

Између броја и симбола: репрезентације једначина у уџбеницима млађих разреда основне школе

Ненад Милинковић*

Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет, Ужице

Сања Маричић*

Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет, Ужице

Јелена Стојкановић*

Гимназија „Јосиф Панчић”, Бајина Башта

Апстракт: Развој алгебарског мишљења у млађим разредима основне школе представља један од кључних изазова савремене наставе математике. Циљ овог истраживања био је да се утврде заступљеност и врсте репрезентација које се користе у уџбеницима математике у Србији приликом увођења садржаја о једначинама, као и да се испита у којој мери задаци подстичу комбиновање различитих представа и прелаз из једне у другу. Узорак је обухватио уџбенике математике за млађе разреде основне школе четири издавачке куће. Истраживање је засновано на анализи садржаја, при чему су задаци класификовани према доминантној репрезентацији: вербалној, нумеричкој, графичкој и симболичкој. Резултати показују да доминирају вербалне репрезентације, а симболичка се јавља као доминантна тек у уџбеницима за четврти разред, и да је број задатака са комбинованим представама мали. Експлицитни захтеви за превођење између представа су ретки или одсутни у уводним примерима. На основу налаза може се закључити да постоји потреба за систематским увођењем нумеричких и графичких активности, као и потреба

* milinkovic.nenad84@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2282-787X>

* sanjamaricic10@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-0464-3527>

* jelena.stojkanovic79@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0003-7330-1576>

за експлицитним захтевима за превођење представа једне у другу, како би симболичка нотација била смислен резултат постепеног развоја, а не крајњи формални корак.

Кључне речи: алгебра, репрезентација, уџбеник, једначина, математика.

Увод

Развој алгебарског мишљења у млађим разредима основне школе последњих деценија постаје једна од централних тема у истраживањима из области методике наставе математике. Савремени приступи учењу алгебре одбацују идеју да је она искључиво питање старијих разреда и инсистирају на томе да се основни појмови и начини размишљања граде постепено, још у раном школском узрасту (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, Newman-Owens, 2015). Међутим, схватање алгебарских појмова код ученика млађег школског узраста често је праћено бројним тешкоћама које произилазе из њихове апстрактне природе. Истраживања показују да ученици често знак једнакости доживљавају као наредбу *израчунај* уместо као релацију еквиваленције (Knuth, Stephens, McNeil, Alibali, 2006), што отежава разумевање знака једнакости, једначина и појма непознате. Слично томе, рад са симболима може довести до погрешних интерпретација, ако ученици немају довољно развијено појмовно разумевање, које подржава симболичку нотацију (MacGregor & Stacey, 1997).

Ови проблеми показују да је за учење алгебре на раном узрасту веома важно на који начин се ови садржаји представљају ученицима, односно које алгебарске репрезентације се користе у том процесу, а с циљем да се приближе ученицима тако да воде ка појмовном разумевању. У овом контексту, кључну улогу у учењу алгебарских садржаја има начин на који се задаци у уџбеницима формулишу и представљају, јер управо они чине примарни извор ученичког искуства са алгебарским садржајима.

Репрезентације математичких појмова могу бити различите – од текстуалних описа, преко нумеричких и графичких приказа, па све до симболичко-алгебарских формулација. Њихова улога није само у разумевању математичког значења, већ и у самом процесу изградње знања (Goldin & Kaput, 1996). Ученици, када имају прилику да раде са више облика представљања, развијају дубље разумевање и лакше уочавају

опште обрасце и односе (Ainsworth, 2006). С друге стране, ограниченост на један тип репрезентације може сузити могућности ученика да повежу конкретне примере са апстрактним појмовима и тиме отежају процес алгебризације, односно преласка са аритметичких на алгебарске садржаје. Употреба више различитих репрезентација кључна је за превазилажење апстрактности алгебарских појмова. Тако, графички модели могу визуализовати односе, табеле систематизовати податке, док вербалне формулације омогућавају ученицима да језички изразе своје схватање и повежу га са симболичком формом. Комбиновање ових приступа подстиче не само боље разумевање алгебарских појмова већ и развој флексибилности у размишљању, што се сматра предусловом за потпуније алгебарско мишљење (Blanton, Brizuela, Murphy Gardiner, Sawrey, Newman-Owens, 2017).

Посебно је значајан прелаз између различитих облика представљања. Тако, Дувал наглашава да је управо способност превођења између различитих система представљања један од најважнијих предуслова за развој апстрактног математичког мишљења (Duval, 2006). Овај аспект се у новијој литератури истиче као пресудан јер, како наводи Радфорд (Radford, 2014), прелаз између различитих начина представљања омогућава ученицима да превазиђу ограничења појединачних репрезентација и почну да граде генерализације, што представља суштински корак ка развоју алгебарског начина размишљања.

У настави математике, формирање алгебарског мишљења код млађих ученика није само питање упознавања симболичког записа већ и осмишљеног коришћења различитих облика представљања — вербалне, нумеричке, графичке и симболичко-алгебарске. Свако од тих представљања доприноси другачијем виду упознавања математичког садржаја. Ова разноврсност није само дидактичко средство већ и когнитивни механизам који омогућава прелаз од конкретног ка апстрактном резонувању (Ainsworth, 2006; Goldin & Kaput, 1996).

Дувал овај аспект разрађује уводећи концепт *семиотичких регистра*, који се могу разумети као различити системи или облици представљања математичких појмова (Duval, 2006). Према њему, суштина учења математике није у овладавању једним обликом представљања, већ у способности ученика да премошћују и преводе један облик представе у други. На пример, прелазак из табеле у симболички израз, или

из текста у графикон, омогућава ученицима да уоче структуру односа између величина и изграде општија правила и генерализације. Радфорд (Radford, 2014) мишљење у том контексту јесте да је управо овај прелаз пресудан за развој генерализација и померање ученичког размишљања са аритметичког на алгебарски ниво.

Аутори истичу да табеларне, текстуалне, симболичке и манипулативне репрезентације могу послужити као мост ка алгебарском значењу (Blanton, 2008; Brizuela & Earnest, 2008). У млађим разредима, табеле омогућавају ученицима да на видљив начин уоче однос који постоји између бројевних вредности, што касније може бити трансформисано у симболички израз. Истовремено, алгебарске репрезентације нуде концизност и општу структуру, али често без подршке у виду конкретних примера остају нејасне ученицима.

Предности и ограничења различитих облика представљања чине њихову комбинацију посебно значајном. Вербалне представе ученицима нуде природан језички контекст, али могу бити неодређене; нумеричке омогућавају конкретност и директно експериментисање, али често прикривају општи образац; графичке пружају јасну визуализацију односа, али су ограничене у приказу сложенијих појмова; алгебарске пак дају концизност и општост, али су за ученике често апстрактне и тешко приступачне без подршке других представа (Brizuela & Earnest, 2008; Friedlander & Tabach, 2001).

Управо због тога је у настави неопходно обезбедити окружење у којем ученици могу да истражују, комбинују и међусобно повезују више различитих начина репрезентација.

Вербални (текстуални) задаци омогућавају повезивање математичких ситуација са контекстом свакодневног живота и развијање математичке писмености. Истраживања показују да језичке вештине позитивно утичу на успех у решавању проблемских задатака и да језички комплексан задатак може водити ка неразумевању математичких садржаја, што захтева пажљиво конструисање задатака и, по потреби, језичку подршку ученицима (Prediger, 2019; Spencer, Fuchs, Fuchs, 2020). Дакле, иако вербални задаци подстичу развој говорних и когнитивних способности, њихова ефикасност зависи од језичке припремљености ученика — што захтева комбинацију са визуелним или конкретним материјалима и примерима.

Табеле, низови бројева и конкретни бројевни изрази често служе као први корак ка апстракцији. Систематичан рад са бројевним низовима код млађих ученика помаже у уочавању функционалних односа и подстиче каснији прелаз ка симболичком запису (Blanton et al., 2017; Stephens et al., 2017). Истовремено, истраживања упозоравају на ризик од механичког рачунања без разумевања, када се табеле и низови само попуњавају, без разумевања односа између величина и формулисања генерализација (Warren & Cooper, 2008; Warren, Cooper, Lamb, 2006). Тај ризик се умањује када се ученици усмеравају ка томе да образложе уочену генерализацију и да је преведу у други облик представљања, на пример из табеле у вербални опис, правило или израз.

Додатно, студије показују да већ ученици млађих разреда могу, уз добро осмишљене задатке, да артикулишу функционалне односе и да прелазе са конкретних примера на општа правила, посебно када се бројевне активности повезују са графичким или симболичким репрезентацијама (Cañadas, Brizuela, Blanton, 2016).

Графичке репрезентације суштински у алгебри представљају мост ка апстракцији. Графички прикази (дијаграми, графикони, цртежи) могу деловати као посредник између конкретних искустава и формалне симболике тако да омогућавају визуелизацију односа пре него што се код ученика појави потпуна симболичка манипулација (Duval, 2006). Ипак, корисност графикона зависи од квалитета самих приказа и од способности ученика да их разуме (Ainsworth, Bibby, Wood, 1997). Дакле, лоше обликовани графички задаци могу повећати когнитивно оптерећење и довести до погрешних закључака (Tabachneck-Schijf, Leonardo, Simon, 1997).

Симболичке репрезентације представљају озбиљан изазов за ученике млађих разреда, али истовремено представљају и циљ ка коме се тежи у учењу алгебре. Симболи и једначине представљају коначни корак у усвајању алгебарског језика и подразумевају прелаз на симболичко мишљење. Педагошки приступи којим се повезују текстуални садржаји и нумерички или графички прикази постепеним увођењем симболизације (на пример, трансформација реалне ситуације у изразе или слике, а касније у једначине) показали су се као корисни за успостављање смислених веза између језичког и симболичког изражавања (Blanton et al., 2017; Rittle-Johnson & Star, 2007).

Кључни допринос савремених истраживања јесте нагласак на интеграцији више репрезентација и развоју *репрезентационе флексибилности* – способности да се изабере, прилагоди и трансформише најприкладнија представа за дати проблем. Те вештине не настају саме од себе, већ захтевају експлицитну наставну подршку кроз задатке који инсистирају на превођењу између репрезентација и на поређењу њихове ефикасности (Duval, 2006; Rittle-Johnson & Star, 2007).

Истраживања у области ране алгебре (Blanton, 2008; Dougherty & Slovin, 2004) показују да већ у млађим разредима ученици могу да развијају генерализације кроз коришћење више различитих система представљања – од манипулативних модела и слика до симболичких израза. Такво искуство омогућава им да разумеју функционалне односе и да се постепено припремају за формално усвајање алгебарског језика.

Уџбеници као основно наставно средство имају пресудну улогу у том процесу јер они одређују не само садржаје већ и форме у којима се математички проблеми презентују. Уџбеник у том процесу треба да буде моћан алат који ће омогућити не само помоћ учитељу већ и бити водич ученику када учи. Основна идеја у овом раду је да утврдимо заступљеност и врсте алгебарских репрезентација које аутори уџбеника користе када је у питању учење садржаја о једначинама. Анализа уџбеника пружа могућност да се утврди у којој мери аутори подстичу употребу различитих репрезентација и њихових међусобних прелаза, што је индикатор квалитета уџбеника за развој раног алгебарског размишљања. С обзиром на то да у Србији постоји више издавача чији су уџбеници одобрени за наставу, поређење начина на који се третирају алгебарски садржаји омогућава увид у шире тенденције наставне праксе и могуће смернице за њено унапређивање.

Методологија истраживања

Циљ истраживања био је да се утврди заступљеност и врста различитих облика представа у алгебарским задацима који се односе на израчунавање непознатог броја, односно једначине, у уџбеницима математике за млађе разреде основне школе у Србији. Посебна пажња посвећена је анализи начина на који се задаци представљају, као и захтеви за прелаз из једне врсте представе у другу.

Истраживањем смо желели да: (1) утврдимо која је доминантна репрезентација коју аутори уџбеника користе приликом увођења садржаја о једначинама; (2) у којој мери су у уџбеницима заступљене комбиноване репрезентације и (3) да ли у уџбеницима постоје експлицитни захтеви за прелазак из једне у другу репрезентацију.

Узорком су обухваћени уџбеници математике од првог до четвртог разреда основне школе који имају званично одобрење Министарства просвете Републике Србије, издавачких кућа Клет, Вулкан знање, Логос и Едука.

Истраживање је засновано на техници анализе садржаја. Јединица анализе у овом истраживању био је задатак у уџбенику са алгебарским садржајем, односно они примери који служе за увођење и развијање алгебарског појма. Овим истраживањем обухваћени су садржаји о једначинама, а у првом разреду садржаји који се односе на одређивање непознатог броја.

Анализирани задаци су сврстани у пет основних категорија, према доминантној репрезентацији (Friedlander & Tabach, 2001; Pinto & Cañadas, 2021):

- вербална у реалном контексту (текстуални описи, реченице, без симболичког записа);
- вербална у математичком контексту (текстуални описи математичким језиком, без реалних ситуација);
- нумеричка (табеле, конкретни бројеви, примери са рачунањем);
- графичка (сликовни прикази, дијаграми, графикони, шеме);
- алгебарска/симболичка (симболи, једначине, изрази и слова као променљиве).

Поред наведених категорија репрезентација анализирали смо и постојање комбиноване представе у задацима у којима је понуђено више представа (нпр. табела + текст, слика + једначина).

У истраживању је коришћена евиденциона листа као инструмент у који су бележени резултати анализе садржаја уџбеника.

Резултати истраживања и дискусија

Први задатак у истраживању био је да се преко класификације уводних задатака у уџбеницима добије јасна слика о томе које представе аутори најчешће користе у обради садржаја о одређивању непознатог броја (једначина).

Анализа је заснована на анализи садржаја сваког примера којим се ученици упознају са једначинама и са поступком одређивања непознатог броја. Анализиран је сваки садржај, а кроз систематизацију су представљени доминантни начини репрезентације.

Подаци представљени у *Табели 1* показују доминантну улогу вербалних репрезентација (у реалном контексту и у математичком контексту) као најдоминантнијег начина увођења садржаја у већини разреда, док су нумеричке и графичке репрезентације знатно ређе.

Анализа показује да симболичко-алгебарска репрезентација постаје доминантна тек у четвртом разреду.

Табела 1. Заступљеност различитих врста репрезентација у садржајима о једначинама од првог до четвртог разреда основне школе

Представа		Разред				
		Први	Други	Трећи	Четврти	Укупно
Вербална (реални контекст)	f	3	14	15	9	41
	%	50	60,86	78,95	28,12	51,25
Вербална (математички контекст)	f	2	3	1	4	10
	%	33,33	13,04	5,26	12,5	12,5
Нумеричка	f	-	6	3	-	9
	%	-	26,09	15,79	-	11,25
Графичка	f	1	-	-	-	1
	%	16,66	-	-	-	1,25
Симболичка	f	-	-	-	19	19
	%	-	-	-	59,37	23,75
Укупно	f	6	23	19	32	80
	%	100	100	100	100	100

Велика заступљеност вербалних задатака у реалном контексту (51,25% укупно) одговара очекивањима програма и пожељним педагошким и методичким смерницама за млађи узраст ученика. На овај начин омогућено је конструисање смислених, контекстуализованих проблема, што даље омогућава повезивање математике са свакодневним искуством, а што је у складу са циљевима националног програма. Међутим, за развој појмова и за каснију генерализацију пресудна је не само једна врста репрезентација већ њена интеграција са другим врстама и могућност трансформације из једне у другу (Ainsworth, 2006; Duval, 2006).

Уколико вербални задаци остају доминантна врста представе без планског премошћавања на нумеричке, графичке приказе или симболе, ученицима ће недостајати прилике за формализацију и генерализацију алгебарских идеја. Посебно се мора обратити пажња на низак удео графичких (1,25%) и релативно скроман удео нумеричких репрезентација (11,25%) као уводних примера за обраду садржаја, при чему се нумеричка репрезентација највише појављује у другом разреду (26,09%).

Нагли помак ка задацима са симболичким представама карактеристичан је за четврти разред (59,37%), што указује на тенденцију аутора да у зрелијем добу ученика наметну формалну симболизацију. Овај „скок” треба тумачити опрезно. Иако програм предвиђа решавање сложенијих једначина у четвртном разреду, многи аутори упозоравају на то да симболи морају бити повезани са претходним искуствима и представама како би били смислени (Duval, 2006; Radford, 2014).

Осим у првом разреду, у ком не може бити симболизације јер се одређивање непознатог броја своди на повезивање аритметике и алгебре, у свим уводним примерима развијање појма једначина завршава се симболичким записом. Пажња се мора оријентисати ка томе да симболички запис мора бити резултат претходних трансформација тако да се подстиче апстракција; ако је пак симбол уведен без видљивог повезивања са нумеричким или графичким приказима, ризик је површна формализација и механичка манипулација симболима (Knuth et al., 2006).

Анализа по разредима даје конкретнију слику односа: у прва три разреда доминирају вербално представљени уводни задаци, што је релевантно с обзиром на узраст и програмске смернице (теразије, визуелни модели, примери реалног контекста).

У четвртном разреду доминирају примери са доминантном симболизацијом, односно примери алгебарске репрезентације. Треба нагласити да без довољних активности, у смислу комбинације различитих представа у претходним годинама, симболика може остати само „последница“, а не плод систематског развојног процеса (Rittle-Johnson & Star, 2007).

Други задатак истраживања односио се на испитивање заступљености комбинованих представа у задацима о једначинама у уџбеницима за млађе разреде основне школе. Резултати (Табела 2) показују да је број таквих задатака знатно мањи у односу на задатке у којима доминира једна представа.

Највећи удео комбинованих представа јавља се у првом и другом разреду, док је у осталим разредима присутна само у малом броју примера. Овакав резултат указује на чињеницу да аутори уџбеника, иако препознају значај различитих начина представљања, често задатке конципирају тако да они остају на нивоу једне представе.

Табела 2. *Заступљеност различитих врста комбинованих репрезентација у садржајима о једначинама од првог до четвртог разреда основне школе*

Представа		Разред				Укупно
		Први	Други	Трећи	Четврти	
Вербална (реални контекст)	f	1	-	-	-	1
	%	16,67	-	-	-	4,76
Вербална (математички контекст)	f	1	-	-	-	1
	%	16,67	-	-	-	4,76
Нумеричка	f	-	-	-	-	-
	%	-	-	-	-	-
Графичка	f	4	10	4	1	19
	%	66,66	100	100	100	90,47
Алгебарска	f	-	-	-	-	-
	%	-	-	-	-	-
Укупно	f	6	10	4	1	21
	%	100	100	100	100	100

Најчешћа комбинована представа је комбинација вербалног израженог реалним контекстом и графичког у облику шеме или слике, што у укупној анализи чини 85,71% укупних примера. Важно је нагласити да се, осим у првом разреду, већина уводних примера завршава симболичком нотацијом. То показује намеру аутора да се представљени појам формализује. Међутим, ако претходни кораци не укључују систематско повезивање и експлицитно превођење међу представама, формализација ризикује да остане површна, при чему се симбол користи као форма, а не као носилац појмовног значења. Овакву опасност описују студије које показују да увођење симболике пре него што ученици успоставе везе између примера, визуелних модела и вербалних објашњења доводи до „механичког“ коришћења симбола уместо до истинског апстрактног резоновања (Knuth et al., 2006; Rittle-Johnson & Star, 2007).

Анализа уџбеника показује још један значајан резултат који се односи на примере у којима је вербална представа у реалном контексту праћена графичким приказом и на крају симболичком артикулацијом. У пракси се често дешава да такве комбиноване представе остају само паралелно понуђене тако да графички прикази или цртежи допуњују текст, али не постоји експлицитни захтев да се садржај преведе из једне представе у другу. На овај начин се пропушта кључна прилика за развој репрезентационе флексибилности, јер задаци који експлицитно захтевају трансформацију међу представама подстичу ученика на артикулисање и осмишљавање везе између нумеричких, визуелних модела и симболичких израза (Ramírez Cañadas & Damián, 2022; Radford, 2014).

Према мишљењу Дувала, суштински проблем у учењу математике није само у коришћењу више различитих представа већ и у њиховом повезивању и могућности превођења једне у другу (Duval, 2006). Када се ученицима задају задаци у којима се вербална представа комбинује са нумеричком или графичком, омогућено им је да уоче различите, али комплементарне аспекте истог појма. На тај начин развија се дубље разумевање и повећава флексибилност у мишљењу (Ainsworth, 2006). Међутим, ако се комбиновање јавља ретко, онда су и могућности за овакве когнитивне трансформације ограничене.

Трећи задатак истраживања имао је за циљ да утврди у којој мери задаци у уџбеницима захтевају прелаз из једне представе у другу. Резултати показују да такви захтеви не постоје, што је логично ако се у

обзир узме да су анализирани само они примери који представљају ауторову представу увођења појма једначине. Стога, могли бисмо рећи да би истраживање усмерено на анализу задатака за вежбање у уџбеницима и радним свескама у овом смислу имало већег значаја.

Важно је нагласити и контекст националног програма наставе математике у Републици Србији. Програм математике у млађим разредима основне школе предвиђа да се већ у првом разреду јављају задаци у којима се израчунава непознат број, али без симболизације. То имплицира да је неопходно да ученици буду постепено уведени у процес преласка са вербалног и конкретног на симболичко. Ако уџбеници не нуде довољан број задатака који подстичу овакав прелаз, онда се ризикује да се у старијим разредима ученици сусретну са симболиком без адекватно изграђене основе и значења. Овај резултат директно указује на потребу за бољим планирањем примера уџбеничких задатака.

Закључак и импликације

Резултати истраживања показују да уџбеници математике за млађе разреде основне школе у Републици Србији најчешће користе вербалне представе као доминантан начин увођења ученика у садржаје о једначинама, при чему се симболичка нотација јавља тек у четвртном разреду као доминантна.

Овакав приступ је у складу са развојним карактеристикама деце и са програмским смерницама, јер омогућава контекстуализацију математичких проблема и повезивање са свакодневним искуством. Ипак, ограничена заступљеност нумеричких и графичких репрезентација, као и релативно мали број примера у којима се систематски подстиче комбиновање и превођење из једне представе у другу, упућују на недовољно искоришћен потенцијал уџбеничких материјала за развој дубљег разумевања појма једначине и развој алгебарског мишљења. Комбиноване представе и прелази између њих јесу присутни, али недовољно развијени. То може да ограничи могућност ученика да граде дубље разумевање појмова једначине и променљиве, јер се ослањање на једну представу често показује недовољном за формирање генерализација (Karut, 2008). То имплицира да се мора свесно инсистирати на креирању задатака који захтевају активне прелазе (на пример: од реченице ка табели, од

табеле ка графикону, и од графикона ка симболу). Само на тај начин симболички изрази добијају смисао и престају да буду просте процедуре или ознаке без значења.

Савремена истраживања указују на то да је систематско увежбавање прелаза између различитих облика представљања један од најважнијих предуслова за развој алгебарског мишљења. Тако, истраживање Стивенса и сарадника (Stephens et al., 2017) показује да уочавање образаца у нумеричким подацима добија своју пуну вредност тек када ученици могу да их генерализују и изразе у симболичком облику, чиме се омогућава разумевање њиховог значења у ширем контексту проблема.

Слично томе, Блантон и сарадници истичу да ученици који имају прилику да уочавају и вежбају прелазе између вербалних, табеларних и графичких форми развијају раније и стабилније разумевање појмова променљиве, али и функционалног односа (Blanton et al., 2017). Стога се ограничена заступљеност прелаза у уџбеницима може тумачити као слабост наставних материјала, која умањује потенцијале за развој флексибилног и генерализованог начина размишљања.

С тим у вези, резултате треба тумачити као јасан позив на ревизију уџбеничких комплета: пожељно је да у рангирању и редоследу задатака буде више доследности, на пример, да алгебарски задаци у другом и трећем разреду буду праћени експлицитним захтевима за превођење између различитих облика репрезентације, а да симболичка формализација у четвртом разреду буде природни завршетак тих трансформација (Ainsworth, 2006; Blanton et al., 2017). Таква пракса повећава репрезентациону флексибилност ученика и ојачава могућности за генерализацију, што јесте један од кључних исхода наставе математике на млађем школском узрасту.

На основу горе наведених налаза, опште препоруке за уџбенике и наставну праксу могу се формулисати овако:

(1) *синхронизовано приказивање* – исту ситуацију приказати у две или више представа истовремено (нпр. текст + табела + графикон), како би се истакли различити делови истог односа;

(2) *експлицитни захтеви за превођење* – употребљавати задатке који траже од ученика да изврше превођење између представа (нпр. „Напи-

ши једначину која одговара овом цртежу”; „Запиши једначину на основу текста”) и

(3) *рефлексију* — питати ученике: „Која је представа омогућила да лакше решиш проблем?” и „Како си дошао до тог решења?”. Овако обликовани уџбеници би били корисни из аспекта изградње веза које постоје између конкретног, реалног и симболичког, док у исто време подстичу развој алгебарског мишљења.

Када је реч о потенцијалним ограничењима овог истраживања, можемо рећи да се уџбеници временом мењају, па истраживање важи за тренутно стање уџбеника.

Поред тога, анализа је углавном дескриптивна, тако да се не мери разумевање ученика, већ се мере потенцијал уџбеника и његове предности и мане код анализираних садржаја алгебре.

Литература

- Ainsworth, S., Bibby, P. & Wood, D. (1997). *Information technology and multiple representations: New opportunities – new problems*. *Journal of Information Technology for Teacher Education*, 6(1), 93–105. <https://doi.org/10.1080/14759399700200006>
- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183–198. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001>
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511–558. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>
- Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Murphy Gardiner, A., Sawrey, K. & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 181–202. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0>
- Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the “best deal” problem. In D. Carraher, J. Kaput & M. L. Blanton (eds.): *Algebra in the early grades* (pp. 273–301). New York: Lawrence Erlbaum.
- Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87–103. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004>
- Dougherty, B. J. & Slovin, H. (2004). Generalized diagrams as a tool for young children's problem solving. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (eds.): *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 295–302). Bergen: Bergen University College.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco (eds.), *2001 Yearbook of the National Council of Teachers*

- of Mathematics: The roles of representation in school mathematics* (pp. 173–185). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Goldin, G. A. & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (eds.): *Theories of mathematical learning* (pp. 397–430). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (eds.): *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York: Routledge.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297–312. <https://doi.org/10.2307/30034852>
- MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1–19. <https://doi.org/10.1023/A:1002970913563>
- Pinto, E. & Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 113–134. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2>
- Prediger, S. (2019). Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal*, 31(4), 367–392. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00258-1>
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257–277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>
- Ramírez, R., Cañadas, M. C. & Damián, A. (2022). Structures and representations used by 6th graders when working with quadratic functions. *ZDM – Mathematics Education*, 54(6), 1393–1406. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01423-w>
- Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 561–574. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.99.3.561>
- Spencer, M., Fuchs, L. S. & Fuchs, D. (2020). Language-related longitudinal predictors of arithmetic word problem solving: A structural equation modeling approach. *Contemporary Educational Psychology*, 60, 101825. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.101825>

- Stephens, A. C., Fonger, N. L., Strachota, S. N., Isler, I., Blanton, M. L., Knuth, E. J. & Gardiner, A. M. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 143–166. <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636>
- Tabachneck-Schijf, H. J. M., Leonardo, A. M. & Simon, H. A. (1997). CaMeRa: A computational model of multiple representations. *Cognitive Science*, 21(3), 305–350. [https://doi.org/10.1016/S0364-0213\(99\)80026-3](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80026-3)
- Warren, E. A., Cooper, T. J. & Lamb, J. T. (2006). *Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning*. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 208–223. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.006>
- Warren, E. A. & Cooper, T. J. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8-year-olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171–185. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2>

Nenad Milinković

University of Kragujevac, Faculty of Education, Užice

Sanja Maričić

University of Kragujevac, Faculty of Education, Užice

Jelena Stojkanović

Gymnasium „Josif Pančić“, Bajina Bašta

BETWEEN NUMBERS AND SYMBOLS: REPRESENTATIONS OF EQUATIONS IN TEXTBOOKS FOR THE LOWER GRADES OF ELEMENTARY SCHOOL

Summary: Development of algebraic thinking in the lower grades of elementary school is one of the key challenges of contemporary mathematics education. The aim of this research study was to determine the frequency and the types of representations used in mathematics textbooks in Serbia when introducing equations, as well as to examine to what extent mathematical problems encourage combining different representations and translating between them. The sample included mathematical textbooks for the lower grades of elementary school from four publishing houses. The research was based on content analysis, where mathematical problems are classified according to the dominant representation type: verbal, numerical, graphical, and symbolic. The results show that verbal representations dominate the textbooks, whereas a symbolic type of representation appears to be dominant only in the textbooks for the fourth grade, and that the number of mathematical problems containing combined representations is small. Explicit requirements for translating between representations are rare or absent in the introductory examples. Based on the findings, it can be concluded that there is a need for the systematic introduction of numerical and graphical activities, as well as the need for explicit requirements for translating between representations so that the symbolic notation becomes a meaningful result of gradual development, rather than the final formal step.

Keywords: *algebra, representation, textbook, equation, mathematics.*