) + a(s)k_n(s) + b(s)\tau_g(s) &= 0. \end{aligned}$$

Из друге и треће једначине система (5.1.10) и помоћу (5.1.6), налазимо да је

$$(5.1.11) \quad a(s) = -\frac{2\epsilon_1 c_0 \tau_g(s)}{\lambda_0 k_n(s)}, \quad b(s) = \frac{2\epsilon_1 c_0}{\lambda_0}.$$

Заменом $\lambda_0 = -2\epsilon k_g(s)$ и $k_n(s) = -\epsilon \epsilon_1$ у (5.1.11), добијамо

$$(5.1.12) \quad a(s) = -\frac{c_0 \tau_g(s)}{k_g(s)}, \quad b(s) = \frac{c_0 k_n(s)}{k_g(s)}.$$

С друге стране, помоћу (5.1.11), (5.1.6) и (5.1.9), следи да је

$$(5.1.13) \quad c(s) = -c_0.$$

Коначно, заменом (5.1.12) и (5.1.13) у (5.1.7), добијамо (5.1.4). $\square$

Применом теореме 5.1.2 и релације (4.3.1), налазимо да је

$$\langle T, W \rangle = \frac{\epsilon_1 c_0 k_n(s)}{k_g(s)} = c_1, \quad \langle \zeta, W \rangle = -\frac{\epsilon_1 c_0 \tau_g(s)}{k_g(s)} = c_2, \quad \langle \eta, W \rangle = -c_0 = c_3,$$

где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_0$. На тај начин добијамо релацију између нул Картанових нормалних изофотних кривих и осталих карактеристичних врста кривих.

Теорема 5.1.3. Нул Картанова нормална изофотна крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$, је уопштена хелиса, релативно нормална-искошена хелиса и изофотна крива у односу на исту осу.

У следећој теореми ћемо доказати да оса нул Картанове нормалне изофотне криве са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$ има правац Дарбуовог вектора Дарбуовог репера те криве.

Теорема 5.1.4. Оса нул Картанове нормалне изофотне криве α на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$, је колинеарна са Дарбуовим вектором Дарбуовог репера.

Доказ. Нека је D Дарбуов вектор Дарбуовог репера криве α . Помоћу релација (4.3.6) и (5.1.4) следи

$$W(s) = -\frac{c_0}{k_g(s)}D(s),$$

што је и требало доказати. □

Релације (4.3.8), (5.1.1) и (5.1.2) имплицирају следећу интересантну особину нул Картанових кривих.

Последица 5.1.1. Ако је нул Картанова крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$ изофотна крива и уопштена хелиса у односу на исту осу, тада је она нормална изофотна крива у односу на ту осу.

(2) $k_g(s) = 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$;

Заменом кривина $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$ у релацији (5.1.8) и применом (5.1.9), долазимо до контрадикције. Отуда важи следећа терема.

Теорема 5.1.5. Не постоје нул Картанове нормалне изофотне криве на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са кривинама $k_g(s) = 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$.

(3) $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = 0$;

Заменом кривина $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$ у релацији (5.1.8) и применом релације (5.1.9), такође добијамо контрадикцију.

Теорема 5.1.6. Не постоје нул Картанове нормалне изофотне криве на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са кривинама $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = 0$.

(4) $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$;

Теорема 5.1.7. Нека је α нул Картанова нормална изофотна крива са кривинама $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$ која лежи на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$. Тада је њена оса облика

$$(5.1.14) \quad W(s) = -c_0\epsilon_1 k_n(s)s\zeta(s) - c_0\eta(s),$$

при чему је $c_0 = \langle \tilde{\eta}, W \rangle \in \mathbb{R}_0$.

Доказ. Претпоставимо да је α нул Картанова нормална изофотна крива са осом W и кривинама $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$. Тада је α нул Картанова кубна крива, јер на основу релације (5.1.3) важи $\tau(s) = 0$ за свако s . Заменом кривине $k_n(s) = -\epsilon\epsilon_1$ у релацији

(4.3.8), добијамо $\lambda(s) = \frac{2\epsilon\epsilon_1}{s}$. Осим тога, помоћу релација $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$, $\lambda(s) = \frac{2\epsilon\epsilon_1}{s}$ и (5.1.8), добијамо следећи систем диференцијалних једначина

$$(5.1.15) \quad \begin{aligned} a'(s) &= 0, \\ b'(s) - \epsilon_1 c(s) k_n(s) &= 0, \\ c'(s) + a(s) k_n(s) &= 0. \end{aligned}$$

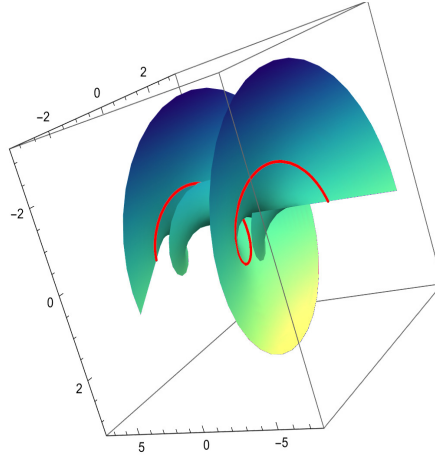
Из прве једначине претходног система једначина следи да је $a(s) = a_0 = \text{constant}$. Ако је $a_0 \neq 0$, долазимо до контрадикције. Ако је $a_0 = 0$, помоћу релације (5.1.15) налазимо да је $b(s) = -\epsilon_1 c_0 s k_n(s)$, $c(s) = -c_0$. Заменом $b(s)$ и $c(s)$ у релацији (5.1.7), добијамо релацију (5.1.14). $\square$

ПОСЛЕДИЦА 5.1.2. Ако је нул Картанова кубна крива нормална изофотна крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, тада је она изофотна крива и релативно нормална-искошена хелиса у односу на исту осу.

ПРИМЕР 5.1.1. Посматрајмо временску преносну површ M у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ са параметарском једначином

$$x(s, t) = \alpha(s) + t(1, -\sin s, -\cos s),$$

при чему је $\alpha(s) = (s, \sin s, \cos s)$ нул Картанова хелиса и $s, t \in \mathbb{R}$ (слика 5.1).



Слика 5.1: Нул Картанова хелиса α на површи M

Рачунским путем налазимо да Дарбуов репер криве α гласи

$$(5.1.16) \quad \begin{aligned} T(s) &= (1, \cos s, -\sin s), \\ \zeta(s) &= (1, -\sin s, -\cos s), \\ \eta(s) &= (1, \cos s - \sin s, -\sin s - \cos s). \end{aligned}$$

Помоћу релација (4.3.4) и (5.1.16) следи да су кривине криве α облика

$$(5.1.17) \quad k_n(s) = 1, \quad k_g(s) = 1, \quad \tau_g(s) = -1.$$

Како је $\epsilon = 1$, имамо да је $\lambda(s) = -2\epsilon k_g(s) = -2$. Дакле, векторско поље $\tilde{\eta}$ гласи

$$\tilde{\eta}(s) = \eta(s) - 2T(s) = (-1, -\sin s - \cos s, \sin s - \cos s).$$

Уочимо осу W са параметарском једначином (5.1.4). На основу релација (5.1.4), (5.1.16) и (5.1.17) добијамо да је $W(s) = (c_0, 0, 0)$. Како је $\langle \tilde{\eta}, W \rangle = c_0$, закључујемо да је α нормална изофотна крива са осом W . Једноставним рачуном се може проверити да је α уопштена хелиса, релативно нормална-искошена хелиса и изофотна крива у односу на исту осу, што значи да важи тврђење теореме 5.1.3. Како је Дарбуов вектор Дарбуовог репера $D(s) = \tau_g(s)T(s) - k_n(s)\zeta(s) + k_g(s)\eta(s)$, помоћу (5.1.16) и (5.1.17) налазимо да је $D(s) = (-1, 0, 0)$. Према томе, он је колинеаран са осом W , што значи да важи теорема 5.1.4.

5.2 Нул Картанове нормалне силуетне криве

У овом одељку ћемо на сличан начин уопштити нул Картанове силуетне криве и приказати резултате публиковане у раду [17].

Дефиниција 5.2.1. Нул Картанова крива α на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са уопшћеним Дарбуовим репером прве врсте $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ се назива *нормална силуетна крива са осом W* , ако постоји константан вектор W тако да је

$$(5.2.1) \quad \langle \tilde{\eta}, W \rangle = 0.$$

На основу теореме 5.1.1 нул Картанове криве на временској површи са константним кривинама $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$, су нул Картанове хелисе или нул Картанове кубне криве. Према томе, нул Картанове нормалне силуетне криве на временској површи са константним кривинама $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$, су криве поменуте врсте. У наставку ћемо дати карактеризацију таквих кривих и притом разликовати четири могућа случаја.

(1) $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$;

Теорема 5.2.1. Не постоје нул Картанове нормалне силуетне криве на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$.

Доказ. Претпоставимо да је α нул Картанова нормална силуетна крива са осом W облика (5.1.7) и константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$. Тада важе релације (5.1.5) и (5.1.6). Заменом $c_0 = 0$, $\lambda(s) = \lambda_0 \in \mathbb{R}_0$, (5.1.5) и (5.1.6) у релацији (5.1.8), добијамо систем диференцијалних једначина

$$(5.2.2) \quad \begin{aligned} a'(s) - \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_1\lambda_0 a(s) + \lambda_0\tau_g(s)b(s) &= 0, \\ b'(s) + \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_1\lambda_0 b(s) - \epsilon\epsilon_1\lambda_0 a(s) &= 0, \\ -\epsilon_1\lambda_0 b'(s) - \epsilon\epsilon_1 a(s) + b(s)\tau_g(s) &= 0. \end{aligned}$$

Из друге једначине система једначина (5.2.2), налазимо

$$(5.2.3) \quad b(s) = e^{-\epsilon_1 s k_g(s)}.$$

Релације (3.2.2), (5.1.1), (5.1.6), (5.1.7), (5.2.3) и $\langle \tilde{\eta}, W \rangle = 0$ дају

$$c(s) = 2\epsilon\epsilon_1 k_g(s) e^{-\epsilon_1 s k_g(s)}.$$

Помоћу треће једначине система једначина (5.2.2) и релације (5.2.3), добијамо

$$(5.2.4) \quad a(s) = e^{-\epsilon_1 s k_g(s)} (\epsilon\epsilon_1 \tau_g(s) - 2\epsilon_1 k_g^2(s)).$$

Такође, помоћу релације (5.2.4) и прве једначине система (5.2.2), имамо да је

$$\tau_g(s) = e^{2\epsilon_1 s k_g(s)}.$$

Према томе, геодезијска торзија $\tau_g(s)$ није константна, што је контрадикција. $\square$

(2) $k_g(s) = 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$;

У овом случају, заменом кривина $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$ у релацији (5.1.8) и применом (5.1.9), такође долазимо до контрадикције.

Теорема 5.2.2. Не постоје нул Картанове нормалне силуетне криве на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са кривинама $k_g(s) = 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$.

(3) $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = 0$;

Следећа теорема се може доказати аналогно теорему 5.1.7, па изостављамо њен доказ.

Теорема 5.2.3. Нека је α нул Картанова нормална силуетна крива са кривинама $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = 0$, која лежи на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$. Тада она има светлосну осу са параметарском једначином

$$(5.2.5) \quad U(s) = e^{-2\epsilon_1 s k_g(s)} \left(T(s) - \frac{\epsilon_1}{2k_g^2(s)} \zeta(s) - \frac{\epsilon}{k_g(s)} \eta(s) \right).$$

(4) $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$;

Теорема 5.2.4. Нека је α нул Картанова нормална силуетна крива са кривинама $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$, која лежи на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$. Тада она има светлосну осу са параметарском једначином

$$(5.2.6) \quad U(s) = a_0 T - \epsilon_1 a_0 \frac{s^2}{2} \zeta(s) + \epsilon\epsilon_1 a_0 s \eta(s),$$

где $a_0 \in \mathbb{R}_0$.

Последица 5.2.1. Ако је нул Картанова кубна крива нормална силуетна крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, тада је она релативно нормална-искошена хелиса у односу на исту осу.

Минковски Питагорејске ходографске криве (МПХ криве) су посебна врста полиномијалних кривих у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$, које имају примене у рачунарској геометрији и рачунарски подржаном геометријском дизајну. Познато је да су једине МПХ кубне криве просторне кубне уопштене хелисе са параметарским једначинама

$$\alpha(s) = (3s^2, s^3 + 3s, \lambda(s^3 - 3s)), \quad \alpha(s) = (\lambda(3s^3 + s), 3s^2, s - 3s^3), \quad \alpha(s) = (6s, 3s^2, s^3 - 6s),$$

$\lambda = \text{constant} \neq 0$, као и нул Картанове кубне уопштене хелисе са параметарском једначином ([51])

$$\alpha(s) = \frac{1}{6}(s + 3s^3, s - 3s^3, 3s^2).$$

У следећој теореме ћемо дати интересантну релацију између МПХ кубних кривих и нул Картанових нормалних изофотних и нормалних силуетних кривих.

Теорема 5.2.5. Нул Картанове нормалне изофотне и нормалне силуетне криве на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, које су нул Картанове кубне криве, су МПХ кубне криве.

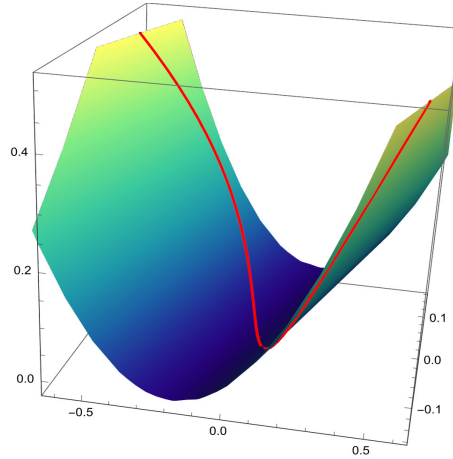
ПРИМЕР 5.2.1. Нека је M временска преносна површ у простору $\mathbb{E}_1^3$ са параметризацијом

$$x(s, t) = \alpha(s) + t(1, 1, 0),$$

при чему је

$$\alpha(s) = \left(\frac{s^3}{4} + \frac{s}{3}, \frac{s^3}{4} - \frac{s}{3}, \frac{s^2}{2} \right).$$

нул Картанова кубна крива и $s, t \in \mathbb{R}$ (слика 5.2).



Слика 5.2: Нул Картанова кубна крива α на временској површи M

Дарбуов репер криве α гласи

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(\frac{3s^2}{4} + \frac{1}{3}, \frac{3s^2}{4} - \frac{1}{3}, s \right), \\ \zeta(s) &= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right), \\ \eta(s) &= \left(\frac{3s}{2}, \frac{3s}{2}, 1 \right). \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Помоћу релација (4.3.4) и (5.2.7) налазимо да су кривине криве α облика

$$(5.2.8) \quad k_n(s) = 1, \quad k_g(s) = 0, \quad \tau_g(s) = 0.$$

Заменом $k_g(s) = 0$ у (4.3.8), добијамо $\lambda(s) = -\frac{2}{s}$. Отуда је

$$\tilde{\eta}(s) = \eta(s) - \frac{2}{s}T(s) = \left(-\frac{2}{3s}, \frac{2}{3s}, -1\right).$$

Уочимо осу U са параметарском једначином (5.2.6). Помоћу релација (5.2.6), (5.2.7) и $\epsilon = -\epsilon_1 = 1$ добијамо $U(s) = (\frac{a_0}{3}, -\frac{a_0}{3}, 0)$. Како је $\langle \tilde{\eta}, U \rangle = 0$, закључујемо да је крива α нормална силуетна крива са светлосном осом U . Такође, на основу последице 5.2.1 следи да је крива α релативно нормална-искошена хелиса у односу на исту осу.

Уочимо сада осу W са параметарском једначином (5.1.14). Применом релација (5.1.14), (5.2.7), (5.2.8) и $\epsilon = -\epsilon_1 = 1$, добијамо $W(s) = (0, 0, -c_0)$. Није тешко проверити да је $\langle \tilde{\eta}, W \rangle = c_0$, што значи да је крива α нормална изофотна крива са просторном осом W .

5.3 Нумеричко израчунавање нул Картанових нормалних изофотних и нормалних силуетних кривих

Приказаћемо нумеричке примере нул Картанових нормалних изофотних и нормалних силуетних кривих користећи параметарску једначину временске површи, параметарску једначину осе и геодезијску кривину $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ таквих кривих. Означимо са M временску површ у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ са параметризацијом

$$(5.3.1) \quad x(u, t) = (x_1(u, t), x_2(u, t), x_3(u, t)),$$

при чему су x_1 , x_2 и x_3 произвољне диференцијабилне функције. Нека је $\alpha : I \rightarrow M$ нул Картанова крива са параметарском једначином $\alpha(s) = x(u(s), t(s))$, где је $s \in I \subset \mathbb{R}$ параметар псеудо-дужине лука. Тада тангентно векторско поље криве α гласи

$$(5.3.2) \quad T(s) = \alpha'(s) = x_u u'(s) + x_t t'(s),$$

при чему су $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ и $x_t = \frac{\partial x}{\partial t}$ парцијални изводи параметризације $x(u, t)$ по u и t редом. Коефицијенти прве фундаменталне форме површи M су облика

$$E = \langle x_u, x_u \rangle, \quad F = \langle x_u, x_t \rangle, \quad G = \langle x_t, x_t \rangle.$$

Помоћу релације (5.3.2) и услова $\langle T, T \rangle = 0$, добијамо

$$(5.3.3) \quad Eu'^2 + 2Fu't' + Gt'^2 = 0.$$

У наставку ћемо у оквиру случајева (А) и (Б) решавањем система диференцијалних једначина при почетним условима и применом функције *ode 45* програмског пакета *MATLAB*, израчунати потребан број тачака које генеришу нул Картанову нормалну изофотну и нормалну силуетну криву.

(А) Нумеричко израчунавање нул Картанове нормалне изофотне криве.

Претпоставимо да је дата параметарска једначина (5.3.1) временске површи, параметарска једначина осе W и геодезијска кривина $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ нул Картанове нормалне изофотне криве α . Према дефиницији 5.2.1 имамо да је

$$(5.3.4) \quad \langle \tilde{\eta}, W \rangle = c_0,$$

$c_0 \in \mathbb{R}_0$. Заменом (5.1.1) у (5.3.4), добијамо

$$\langle \eta + \lambda T, W \rangle = c_0.$$

Помоћу релација $\lambda(s) = -2\epsilon k_g(s)$ и (5.3.2), претходна релација постаје

$$(5.3.5) \quad Au' + Bt' + C = 0,$$

при чему одговарајући коефицијенти гласе

$$(5.3.6) \quad A = -2\epsilon k_g \langle x_u, W \rangle, \quad B = -2\epsilon k_g \langle x_t, W \rangle, \quad C = 2 \frac{[x_u, x_t, W]}{||x_u \times x_t||}.$$

Претпоставимо да је $A \neq 0$. Помоћу релација (5.3.3) и (5.3.5), добија се квадратна једначина

$$(5.3.7) \quad \left(\frac{EB^2}{A^2} - \frac{2BF}{A} + G \right) t'^2 + \left(\frac{2C(BE - AF)}{A^2} \right) t' + \frac{EC^2}{A^2} = 0.$$

Уведимо смене

$$(5.3.8) \quad M = \frac{EB^2}{A^2} - \frac{2BF}{A} + G, \quad N = \frac{2C(BE - AF)}{A^2}, \quad P = \frac{EC^2}{A^2}.$$

Заменом (5.3.8) у (5.3.7) и претпостављајући да је $M \neq 0$, добија се квадратна једначина

$$(5.3.9) \quad Mt'^2 + Nt' + P = 0.$$

Релације (5.3.5) и (5.3.9) дају систем линеарних диференцијалних једначина првог реда

$$(5.3.10) \quad u' = -\frac{Bt' + C}{A}, \quad t' = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4MP}}{2M}.$$

Ако је $N^2 - 4MP \geq 0$, нумеричком интеграцијом система једначина (5.3.10) добијамо четири или две нул Картанове нормалне изофотне криве које пролазе кроз тачку $x(u_0, t_0)$. С друге стране, ако је $N^2 - 4MP < 0$, не постоје нул Картанове нормалне изофотне криве са датом осом, параметарском једначином временске површи и геодезијском кривином $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$.

ПРИМЕР 5.3.1. Нека је дат B -скрол са параметризацијом

$$x(u, t) = \beta(u) + tB(u),$$

где је $\beta(u) = (u, \sin u, \cos u)$ нул Картанова хелиса и $B(u) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cos u, -\frac{1}{2} \sin u)$ вектор бинормале. Претпоставимо да је α нул Картанова нормална изофотна крива која лежи на B -скролу са осом $W = (2, 0, 0)$ и геодезијском кривином $k_g(s) = 1$. Рачунским путем налазимо да је

$$\langle x_u, W \rangle = -2, \quad \langle x_t, W \rangle = 1, \quad E = \frac{t^2}{4} \quad F = 1, \quad G = 0.$$

Помоћу последње релације и релација (5.3.6) и (5.3.8), имамо да је

$$(5.3.11) \quad A = 4\epsilon, \quad B = -2\epsilon, \quad C = t, \quad M = \frac{t^2}{16} + 1, \quad N = \frac{-\epsilon t^3 - 8\epsilon t}{16}, \quad P = \frac{t^4}{64}.$$

Пошто је $N^2 - 4MP \geq 0$, заменом релације (5.3.11) у релацији (5.3.10), добијамо систем диференцијалних једначина

$$(5.3.12) \quad u' = \frac{2\epsilon t' - t}{4\epsilon}, \quad t' = \frac{\epsilon t^3 + 8\epsilon t \pm 8t}{2t^2 + 32}.$$

Решења система једначина (5.3.12) добијена применом методе Рунге-Кута и функције *ode 45* програмског пакета *MATLAB* при почетним условима $u(0) = 0$ и $t(0) = 1$, дата су у Табели 5.1 за $\epsilon = 1$, односно у Табели 5.2 за $\epsilon = -1$.

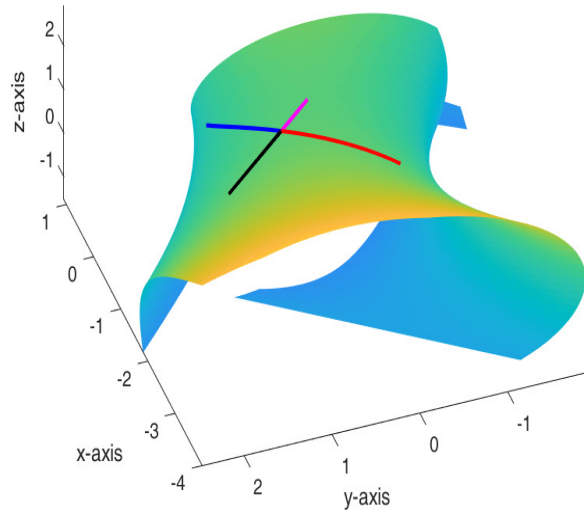
Табела 5.1: Решења система једначина (5.3.12) за $\epsilon = 1$

(а) Нул Картанова нормална изофотна крива (црна)			(б) Нул Картанова нормална изофотна крива (црвена)		
почетна тачка	последње три вредности за u	последње три вредности за t	почетна тачка	последње три вредности за u	последње три вредности за t
$u(0) = 0$	0	1.1052	$u(0) = 0$	-0.0899	1.0114
$t(0) = 1$	0	1.1681	$t(0) = 1$	-0.0922	1.0117
	0	1.2214		-0.0946	1.0120
$u(0) = 0$	0	1.3499	$u(0) = -0.0946$	-0.1854	1.0238
$t(0) = 1.2214$	0	1.4191	$t(0) = 1.0120$	-0.1878	1.0241
	0	1.4918		-0.1902	1.0244
$u(0) = 0$	0	1.6487	$u(0) = -0.1902$	-0.2820	1.0366
$t(0) = 1.4918$	0	1.7332	$t(0) = 1.0244$	-0.2844	1.0369
	0	1.8221		-0.2869	1.0372
$u(0) = 0$	0	2.2034	$u(0) = -0.2869$	-0.3797	1.0498
$t(0) = 1.8221$	0	2.2144	$t(0) = 1.0372$	-0.3822	1.0502
	0	2.2255		-0.3846	1.0505
$u(0) = 0$	0	2.6912	$u(0) = -0.3846$	-0.4785	1.0636
$t(0) = 2.2255$	0	2.7047	$t(0) = 1.0505$	-0.4809	1.0640
	0	2.7182		-0.4834	1.0643

Табела 5.2: Решења система једначина (5.3.12) за $\epsilon = -1$

(а) Нул Картанова нормална изофотна крива (плава)			(б) Нул Картанова нормална изофотна крива (розе)		
почетна тачка	последње три вредности за u	последње три вредности за t	почетна тачка	последње три вредности за u	последње три вредности за t
$u(0) = 0$ $t(0) = 1$	0.0890 0.0913 0.0936	0.9890 0.9887 0.9884	$u(0) = 0$ $t(0) = 1$	0 0 0	0.8270 0.8228 0.8187
$u(0) = 0.0936$ $t(0) = 0.9884$	0.1817 0.1840 0.1863	0.9778 0.9775 0.9772	$u(0) = 0$ $t(0) = 0.8187$	0 0 0	0.6770 0.6737 0.6703
$u(0) = 0.1863$ $t(0) = 0.9772$	0.2735 0.2758 0.2781	0.9669 0.9666 0.9664	$u(0) = 0$ $t(0) = 0.6703$	0 0 0	0.5543 0.5515 0.5488
$u(0) = 0.2781$ $t(0) = 0.9664$	0.3644 0.3667 0.3690	0.9564 0.9562 0.9559	$u(0) = 0$ $t(0) = 0.5488$	0 0 0	0.4538 0.4516 0.4493
$u(0) = 0.3690$ $t(0) = 0.9559$	0.4545 0.4568 0.4590	0.9462 0.9460 0.9457	$u(0) = 0$ $t(0) = 0.4493$	0 0 0	0.3716 0.3697 0.3679

На тај начин, добијамо неопходан број тачака који генеришу четири нул Картанове нормалне изофотне криве које полазе из почетне тачке $x(0, 1)$ (слика 5.3).



Слика 5.3: Нумерички израчунате нул Картанове нормалне изофотне криве

(Б) Нумеричко израчунавање нул Картанове нормалне силуетне криве.

Претпоставимо да је дата параметарска једначина (5.3.1) временске површи, параметарска једначина осе W и геодезијска кривина $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ нул Картанове нормалне силуетне криве α . На основу дефиниције 5.2.1 важи

$$(5.3.13) \quad \langle \tilde{\eta}, W \rangle = 0.$$

Заменом релације (5.1.1) у релацији (5.3.13), добијамо

$$\langle \eta + \lambda T, W \rangle = 0.$$

Помоћу релација (5.3.2) и $\lambda(s) = -2\epsilon k_g(s)$, претходна релација постаје

$$(5.3.14) \quad Au' + Bt' + C = 0,$$

при чему су одговарајући коефицијенти облика

$$(5.3.15) \quad A = \langle x_u, W \rangle, \quad B = \langle x_t, W \rangle, \quad C = -\epsilon_1 e^{-\epsilon_1 s k_g(s)}.$$

Претпоставимо да је $A \neq 0$. Тада релације (5.3.3) и (5.3.14) имплицирају квадратну једначину облика (5.3.9), при чему су коефицијенти $M \neq 0$, N и P дати релацијом (5.3.8). Помоћу релација (5.3.9) и (5.3.14) добијамо систем диференцијалних једначина

$$(5.3.16) \quad u' = -\frac{Bt' + C}{A}, \quad t' = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4MP}}{2M},$$

који се може нумерички интегралити при почетним условима $u(0) = u_0$, $t(0) = t_0$. Ако је $N^2 - 4MP \geq 0$, добијамо две или четири нул Картанове нормалне силуетне криве. Ако је $N^2 - 4MP < 0$, не постоје нул Картанове нормалне силуетне криве које леже на датој временској површи.

Ако је $A = 0$, помоћу релације (5.3.14) следи

$$(5.3.17) \quad t' = -\frac{C}{B},$$

при чему је $B \neq 0$. Заменом (5.3.17) у (5.3.3) добијамо квадратну једначину

$$(5.3.18) \quad Mu'^2 + Nu' + P = 0,$$

при чему је

$$(5.3.19) \quad M = E, \quad N = -\frac{2FC}{B}, \quad P = G\frac{C^2}{B^2}.$$

Релације (5.3.17) и (5.3.18) дају систем линеарних диференцијалних једначина првог реда

$$(5.3.20) \quad u' = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4MP}}{2M}, \quad t' = -\frac{C}{B}.$$

који се може нумерички интегралити. Ако је $N^2 - 4MP \geq 0$, нумеричком интеграцијом система једначина (5.3.20) добијамо четири или две нул Картанове нормалне силуетне криве које пролазе кроз тачку $x(u_0, t_0)$. С друге стране, ако је $N^2 - 4MP < 0$, не постоје нул Картанове нормалне силуетне криве са датом осом, параметарском једначином временске површи и геодезијском кривином $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$.

ПРИМЕР 5.3.2. Нека је дата временска површ M у простору $\mathbb{E}_1^3$ са параметризацијом

$$x(u, t) = \left(-\frac{t}{2}, -\sin 2u + \frac{t}{2} \cos 2u, -\cos 2u - \frac{t}{2} \sin 2u \right).$$

Претпоставимо да је α нул Картанова нормална силуетна крива са осом $W = (1, 0, 0)$ и геодезијском кривином $k_g(s) = -1$. Рачунским путем добијамо

$$(5.3.21) \quad \langle x_u, W \rangle = 0, \quad \langle x_t, W \rangle = \frac{1}{2}, \quad E = t^2 + 4 \quad F = -1, \quad G = 0.$$

Помоћу релација (5.3.15) и (5.3.19) налазимо да је

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\epsilon_1 e^{\epsilon_1 s}, \quad M = t^2 + 4, \quad N = -4\epsilon_1 e^{\epsilon_1 s}, \quad P = 0.$$

Заменом претходних релација у релацији (5.3.20) добија се систем диференцијалних једначина

$$(5.3.22) \quad t' = -\frac{C}{B}, \quad u' = \frac{-N \pm \sqrt{N^2}}{2M},$$

који се може нумерички интегралити при почетним условима $u(0) = 1$ и $t(0) = 0$. Добијена решења система једначина (5.3.22) дата су у Табели 5.3 за $\epsilon = 1$, односно у Табели 5.4 за $\epsilon = -1$.

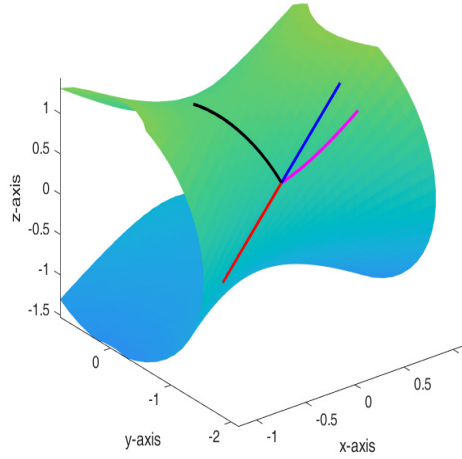
Табела 5.3: Решења система једначина (5.3.22) за $\epsilon = 1$

(а) Нул Картанова нормална силуетна крива (црна)			(б) Нул Картанова нормална силуетна крива (црвена)		
почетна тачка	последње три вредности за u	последње три вредности за t	почетна тачка	последње три вредности за u	последње три вредности за t
$u(0) = 1$	1	-0.0545	$u(0) = 1$	1.0791	-0.0545
$t(0) = 0$	1	-0.0564	$t(0) = 0$	1.0821	-0.0564
	1	-0.0583		1.0850	-0.0583
$u(0) = 1$	1	-0.1098	$u(0) = 1.0850$	1.1713	-0.1098
$t(0) = -0.0583$	1	-0.1116	$t(0) = -0.0583$	1.1746	-0.1116
	1	-0.1134		1.1778	-0.1134
$u(0) = 1$	1	-0.1622	$u(0) = 1.1778$	1.2726	-0.1622
$t(0) = -0.1134$	1	-0.1639	$t(0) = -0.1134$	1.2762	-0.1639
	1	-0.1656		1.2798	-0.1656
$u(0) = 1$	1	-0.2120	$u(0) = 1.2798$	1.3849	-0.2120
$t(0) = -0.1656$	1	-0.2136	$t(0) = -0.1656$	1.3889	-0.2136
	1	-0.2152		1.3929	-0.2152
$u(0) = 1$	1	-0.2594	$u(0) = 1.3929$	1.5108	-0.2594
$t(0) = -0.2152$	1	-0.2609	$t(0) = -0.2152$	1.5152	-0.2609
	1	-0.2624		1.5197	-0.2624

На тај начин, применом методе Рунге-Кута и функције *ode 45* програмског пакета *MATLAB*, добијамо потребан број тачака које генеришу четири нул Картанове нормалне силуетне криве које полазе из почетне тачке $x(1, 0)$ (слика 5.4).

Табела 5.4: Решења система једначина (5.3.22) за $\epsilon = -1$

(ц) Нул Картанова нормална силуетна крива (плава)			(д) Нул Картанова нормална силуетна крива (розе)		
почетна тачка	последње три вредности за u	последње три вредности за t	почетна тачка	последње три вредности за u	последње три вредности за t
$u(0) = 1$ $t(0) = 0$	0.9896 0.9893 0.9889	0.0545 0.0564 0.0583	$u(0) = 1$ $t(0) = 0$	1 1 1	0.0545 0.0564 0.0583
$u(0) = 0.9889$ $t(0) = 0.0583$	0.9784 0.9781 0.9777	0.1098 0.1116 0.1134	$u(0) = 1$ $t(0) = 0.0583$	1 1 1	0.1098 0.1116 0.1134
$u(0) = 0.9777$ $t(0) = 0.1134$	0.9672 0.9668 0.9664	0.1622 0.1639 0.1656	$u(0) = 1$ $t(0) = 0.1134$	1 1 1	0.1622 0.1639 0.1656
$u(0) = 0.9664$ $t(0) = 0.1656$	0.9558 0.9554 0.9550	0.2120 0.2136 0.2152	$u(0) = 1$ $t(0) = 0.1656$	1 1 1	0.2120 0.2136 0.2152
$u(0) = 0.9550$ $t(0) = 0.2152$	0.9443 0.9439 0.9436	0.2594 0.2609 0.2624	$u(0) = 1$ $t(0) = 0.2152$	1 1 1	0.2594 0.2609 0.2624



Слика 5.4: Нумерички израчунате нул Картанове нормалне силуетне криве

5.4 Нул Картанове ректификационе изофотне криве

Ректификационе криве у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$ увео је Б.Ј. Чен у раду [6] као криве чији вектор положаја

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s),$$

у односу на изабрани координатни почетак, увек лежи у ректификационој равни криве. Ове криве имају особину да је количник њихове торзије и кривине неконстантна линеарна функција у терминима параметра дужине лука ([6]). У радовима [7] и [11] је добијена релација између ректификационих кривих и Дарбуовог вектора Френеовог репера. Такође је у раду [8] доказано да су ректификационе криве на конусу његове геодезијске линије. Ректификационе криве које леже на тродимензионој сфери $\mathbb{S}^3(r)$ и на тродимензионом хиперболичком простору $\mathbb{H}^3(-r)$ у простор-времену

Минковског $\mathbb{E}_1^4$ проучаване су у радовима [58] и [59]. Остале геометријске особине ректификационих кривих у просторима Минковског се могу наћи у радовима [30], [37], [38] и [39].

У овом одељку ћемо најпре дефинисати *нул Картанове ректификационе изофотне криве* помоћу векторског поља $\tilde{\eta}$ које лежи у ректификационој равни одређеној векторским пољима Дарбуовог репера. Поменуто векторско поље припада уопштеном Дарбуовом реперу прве врсте и задовољава услов $\langle \tilde{\eta}, W \rangle = \text{constant} \neq 0$, где је W фиксна оса криве. Затим ћемо испитати *нул Картанове ректификационе изофотне криве* са константном геодезијском и нормалном кривином и константном геодезијском торзијом и добити параметарске једначине њихових оса. Доказаћемо да оса нул Картанове ректификационе изофотне криве са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$ има правац Дарбуовог вектора Дарбуовог репера. Такође ћемо навести релације које постоје између нул Картанових ректификационих изофотних кривих са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$ и уопштених хелиса, релативно нормалних-искошених хелиса и изофотних кривих.

Присетимо се да у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ Дарбуов репер $\{T, \zeta, \eta\}$ дуж нул Картанове криве α на временској површи одређује светлосну *ректификациону* раван $\zeta^\perp = \text{span}\{\zeta, \eta\}$ ([42]). Уочимо векторско поље $\tilde{\eta}$ дуж нул Картанове криве α која лежи на временској површи, облика

$$(5.4.1) \quad \tilde{\eta}(s) = \eta(s) + \lambda(s)\zeta(s).$$

Поменуто векторско поље лежи у ректификационој равни $\zeta^\perp = \text{span}\{\zeta, \eta\}$ криве α и припада њеном уопштеном Дарбуовом реперу прве врсте (4.3.26), при чему диференцијабилна функција $\lambda \neq 0$ задовољава Рикатијеву диференцијалну једначину (4.3.31).

Дефиниција 5.4.1. Нул Картанова крива α на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са уопштеним Дарбуовим репером прве врсте $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ се назива *ректификациона изофотна крива са осом W* , ако постоји константан вектор W тако да је

$$(5.4.2) \quad \langle \tilde{\eta}, W \rangle = c_0,$$

$c_0 \in \mathbb{R}_0$.

Према теорему 5.1.1, нул Картанове криве које леже на временској површи са константним кривинама $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$, су нул Картанове хелисе или нул Картанове кубне криве. Одавде закључујемо да су нул Картанове ректификационе изофотне криве са константним кривинама $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$, такође криве те врсте. У наставку ћемо размотрити четири случаја како бисмо добили параметарске једначине њихових оса и релације у односу на друге врсте кривих.

(I) $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$;

Теорема 5.4.1. Нека је α нул Картанова ректификациона изофотна крива са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$ која лежи на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$. Тада њена оса има параметарску једначину

$$(5.4.3) \quad W(s) = -\frac{c_0\tau_g(s)}{k_g(s)}T(s) - \frac{\epsilon\epsilon_1c_0}{k_g(s)}\zeta(s) - c_0\eta(s),$$

при чему је $c_0 = \langle \tilde{\eta}, W \rangle \in \mathbb{R}_0$.

Доказ. Претпоставимо да је α нул Картанова ректификациона изофотна крива са осом W и константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$. Решавањем Рикатијеве диференцијалне једначине (4.3.31), налазимо да је

$$\lambda(s) = -\frac{2\epsilon_1 k_g(s)}{\tau_g(s)}.$$

Одавде следи да је $\lambda(s) = \lambda_0 \in \mathbb{R}_0$ и

$$(5.4.4) \quad k_g(s) = -\frac{1}{2}\epsilon_1 \lambda_0 \tau_g(s).$$

Претпоставимо да се оса W криве α може написати у облику

$$(5.4.5) \quad W(s) = a(s)T(s) + b(s)\zeta(s) + c(s)\eta(s),$$

где су $a(s)$, $b(s)$ и $c(s)$ произвољне диференцијабилне функције. Диференцирањем релације (5.4.5) по параметру псеудо-дужине лука s и применом релације (3.3.6), добијамо систем диференцијалних једначина првог реда

$$(5.4.6) \quad \begin{aligned} a' + \epsilon_1 a k_g - \epsilon_1 c \tau_g &= 0, \\ b' - \epsilon_1 b k_g - \epsilon_1 c k_n &= 0, \\ c' + a k_n + b \tau_g &= 0. \end{aligned}$$

Релације (5.4.1), (5.4.2) и (5.4.5) дају

$$(5.4.7) \quad c = c_0 - \epsilon_1 \lambda_0 a.$$

Заменом (5.4.7) у (5.4.6), систем једначина гласи

$$(5.4.8) \quad \begin{aligned} a' + \epsilon_1 a k_g - \epsilon_1 \tau_g (c_0 - \epsilon_1 \lambda_0 a) &= 0, \\ b' - \epsilon_1 b k_g - \epsilon_1 k_n (c_0 - \epsilon_1 \lambda_0 a) &= 0, \\ -\epsilon_1 \lambda_0 a' + a k_n + b \tau_g &= 0. \end{aligned}$$

Из прве и треће једначине система једначина (5.4.8) налазимо да је

$$(5.4.9) \quad a(s) = -\frac{c_0 \tau_g(s)}{k_g(s)}, \quad b(s) = \frac{c_0 k_n(s)}{k_g(s)}.$$

Такође, заменом $a(s)$ и λ_0 у релацији (5.4.7), следи да је

$$(5.4.10) \quad c = -c_0.$$

Коначно, заменом (5.4.9) и (5.4.10) у (5.4.5), добијамо (5.4.3). $\square$

Помоћу теореме 5.4.1 налазимо да је

$$\langle T, W \rangle = \text{constant} \neq 0, \quad \langle \zeta, W \rangle = \text{constant} \neq 0, \quad \langle \eta, W \rangle = -c_0 = \text{constant} \neq 0.$$

На тај начин доказана је релација између нул Картанових ректификационих изофотних кривих и познатих врста кривих.

Теорема 5.4.2. Нул Картанова ректификациона изофотна крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$ је уопштена хелиса, релативно нормална-искошена хелиса и изофотна крива у односу на исту осу.

У следећој теореме ћемо показати да се оса нул Картанове ректификационе изофотне криве са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$, поклапа са осом ротације Дарбуовог репера те криве.

Теорема 5.4.3. Ако је α нул Картанова ректификациона изофотна крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$, тада њена оса има правац Дарбуовог вектора Дарбуовог репера те криве.

Доказ. Нека је $D(s)$ Дарбуов вектор Дарбуовог репера криве α . Помоћу релација (4.3.6) и (5.4.3), налазимо да је

$$W(s) = -\frac{c_0}{k_g(s)}D(s),$$

што је и требало доказати. □

Релације (5.4.1) и (5.4.2) имплицирају интересантну геометријску особину нул Картанових ректификационих изофотних кривих.

Последица 5.4.1. Ако је нул Картанова крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$ изофотна крива и релативно нормална-искошена хелиса у односу на исту осу, тада је она ректификациона изофотна крива у односу на ту осу.

(II) $k_g(s) = 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$;

Заменом кривина $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$ у релацији (5.4.6) и применом релације (5.4.7) долазимо до контрадикције.

Теорема 5.4.4. Не постоје нул Картанове ректификационе изофотне криве на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са кривинама $k_g(s) = 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$.

(III) $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = 0$;

Заменом кривина $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$ у релацији (5.4.6) и користећи релацију (5.4.7), такође долазимо до контрадикције.

Теорема 5.4.5. Не постоје нул Картанове ректификационе изофотне криве на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са кривинама $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = 0$.

(IV) $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$;

Теорема 5.4.6. Нека је α нул Картанова ректификациона изофотна крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, са кривинама $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$. Тада њена оса има параметарску једначину

$$(5.4.11) \quad W(s) = c_0 \epsilon_1 k_n(s) s \zeta(s) + c_0 \eta(s),$$

$$c_0 = \langle \tilde{\eta}, W \rangle \in \mathbb{R}_0.$$

Доказ. Претпоставимо да је α нул Картанова ректификациона изофотна крива са осом W и кривинама $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$. На основу релације (5.1.3) следи да је α нул Картанова кубна крива. Заменом кривина $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$ у Рикатијевој диференцијалној једначини (4.3.31), добијамо да је $\lambda(s) = \lambda_0 \in \mathbb{R}_0$. Такође, заменом кривина $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$ и $\lambda(s) = \lambda_0 \in \mathbb{R}_0$ у релацијама (5.4.6) и (5.4.7), добијамо систем диференцијалних једначина

$$(5.4.12) \quad \begin{aligned} a'(s) &= 0, \\ b'(s) - \epsilon_1 c(s) k_n(s) &= 0, \\ c'(s) + a(s) k_n(s) &= 0. \end{aligned}$$

Из прве једначине система једначина (5.4.12) следи да је $a(s) = a_0 = \text{constant}$. Ако је $a_0 \neq 0$, добија се контрадикција. Ако је $a_0 = 0$, помоћу релације (5.4.12) налазимо да је $b(s) = \epsilon_1 c_0 s k_n(s)$ и $c(s) = c_0$. Заменом $b(s)$ и $c(s)$ у релацији (5.4.5) добијамо тражену параметарску једначину (5.4.11). $\square$

Последица 5.4.2. Ако је нул Картанова кубна крива ректификациона изофотна крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, тада је она изофотна крива и релативно нормална-искошена хелиса у односу на исту осу.

ПРИМЕР 5.4.1. Посматрајмо временску површ са параметарском једначином

$$x(s, t) = \alpha(s) + t(1, -\sin s, -\cos s),$$

где је $\alpha(s) = (s, \sin s, \cos s)$ нул Картанова хелиса и $s, t \in \mathbb{R}$. Како је

$$T(s) \times N(s) = \epsilon T(s) = T(s),$$

следи да је $\epsilon = 1$. Рачунским путем налазимо да Дарбуов репер дуж хелисе α гласи

$$(5.4.13) \quad \begin{aligned} T(s) &= (1, \cos s, -\sin s), \\ \zeta(s) &= (1, -\sin s, -\cos s), \\ \eta(s) &= (1, \cos s - \sin s, -\sin s - \cos s), \end{aligned}$$

па је $\eta \times T = \epsilon_1 T = -T$. Отуда је $\epsilon_1 = -1$. Применом релација (4.3.4) и (5.4.13) следи да су кривине криве α облика

$$(5.4.14) \quad k_n(s) = 1, \quad k_g(s) = 1, \quad \tau_g(s) = -1.$$

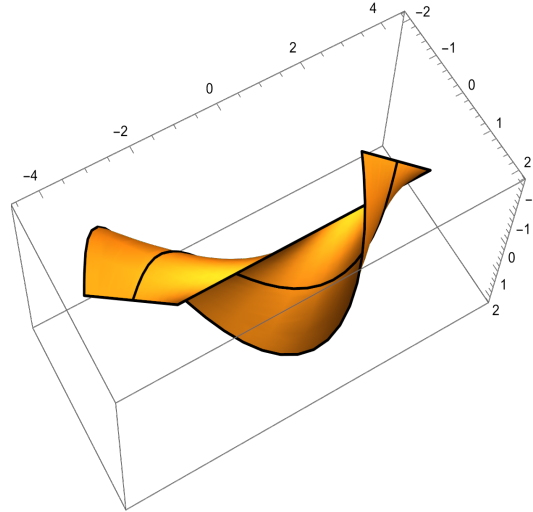
Заменом кривина $k_g(s) = 1$ и $\tau_g(s) = -1$ у Рикатијевој диференцијалној једначини (4.3.31), добијамо да је $\lambda(s) = -2$. Уочимо осу W са параметарском једначином (5.4.3). Релације (5.4.3), (5.4.13) и (5.4.14) имплицирају да је

$$W(s) = c_0(T(s) + \zeta(s) - \eta(s)) = (c_0, 0, 0).$$

Како је

$$\tilde{\eta}(s) = \eta(s) + \lambda(s)\zeta(s) = (-1, \cos s + \sin s, \cos s - \sin s),$$

слиди да је $\langle \tilde{\eta}, W \rangle = c_0$, што значи да је α ректификациона изофотна крива са осом W (слика 5.5). Она је такође уопштена хелиса, релативно нормална-искошена хелиса и изофотна крива у односу на исту осу. Дакле, важи тврђење теореме 3.2.5.



Слика 5.5: Нул Картанова ректификациона изофотна крива

5.5 Нул Картанове ректификационе силуетне криве

У последњем одељку дисертације представимо резултате публиковане у раду [31]. У поменутом раду су уведене *нул Картанове ректификационе силуетне криве* аналогно нул Картановим нормалним силуетним кривама, уведеним у одељку 5.2. Доказаћемо да не постоје нул Картанове ректификационе силуетне криве са константном геодезијском кривином различитом од нуле и константном геодезијском торзијом различитом од нуле. У случају када је $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$, одредићемо параметарску једначину њихове осе и показати да је нул Картанова кубна крива на B -скролу пример ректификационе изофотне и ректификационе силуетне криве са просторном и светлосном осом.

Дефиниција 5.5.1. Нул Картанова крива α на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са уопштеним Дарбуовим репером прве врсте $\{\tilde{T}, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}\}$ се назива *ректификациона силуетна крива са осом W* , ако постоји константан вектор W у простору $\mathbb{E}_1^3$ такав да важи

$$(5.5.1) \quad \langle \tilde{\eta}(s), W \rangle = 0.$$

Претпоставимо да је α ректификациона силуетна крива са константним кривинама $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$. Разликоваћемо следећа четири случаја.

(1) $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$;

Теорема 5.5.1. Не постоје нул Картанове ректификационе силуетне криве на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$.

Доказ. Претпоставимо да је α нул Картанова ректификациона силуетна крива са осом W датом релацијом (5.4.5) и константним кривинама $k_g(s) \neq 0$ и $\tau_g(s) \neq 0$. Тада из релације (4.3.31) следи

$$(5.5.2) \quad \lambda(s) = -\frac{2\epsilon_1 k_g(s)}{\tau_g(s)} = \lambda_0 = \text{constant} \neq 0.$$

Заменом $c_0 = 0$ у релацији (5.4.8) добијамо систем диференцијалних једначина

$$(5.5.3) \quad \begin{aligned} a' + \epsilon_1 a k_g + \lambda_0 \tau_g a &= 0, \\ b' - \epsilon_1 b k_g + \lambda_0 k_n a &= 0, \\ -\epsilon_1 \lambda_0 a' + a k_n + b \tau_g &= 0. \end{aligned}$$

Помоћу прве једначине система једначина (5.5.3) и релације (5.5.2), налазимо да је

$$(5.5.4) \quad a(s) = e^{\epsilon_1 s k_g(s)}.$$

Релација (5.5.4) и трећа једначина система једначина (5.5.3) имплицирају

$$(5.5.5) \quad b(s) = \frac{\epsilon_1}{\tau_g} \left(\epsilon - \frac{\lambda_0^2}{2} \tau_g \right) e^{\epsilon_1 s k_g(s)}.$$

Сада помоћу прве једначине система једначина (5.5.3) и релација (5.5.2) и (5.5.4), добијамо

$$(5.5.6) \quad b(s) = \epsilon \epsilon_1 \lambda_0 s e^{\epsilon_1 s k_g(s)}.$$

Релације (5.5.5) и (5.5.6) дају

$$\tau_g(s) = \frac{2\epsilon}{2\epsilon \lambda_0 s + \lambda_0^2}$$

што је контрадикција, јер је геодезијска торзија константна функција. □

(2) $k_g(s) = 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$;

Заменом кривина $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$ у релацији (5.4.6) и помоћу једнакости

$$c(s) = -\epsilon_1 \lambda(s) a(s),$$

долазимо до контрадикције.

Теорема 5.5.2. Не постоје нул Картанове ректификационе силуетне криве на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са кривинама $k_g(s) = 0$ и $\tau_g(s) = \text{constant} \neq 0$.

(3) $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = 0$;

Аналогно, заменом кривина $k_g(s)$ и $\tau_g(s)$ у релацији (5.4.6) и применом једнакости $c(s) = -\epsilon_1 \lambda(s) a(s)$, такође долазимо до контрадикције.

Теорема 5.5.3. Не постоје нул Картанове ректификационе силуетне криве на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$ са кривинама $k_g(s) = \text{constant} \neq 0$ и $\tau_g(s) = 0$.

$$(4) \quad k_g(s) = \tau_g(s) = 0;$$

Теорема 5.5.4. Нека је α нул Картанова ректификациона силуетна крива са кривинама $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$ на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$. Тада она има светлосну осу са параметарском једначином

$$(5.5.7) \quad U(s) = b_0 \zeta(s),$$

где је b_0 реалан број различит од нуле.

Последица 5.5.1. Ако је нул Картанова кубна крива ректификациона силуетна крива на временској површи у простору $\mathbb{E}_1^3$, тада је она уопштена хелиса, релативно нормална-искошена хелиса и изофотна крива у односу на исту осу.

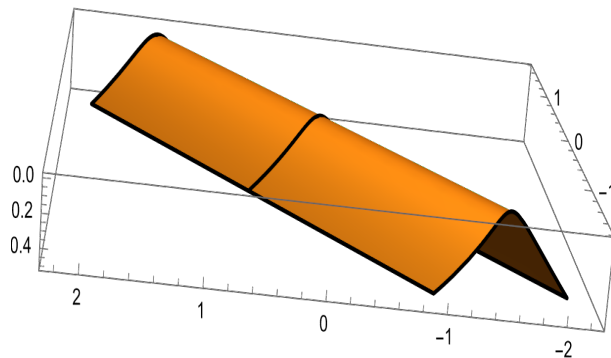
ПРИМЕР 5.5.1. Уочимо B -скролу у простору $\mathbb{E}_1^3$ са параметризацијом

$$x(s, t) = \alpha(s) + tB(s),$$

при чему је

$$\alpha(s) = \left(\frac{s^3}{4} + \frac{s}{3}, \frac{s^3}{4} - \frac{s}{3}, \frac{s^2}{2} \right)$$

нул Картанова кубна крива и $B(s)$ вектор њене бинормале (слика 5.6).



Слика 5.6: Крива α на B -скролу

Френеов репер криве α гласи

$$(5.5.8) \quad \begin{aligned} T(s) &= \left(\frac{3s^2}{4} + \frac{1}{3}, \frac{3s^2}{4} - \frac{1}{3}, s \right), \\ N(s) &= \left(\frac{3s}{2}, \frac{3s}{2}, 1 \right), \\ B(s) &= \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0 \right). \end{aligned}$$

Одавде је $T(s) \times N(s) = \epsilon T(s) = T(s)$, па је $\epsilon = 1$. С друге стране, Дарбуов репер криве α је облика

$$(5.5.9) \quad \begin{aligned} T(s) &= \left(\frac{3s^2}{4} + \frac{1}{3}, \frac{3s^2}{4} - \frac{1}{3}, s \right), \\ \zeta(s) &= -\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right), \\ \eta(s) &= -\left(\frac{3s}{2}, \frac{3s}{2}, 1 \right). \end{aligned}$$

Отуда је $\eta \times T = \epsilon_1 T = T$, па је $\epsilon_1 = 1$. Помоћу релација (4.3.4) и (5.5.9) налазимо да кривине криве α гласе

$$k_n(s) = -1, \quad k_g(s) = 0, \quad \tau_g(s) = 0.$$

Уочимо осу W дату релацијом (5.4.11). Применом релација (5.4.11) и (5.5.9) добијамо да је $W(s) = (0, 0, -c_0)$. Заменом кривина $k_g(s) = \tau_g(s) = 0$ у релацији (4.3.31) следи да је $\lambda(s) = \lambda_0 \in \mathbb{R}_0$. Тада је

$$\tilde{\eta}(s) = \eta(s) + \lambda(s)\zeta(s) = -\left(\frac{3(s + \lambda_0)}{2}, \frac{3(s + \lambda_0)}{2}, 1 \right).$$

Дакле, $\langle \tilde{\eta}, W \rangle = c_0$, што имплицира да је α ректификациона изофотна крива са осом W . Уочимо сада светлосну осу $U(s)$ дату релацијом (5.5.7). Помоћу релација (5.5.7) и (5.5.9) добијамо да је $U(s) = -b_0\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$. Како да је $\langle \tilde{\eta}, U \rangle = 0$, α је ректификациона силуетна крива са осом U . На основу последице 5.5.1 следи да је α уопштена хелиса, релативно нормална-искошена хелиса и изофотна крива у односу на исту осу.

Литература

- [1] O. Bektas, S. Yuce, *Special Involute-Evolute Partner D-curves in $\mathbb{E}^3$* , Eur. J. Pure Appl. Math. 6 (1) (2013), 20-29.
- [2] L.R Bishop, *There is more than one way to frame a curve*, Amer. Math. Monthly, 82 (3) (1975), 246-251.
- [3] W.B. Bonnor, *Null curves in a Minkowski space-time*, Tensor (N.S.) 20 (2) (1969), 229-242.
- [4] B. Bükcü, M. Karacan, *On the slant helices according to Bishop frame of the timelike curve in Lorentzian space*, Tamkang J. Math. 39 (3) (2008), 255-262.
- [5] B. Carlsen, J.N. Clelland, *The geometry of lightlike surfaces in Minkowski space*, J. Geom. Phys. 74 (2013), 43-55.
- [6] B.Y. Chen, *When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?* Amer. Math. Monthly 110 (2003), 147-152.
- [7] B.Y. Chen, F. Dillen, *Rectifying curves as centrodes and extremal curves*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 33 (2) (2005), 77-90.
- [8] B.Y. Chen, *Rectifying curves and geodesics on a cone in the Euclidean 3-space*, Tamkang J. Math. 48 (2) (2017), 209-214.
- [9] R. Cipolla, P. Giblin, *Visual Motion of Curves and Surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [10] L. C. B. Da Silva, *Moving frames and the characterization of curves that lie on a surface*, J. Geom. 108 (2017), 1091-1113.
- [11] S. Deshmukh, B.Y. Chen, S.H. Alshammari, *On rectifying curves in Euclidean 3-space*, Turk. J. Math. 42 (2018), 609-620.
- [12] A. Diatta, P. Giblin, *Geometry of Isophote Curves*, In: R. Kimmel, N.A. Sochen, J. Weickert eds. Scale Space and PDE Methods in Computer Vision, Springer, Heidelberg, 2005.
- [13] J. Djordjević, E. Nešović, *On Bishop frame of a partially null curve in Minkowski space-time $\mathbb{E}_1^4$* , Filomat 38 (4) (2024), 1439-1449.
- [14] J. Djordjević, E. Nešović, *On Bishop frame of a pseudo null curve in Minkowski space-time*, Turk. J. Math. 44 (2020), 870-882.

- [15] J. Djordjević, E. Nešović, *On generalized Darboux frame of a pseudo null curve lying on a lightlike surface in Minkowski 3-space*, Int. Elec. J. Geom. 16 (1) (2023), 81-94.
- [16] J. Djordjević, E. Nešović, U. Öztürk, *On generalized Darboux frame of a spacelike curve lying on a lightlike surface in Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$* , Turk. J. Math. 47 (2) (2023), 883-897.
- [17] J. Djordjević, E. Nešović, U. Öztürk, E. B. Koç Öztürk, *On null Cartan normal isophotic and normal silhouette curves on a timelike surface in Minkowski 3-space*, Math. Meth. Appl. Sci. 47 (2024), 10520-10539.
- [18] F. Doğan, *Isophote curves on timelike surfaces in Minkowski 3-space*, An. Ştiinţ. Univ. Al I Cuza Iaşi Mat. (N.S.) 63 (1) (2017), 133-143.
- [19] F. Doğan, Y. Yayli, *On isophote curves and their characterizations*, Turk. J. Math. 39 (5) (2015), 650-664.
- [20] K. L. Duggal, D. H. Jin, *Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds*, World Scientific, Singapore, 2007.
- [21] B.U. Döldül, M. Döldül, *Derivation of slant helices on a given surface through new approaches*, Appl. Math. Computat. 366 (2020), 124742.
- [22] M. Erdogdu, *Parallel frame of non-lightlike curves in Minkowski space-time*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 12 (2015), 16 pages.
- [23] R.T. Farouki, C. Giannelli, M. L. Sampoli, A. Sestini, *Rotation-minimizing osculating frames*, Comput. Aided Geom. Design 31 (2014), 27-42.
- [24] R.T. Farouki, *Rational rotation-minimizing frames-recent advances and open problems*, Appl. Math. Comp. 272 (2016), 80-91.
- [25] R.T. Farouki, C. Giannelli, *Spatial camera orientation control by rotation-minimizing directed frames*, Comput. Anim. Virt. Worlds 20 (2009), 457-472.
- [26] A. Ferrandez, A. Gimenez, P. Lucas, *Null generalized helices in Lorentz-Minkowski spaces*, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (39) (2002), 8243.
- [27] F. Gokcelik, Z. Bozkurt, I. Gök, F.N. Ekmekci, Y. Yayli, *Parallel transport frame in 4-dimensional Euclidean space $\mathbb{E}^4$* , Caspian J. Math. Sci. 3 (1) (2014), 91-103.
- [28] M. Grbović, E. Nešović, *On generalized Bishop frame of null Cartan curve in Minkowski 3-space*, Krag. J. Math. 43 (4) (2019), 559-573.
- [29] M. Grbović, E. Nešović, *On the Bishop frames of pseudo null and null Cartan curves in Minkowski 3-space*, J. Math. Anal. Appl. 461 (1) (2018), 219-233.
- [30] M. Grbović, E. Nešović, *Some relations between rectifying and normal curves in Minkowski 3-space*, Math. Communications 17 (2012), 655-664.

- [31] M. Grbović Ćirić, J. Djordjević, E. Nešović, *On null Cartan rectifying isophotic and rectifying silhouette curves lying on a timelike surface in Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$* , Int. Elec. J. Geom. 17 (1) (2024), 171-183.
- [32] S. Hananoi, N. Ito, S. Izumiya, *Spherical Darboux images of curves on surfaces*, Beitr. Algebra Geom. 56 (2) (2015), 575-585.
- [33] D. Hestenes, *Proper particle mechanics*, J. Math. Phys. 15 (1974) 1768-1777.
- [34] D. Hestenes, *Space-Time Algebra*, Switzerland Springer International Publishing, Switzerland, (2015).
- [35] D. Hestenes, E. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus - A Unified language for Mathematics and Physics*. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel Publishing Company, 1987.
- [36] K. Ilarslan, E. Nešović, *On the Bishop frame of a null Cartan curve in Minkowski space-time*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 15 (8) (2018), 16 pages.
- [37] K. Ilarslan, E. Nešović, *Some characterizations of null, pseudo null and partially null rectifying curves in Minkowski space-time*, Taiwanese J. Math. 12 (5) (2008) 1035-1044.
- [38] K. Ilarslan, E. Nešović, M. Petrović-Torgašev, *Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space*, Novi Sad J. Math. 33 (2) (2003), 23-32.
- [39] K. Ilarslan, E. Nešović, *Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space E^4* , Turk. J. Math. 32 (2008), 21-30.
- [40] J.I. Inoguchi, S. Lee, *Lightlike surfaces in Minkowski 3-space*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 6 (2) (2009), 267-283.
- [41] N. Ito, S. Izumiya, *Lorentzian Darboux images of curves on spacelike surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 13 (5) (2016), 1650066.
- [42] S. Izumiya, A.C. Nabarro, A. de Jesus Sacramento, *Pseudo-spherical normal Darboux images of curves on a timelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space*, J. Geom. Phys. 97 (2015), 105-118.
- [43] S. Izumiya, K. Saji, N. Takeuchi, *Flat surfaces along cuspidal edges*, J. Singularities 16 (2017), 73-100.
- [44] S. Izumiya, M. Kossowski, D. Pei, C.R. Fuster, *Singularities of lightlike hypersurfaces in Minkowski four-space*, Tohoku Math. J. 58 (2006), 71-88.
- [45] S. Izumiya, T. Sato, *Lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds in Minkowski space-time*, J. Geom. Phys. 71 (2013), 30-52.
- [46] O. Keskin, Y. Yayli, *An application of N-Bishop frame to spherical images for direction curves*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 14 (11) (2017), 21 pages.

- [47] K.J. Kim, I.K. Lee, *Computing isophotos of surface of revolution and canal surface*, Comput. Aided Des. 35 (3) (2003), 215-223.
- [48] I. Kisi, G. Öztürk, *A new approach to canal surface with parallel transport frame*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 14 (2) (2017), 16 pages.
- [49] F. Klok, *Two moving coordinate frames for sweeping along a 3D trajectory*, Comp. Aided Geom. Design 3 (3) (1986), 217-229.
- [50] J.J. Koenderink and A.J. van Doorn, *Photometric invariants related to solid shape*, Optica Acta: International Journal of Optics 27 (1980), 981-996.
- [51] J. Kosinka, B. Jüttler, *Cubic helices in Minkowski space*, Sitzungsber. Abt. II (215) (2006), 13-35.
- [52] W. Kuhnel, *Differential geometry: curves-surfaces-manifolds*, American Mathematical Society, 2015.
- [53] G. Lewis, *On four-dimensional vector analysis and its applications in electrical theory*, Proceedings of American Academy of Arts and Sciences 46 (1910), 165-181.
- [54] H. Liu, *Curves in the lightlike cone*, Beitr. Algebra Geom. 45 (1) (2004), 291-303.
- [55] S. Liu, Z. Wang, *Generalized focal surfaces of spacelike curves lying in lightlike surfaces*, Math. Meth. Appl. Sci. 44 (2021), 7501-7525.
- [56] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover (reprint), New York, 1944.
- [57] P. Lucas, J.A. Ortega-Yagües, *A generalization of the notion of helix*, Turk. J. Math. 47 (4) (2023), 1158-1168.
- [58] P. Lucas, J.A. Ortega-Yagües, *Rectifying curves in the three-dimensional sphere*, J. Math. Anal. Appl. 421 (2) (2015), 1855-1868.
- [59] P. Lucas, J.A. Ortega-Yagües, *Rectifying Curves in the Three-Dimensional Hyperbolic Space*, Mediterr. J. Math. 13 (2016), 2199-2214.
- [60] N. Macit, M. Döldül, *Relatively normal-slant helices lying on a surface and their characterizations*, Hacettepe J. Math. Stat. 46 (3) (2017), 397-408.
- [61] D. Marr, *Vision: A computational investigation into the human representation and processing of visual information*, MIT press, 2010.
- [62] H.P. Moon, *Minkowski Pythagorean hodographs*, Comput. Aided Geom. Design. 16 (8) (1999), 739-753.
- [63] M. Navarro, O. Palmas, D.A. Solis, *On the geometry of null hypersurfaces in Minkowski space*, J. Geom. Phys. 75 (2014), 199-212.
- [64] E. Nešović, E.B. Koç Öztürk, U. Öztürk, *On k -type null Cartan slant helices in Minkowski 3-space*, Math. Meth. Appl. Sci. 41 (17) (2018), 7583-7598.

- [65] E. Nešović, U. Öztürk, E.B. Koç Öztürk, *On non-null relatively normal-slant helices in Minkowski 3-space*, Filomat 36 (6) (2022), 2051-2062.
- [66] E. Nešović, U. Öztürk, E.B. Koç Öztürk, *Some characterizations of pseudo null isophotic curves in Minkowski 3-space*, J. Geom. 112 (2) (2021), 13 pages.
- [67] E. Nešović, U. Öztürk, E.B. Koç Öztürk, *On non-null relatively normal-slant helices in Minkowski 3-space*, Filomat 36 (6) (2022), 2051-2062.
- [68] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, New York, USA: Academic Press, 1983.
- [69] M. Özdemir, A. A. Ergin, *Parallel frame of non-lightlike curves*, Missouri J. Math. Sci. 20 (2) (2008), 127-137.
- [70] U. Öztürk, E. Nešović, E.B. Koç Öztürk, *On k -type spacelike slant helices lying on lightlike surfaces*, Filomat 33 (9) (2019), 2781-2796.
- [71] U. Öztürk, E. Nešović, E.B. Koç Öztürk, *Numerical computing of isophote curves, general helices and relatively normal-slant helices in Minkowski 3-space*, Math. Meth. Appl. Sci. 2022 (2022), 1-15.
- [72] S. Plantinga, G. Vegter, *Computing Contour Generators of Evolving Implicit Surfaces*, ACM Trans Graph. 25 (4) (2006), 1243-1280.
- [73] T. Poeschl, *Detecting surface irregularities using isophotes*, Comput. Aided Geom. Des. 1 (2) (1984), 163-168.
- [74] J. Puig-Pey, A. Gálvez, A. Iglesias, *Helical curves on surfaces for computer-aided geometric design and manufacturing*, In: Computational science and its applications- ICCSA 2004, Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin, 2004.
- [75] D. C. Rucker, B. A. Jones, R. J. Webster, *A Geometrically Exact Model for Externally Loaded Concentric-Tube Continuum Robots*, IEEE Transactions on Robotics 26 (5) (2010), 769-780.
- [76] J.M.M. Senovilla, *Singularity theorems and their consequences*, Gen. Relat. Grav. 30 (5) (1998), 701-848.
- [77] H. Theisel, *Are isophotes and reflection lines the same?*, Comput. Aided Geom. Des. 18 (7) (2001), 711-722.
- [78] E.S. Topbas, I. Gök, Ekmekci N, Y. Yayli, *Darboux frame of a curve lying on a lightlike surface*, Math. Sci. Appl. E-Notes, 4 (2) (2016), 121-130.
- [79] M. Umehara, K. Yamada, *Hypersurfaces with light-like points in a Lorentzian manifold*, J. Geom. Anal. 29 (2019), 3405-3437.
- [80] J. Vršek, *Contour curves and isophotes on rational ruled surfaces*, Comput. Aided Geom. Des. 65 (2018), 1-12.

- [81] J. Walrave, *Curves and Surfaces in Minkowski Space*, PhD Thesis, Leuven University, Leuven, 1995.
- [82] W. Wang, B. Jüttler, D. Zheng, Y. Liu, *Computation of rotation minimizing frame*, ACM Transactions on Graphics 27 (1) (2008), 18 pages.
- [83] Y. Wang, D. Pei, X. Cui, *Pseudo-spherical normal Darboux images of curves on a lightlike surface*, Math. Meth. Appl. Sci. 40 (18) (2017), 7151-7161.
- [84] Z. Wang, D. Pei, *Null Darboux developable and pseudo-spherical Darboux image of null Cartan curve in Minkowski 3-space*, Hokkaido Math. J. 40 (2) (2011), 219-240.
- [85] Q. Xu, S. Liu, Y. Gingold, K. Singh, *Using isophotes and shadows to interactively model normal and height fields*, Computers & Graphics 59 (2016), 130-142.
- [86] S. Yilmaz, M. Turgut, *A new version of Bishop frame and an application to spherical images*, J. Math. Anal. Appl. 371 (2010), 764-776.
- [87] A. Yilmaz, E. Özyilmaz, *Relation between Darboux frame and type-2 Bishop frames in Euclidean space*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 13 (7) (2016), Article ID 1650101.
- [88] K. Zhou, Z. Wang, *Pseudo-spherical Darboux images and lightcone images of principal-directional curves of nonlightlike curves in Minkowski 3-space*, Math. Meth. Appl. Sci. 43 (1) (2020), 35-77.

Листа слика

2.1	Светлосна, просторна и временска раван у $\mathbb{E}_1^3$	7
4.1	Транслациона површ M са просторном правом линијом α	55
4.2	Преносна површ M са просторном правом линијом β	56
4.3	Светлосни конус C са просторном кривом α	57
4.4	Преносна површ M са кривом T_β	59
4.5	Псеудо нул хелиса α на преносној површи M	66
4.6	Псеудо нул кружница α на површи M	68
4.7	Псеудо нул крива α на површи M	70
4.8	Псеудо нул хелиса α на површи M	71
4.9	Нул Картанова хелиса α на B -скролу	78
5.1	Нул Картанова хелиса α на површи M	87
5.2	Нул Картанова кубна крива α на временској површи M	90
5.3	Нумерички израчунате нул Картанове нормалне изофотне криве	94
5.4	Нумерички израчунате нул Картанове нормалне силуетне криве	97
5.5	Нул Картанова ректификациона изофотна крива	102
5.6	Крива α на B -скролу	104

Списак табела

5.1	Решења система једначина (5.3.12) за $\epsilon = 1$	93
5.2	Решења система једначина (5.3.12) за $\epsilon = -1$	94
5.3	Решења система једначина (5.3.22) за $\epsilon = 1$	96
5.4	Решења система једначина (5.3.22) за $\epsilon = -1$	97

БИОГРАФИЈА АУТОРА

Јелена Ђорђевић је рођена 24. јуна 1992. године у Крагујевцу, где је завршила основну школу „Радоје Домановић“ и „Прву крагујевачку гимназију“ са одличним успехом. Основне академске студије математике уписала је 2011. године на Природно-математичком факултету у Крагујевцу. Дипломирала је на истом факултету 2015. године са просечном оценом 9,51. Током основних студија, била је добитница награде Фонда „Академик Драгослав Срејовић“ града Крагујевца, као и стипендије Владе Републике Србије.

У октобру 2015. године уписала је мастер академске студије математике на истом факултету, модул теоријска математика. Мастер рад „Булове функције и једначине“ одбранила је 2016. године са оценом 10, а мастер студије је завршила са истом просечном оценом. У периоду 2017–2020, била је активан предавач у оквиру „Математичке радионице младих“ на Природно-математичком факултету и до сада је показала изражен смисао за наставни и педагошки рад.

Докторске академске студије математике, ужа научна област Геометрија, уписала је школске 2017/2018 године на Природно-математичком факултету у Крагујевцу. У периоду 2018–2019, била је члан пројекта „Геометрија, образовање и визуализација са применама“ под руководством проф. др Зорана Ракића са Математичког факултета Универзитета у Београду. Активно се бави научно-истраживачким радом у области диференцијалне геометрије семи-Риманових многострукости. Из области докторске дисертације објавила је 6 научних радова, од којих 4 у часописима на СЦИ листи и 2 у часописима националног значаја.

Научни радови објављени у часописима међународног значаја (M20)

1. J. Djordjević, E. Nešović, On the Bishop frame of pseudo null curve in Minkowski space-time, Turk. J. Math. Vol. 44 (2020), 870-882 **M22**
2. J. Djordjević, E. Nešović, U. Öztürk, On generalized Darboux frame of a spacelike curve lying on a lightlike surface in Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$, Turk. J. Math. Vol. 47, No. 2 (2023), 883-897 **M22**
3. J. Djordjević, E. Nešović, On the Bishop frame of partially null curve in Minkowski space-time, Filomat, Vol. 38, No. 4 (2024), 1439–1449 **M22**
4. J. Djordjević, E. Nešović, U. Öztürk, E.B. Koc Öztürk, On null Cartan normal isophotic and normal silhouette curves on a timelike surface in Minkowski 3-space, Math. Meth. Appl. Sci. 47 (2024), 10520–10539 **M21**

Научни радови објављени у часописима националног значаја (M50)

1. J. Djordjević, E. Nešović, On generalized Darboux frame of pseudo null curve lying on a lightlike surface in Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$, Int. Elec. J. Geom. Vol. 16, No. 1 (2023), 81-94 **M51**

2. M. Grbović Ćirić, J. Djordjević, E. Nešović, On null Cartan rectifying isophotic and rectifying silhouette curves lying on a timelike surface in Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$, Int. Elec. J. Geom. Vol.17, No. 1 (2024), 171-183 **M51**

Саопштења на међународним научним скуповима штампана у изводу (M34)

J. Djordjević, E. Nešović, On generalized Darboux frame of a spacelike curve lying on a lightlike surface in Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$, Book of Abstracts, XXI Geometrical Seminar, Belgrade, June 26-July 2, (2022) **M34**

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Карактеристичне врсте репера кривих у геометрији простора Минковског

представља оригинално ауторско дело настало као резултат сопственог истраживачког рада.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам једини аутор наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији нисам извршио/ла повреду ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,

У Крагујевцу,

22.10.2024. године,



потпис аутора

**ИЗЈАВА АУТОРА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Изјављујем да су штампана и електронска верзија докторске дисертације под насловом:

Карактеристичне врсте репера кривих у геометрији простора Минковског

истоветне.

У Крагујевцу,

22.10.2024. године,



потпис аутора

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Јелена Ђорђевић,

☒ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Карактеристичне врсте репера кривих у геометрији простора Минковског

и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☒ дозвољавам

☐ не дозвољавам¹

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

¹ Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

- 1) Ауторство
- 2) Ауторство - делити под истим условима
- 3) Ауторство - без прерада
- 4) Ауторство - некомерцијално
- 5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима
- 6) Ауторство - некомерцијално - без прерада²

У Крагујевцу,
22.10.2024. године,



потпис аутора

² Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: <http://creativecommons.org.rs/>