

Анализа успеха ученика седмог разреда на државним математичким такмичењима у односу на област и тип задатака: поређење ученика из специјализованих и класичних одељења¹

Александар Миленковић² 

Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу, Крагујевац, Србија

Милан Миликић 

Факултет педагошких наука, Универзитет у Крагујевцу, Јагодина, Србија

Ненад Вуловић 

Факултет педагошких наука, Универзитет у Крагујевцу, Јагодина, Србија

Апстракт Математичка такмичења све више привлаче пажњу истраживача у области математичког образовања, будући да доносе бројне бенефице за ученике – од продубљивања и проширивања математичких знања до развоја компетенција за решавање проблема. Имајући у виду да је ученицима седмог разреда у Републици Србији већ дуго низ година омогућено похађање специјализованих одељења ученика са посебним способностима за математику (СМ одељења), поставља се питање да ли њихово присуство у хомогеном одељењу утиче на постигнућа на државном такмичењу из математике. Циљ овог рада је да се подробније упореде постигнућа ученика седмог разреда СМ и класичних одељења на државном такмичењу, као и да се анализирају задаци на којима су ученици две групе остварили статистички значајно различите резултате. Анализом успеха у решавању 50 такмичарских задатака утврђено је да су ученици СМ одељења остварили статистички значајно боље резултате у 23 задатка, док су ученици класичних одељења имали значајно боље резултате у само једном задатку. Највеће разлике у користи ученика СМ одељења забележене су у задацима из теорије бројева, затим теорије и комбинаторике, док су најмање разлике уочене у задацима из алгебре. Такође, ученици СМ одељења су у значајно већој мери били успешнији у решавању доказних задатака него ученици класичних одељења. Детаљна анализа садржаја задатака указује да разлике у постигнућима могу бити последица шире и темељније математичког образовања којем су ученици СМ одељења изложени, као и њихове боље способности за синтезу различитих математичких појмова и шврћења у поседу решавача. Резултати овог истраживања могу послужити као смернице наставницима и ученицима у припреми за будућа математичка такмичења.

1 Рад настао у оквиру пројекта Предиктори постигнућа ученика 7. и 8. разреда на математичким такмичењима – PREDIMAT 7–8, финансираног од стране Центра за научноистраживачки рад САНУ и Универзитета у Крагујевцу.

2 aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs

Кључне речи: *математичка такмичења, њих одељења, математичке области, њихови задаци, њихови ученици.*

Увод

Такмичења из математике ученика основних школа имају дугу традицију у Републици Србији. Од првих такмичења шездесетих година прошлог века и првог републичког такмичења 1967. године (Mičić i Kadelburg, 2022) све до данас, постала су најмасовнија такмичења, на којима сваке године између 60000 и 70000 ученика од 4. до 8. разреда започиње такмичарски циклус (Vulović i sar., 2023).

Државно такмичење из математике је четврти ниво такмичења, на којем учествују ученици од 6. до 8. разреда основне школе. Иако до сада није рађено много истраживања која се баве конкретним постигнућима ученика на овим такмичењима, доступна истраживања показују да ученици који похађају специјализована одељења ученика са посебним способностима за математику (СМ одељења) постижу статистички значајно боља постигнућа у односу на ученике који похађају класична одељења. Вуловић и сар. (Vulović i sar., 2024) емпиријски су утврдили да су ученици СМ одељења у последњих 18 година остварили статистички значајно боље резултате чак 11 пута.

Овим радом желимо да испитамо постигнућа ученика седмог разреда основне школе на државним такмичењима из математике у односу на област и тип задатака, у зависности од тога да ли ученици похађају класична или СМ одељења у периоду од 2015. до 2024. године. Разлог томе налазимо у чињеници да су задаци који су обухваћени програмима такмичења, идући од школског ка међународном нивоу математичких такмичења, све мање засновани на школском курикулуму. Анализом задатака које су ученици са најбољим резултатима на државним такмичењима у посматраном периоду доминантно успешније решавали, желимо да пружимо допринос у идентификацији фактора који утичу на успех ученика на националним математичким такмичењима.

Теоријски оквир истраживања

Једна од функција математичких такмичења јесте буђење интересовања за дубље бављење математиком и развој компетитивности међу ученицима. Она пружају подршку ученицима будући да ученици, током решавања задатака, демонстрирају своје високе математичке способности до чијег је формирања дошло током процеса припреме за математичка такмичења (Keldibekova, 2020). Кендеров наводи да решавање сложених математичких задатака омогућава боље знање, али и развија вештине ученика за превазилажење реалних проблемских ситуација (Kenderov, 2022).

Лиједал разликује „учионице у којима се мисли“ и „учионице у којима се учи без размишљања“: први тип „учионица“ односи се на подстицајно школско окружење у коме ученици активно размишљају приликом учења, а други тип се односи на школско

окружење у коме ученици тек опонашају размишљање (Liljedahl, 2019). Управо математичка такмичења представљају средину у којој се афирмише размишљање ученика као важно искуство за бављење математиком на вишем нивоу. Разматрајући компетенције ученика потребне за бављење математиком на вишем нивоу, Фалк де Лосада и Тејлор истичу да решавање такмичарских задатака доводи до развијања компетенција ученика за решавање проблема и бољег усвајања и коришћења математичке терминологије (Falk de Losada & Taylor, 2022). Док школска математика прати традиционалну структуру излагања садржаја, математичка такмичења интегришу дате садржаје са начинима размишљања и стратегијама за решавање нових проблема и изазова, проширујући ум ученика и упознајући их са начином резоновања професионалних математичара (Nieto-Said & Sanchez-Lamonedá, 2022).

Задачи на такмичењима припадају областима алгебре, геометрије, теорије бројева и комбинаторике, али најчешће истовремено укључују две или више области. Кључ у решавању таквих задатака јесте у домишљатости, креативности и вештини решавања проблема. Истраживања показују да учесници такмичења остварују различит успех у зависности од области која доминира у задатку. Често су успешнији у решавању задатака из алгебре, комбинаторике и теорије бројева, у односу на задатке из геометрије (Facciaroni et al., 2023; Keldibekova, 2020; Špijunović & Maričić, 2013; Vulović i sar., 2024).

Фаћарони и сарадници су на узорку од 29592 ученика деветог разреда, који су од 2018. до 2020. године учествовали на окружном нивоу такмичења у Италији, испитивали разлике у постигнућима ученика у односу на математичку област задатака (Facciaroni et al., 2023). Фокус истраживања био је на геометрији и потешкоћама које ученици имају у решавању ових задатака и у извођењу доказа. Сваке године, првих четрнаест од укупно седамнаест задатака на такмичењу није захтевало извођење доказа, али је било неопходно да ученици познају теореме и поступке ради успешног решавања тих задатака. Насупрот томе, последња три задатка (по један из теорије бројева, комбинаторике и геометрије) захтевала су извођење доказа, али и носила 40% укупног броја бодова, што је имплицирало да правилно решавање управо тих трију задатака детерминише који ће ученици наставити такмичење на националном нивоу. Утврђено је да постоји разлика у успешности ученика у зависности од области, премда велики проценат ученика није ни покушао да уради доказни задатак из геометрије. У све три године обухваћене истраживањем, просечан број поена освојених на доказном геометријском задатку био је знатно нижи од просечног броја поена друга два доказна задатка. У оквиру истог истраживања, аутори су 2020. године спровели и анкетирање 486 учесника окружног такмичења у округу Рим. Приликом анкетирања, ученици су одговорили да се у просеку подједнако пријатно осећају приликом решавања задатака из сваке области. Иако нису биле статистички значајне, разлике у средњим вредностима показују да ученици геометрију ипак перципирају као најтежу од наведених области, док им је теорија бројева најлакша. Разлог за овако мале разлике у средњим вредностима ставова ученика аутори проналазе у чињеници да је скоро трећина ученика одговорила да су им такмичарски задаци из геометрије познати са редовне наставе (било по

сложености, садржају или структури), док је у случају остале три области у просеку сваки пети ученик одговорио да су такмичарски задаци слични онима које су решавали на часовима. То потврђује чињеницу да, иако познају основна правила геометрије, којима овладавају на часовима редовне наставе, и ученици који остварују изнадпросечна постигнућа имају потешкоћа са решавањем такмичарских задатака из геометрије (Sal'kov et al., 2017).

Иако се могу решити применом елементарних метода, задаци на математичким такмичењима могу бити веома изазовни за решавање. За разлику од конвенционалних задатака из школске математике, који обично захтевају репродукцију познатих процедура, задаци на такмичењу су инклузивни, будући да узимају у обзир различите ситуације, нагађања, испитивање претпоставки и постављање нових питања (Leikin, 2007), при чему се њихово решење сматра потпуним ако и само ако ученик пружи потпун доказ онога што тврди. Фалк де Лосада и Тејлор наводе да ученици на такмичењима, слично професионалним математичарима, процес доказивања најчешће започињу описивањем онога што се жели доказати (предлагањем аргумента), а затим настављају са извођењем доказа (Falk de Losada & Taylor, 2022). Том приликом, ученици користе један од четири типа доказа (Balacheff, 1988, према: Laamena et al., 2018): наивни емпиризам, којим се након провере посебних случајева потврђује истинитост аргумента; кључни експеримент, који се користи за избор између две претходно формулисане хипотезе; генерички пример, којим се објашњава зашто је аргумент истинит уз навођење специфичних особина и структура; и мисаони експеримент, којим се аргумент уопштава и диференцира од посебних случајева.

Утицај груписања ученика на њихова постигнућа јесте тема која је разматрана у литератури, али је у мањој мери испитиван утицај хомогеног груписања на постигнућа ученика на такмичењима. Главни циљ оваквог типа груписања јесте да се задовоље интересовања и специфичне образовне потребе ученика који имају посебне способности за математику, а који најчешће учествују на математичким такмичењима. Карп наводи да наставу у школама у којима су математички даровити ученици груписани у посебно одељење карактерише постављање проблема, решавање проблема, тражење оригиналних метода решавања проблема и проналажење веза између нових и старих проблема (Karp, 2009). Кулик и Кулик су спровели 90 студија обухваћених метаанализом и међу њима издвојили 25 истраживања чији је предмет било испитивање ефеката наставе у одељењима у којима су груписани ученици са посебним способностима (Kulik & Kulik, 1987). Резултати 19 студија показали су да даровити ученици постижу боље резултате када су груписани у хомогена одељења, док су у 11 истраживања те разлике статистички значајне. Исти аутори такође наводе да груписање даровитих ученика у хомогена одељења не даје жељене ефекте уколико изостане одговарајућа трансформација курикулума којом би се задовољиле њихове образовне потребе. Ове налазе потврђују и резултати студије Стинберген-Ху и сарадника, која је обухватила сто година истраживања ефеката које груписање ученика оставља на њихова академска постигнућа (Steenbergen-Hu et al., 2016).

Позитиван утицај преласка ученика из класичних одељења у гимназије са организованом наставом за ученике основне школе посебно надарене за математику

уочен је и у студији Асмата (Asmat, 2021). С обзиром на могућност да ученици после завршеног петог или осмог разреда упишу оваква одељења, један од циљева истраживања Асмата био је и да се утврди у којој мери избор школе и врста одељења утиче на остваривање постигнућа ученика на такмичењима. Показало се да ученици који су наставу похађали у гимназијама остварују просечно за 6% виша постигнућа од ученика из хетерогених одељења. Овакав податак потврђује предности начина рада који се спроводи у одељењима хомогеног типа, у којима је акценат на обогаћеном програму наставе математике (Kim, 2016; Rochayati & Rochayani, 2024).

Срираман наводи да су сложени математички задаци одличан начин да се ученицима пружи шанса да развијају математичке процесе вишег реда (пре свега репрезентацију, апстракцију и генерализацију) (Sriraman, 2003). У студији коју је спровео, Срираман је групи од девет ученика деветог разреда дао задатак да реше пет нерутинских комбинаторних проблема, при чему је генерализација коју је требало употребити за решавање пет проблема дата у облику Дирихлеовог принципа. Четири ученика који су претходно идентификовани као математички даровити били су успешни у откривању и формулацији општости, коју је требало употребити за решавање тих пет задатака, док, са друге стране, пет ученика који нису поседовали посебне способности за математику нису успели да препознају генерализацију скривену у проблему (Sriraman, 2003).

Сама суштина груписања математички даровитих ученика није издвајање од вршњака просечних способности, већ спајање са онима који деле иста интересовања. Када су ученици груписани у иста одељења, имају прилику да их вршњаци истих способности стимулишу да брже и ефикасније обрађују сложеније садржаје (Neihart, 2007; Swiatek & Lupkowski-Shoplik, 2003), јер наставу математике у оваквим одељењима одликују стратегије акцелерације, обогаћивања и продубљивања.

У свом истраживању су Вуловић, Миленковић и Миликић (Vulović i sar., 2024) анализирали заступљеност и постигнућа на државним такмичењима из математике у Србији која су у периоду током осамнаест година остваривали ученици седмог и осмог разреда који похађају СМ одељења при гимназијама и ученици из хетерогених одељења. Аутори истичу да су и у седмом и у осмом разреду просечне вредности броја бодова које су остварили ученици СМ одељења сваке године биле више у односу на ученике из класичних одељења. Просечни резултати указују да су ученици седмог разреда из СМ одељења за 39% имали виша постигнућа у односу на ученике из класичних одељења, док је успех ученика осмог разреда бољи за 32% од успеха ученика из класичних одељења.

Методологија истраживања

Закон у Републици Србији препознаје могућност груписања ученика даровитих за математику у посебна одељења. По завршетку шестог разреда основне школе, ученици имају могућност преласка у гимназије које организују наставу за ученике са посебним способностима за математику (Pravilnik o nastavnom planu i programu za učenike sedmog i osmog razreda osnovnog obrazovanja i vaspitanja obdarene

za matematiku, 2019). Приликом уписа, ученици полажу посебан квалификациони испит на коме се вреднују следеће ставке: резултати на тесту способности из математике, општи успех у петом и шестом разреду, оцене из математике у овим разредима и учешће на државном такмичењу из математике у шестом разреду.

Такмичење из математике на државном нивоу одржава се сваке године у мају, а право учешћа на њему има приближно по сто ученика шестог, седмог и осмог разреда основне школе са најбољим постигнућима на окружним такмичењима у току те школске године.

Циљ овог истраживања је анализа постигнућа ученика седмог разреда СМ и класичних одељења на државним такмичењима из математике у односу на математичке области којим задаци са такмичења припадају и у односу на тип задатка. У складу са циљем, испитиване су разлике у постигнућима ученика класичних и СМ одељења у решавању тих задатака, као и анализа садржаја датих задатака. Из циља проистичу задаци истраживања којима треба утврдити:

- 1) однос броја задатака у којима су ученици СМ одељења остварили боље резултате од ученика из класичних одељења, броја задатака у којима су ове две групе ученика постигле једнаке резултате и броја задатака у којима су ученици из класичних одељења остварили боље резултате од ученика из СМ одељења;
- 2) однос броја задатака у контексту постигнућа ученика СМ и класичних одељења у зависности од математичке области којој задаци припадају;
- 3) однос броја задатака у контексту постигнућа ученика СМ и класичних одељења у зависности од тога да ли су задаци рачунски или доказни.

У раду је вршена секундарна анализа постигнућа ученика 7. разреда на државним такмичењима из математике, у периоду од 2015. до 2024. године. Ученици су на такмичењима решавали по пет задатака које је саставила Државна комисија за такмичење ученика основних школа, а за чију су израду имали 180 минута. Сви задаци су јавно доступни на званичном сајту Друштва математичара Србије. Државно такмичење се сваке године одржава уживо, као и на свим претходним нивоима, у школским условима, на основу Правилника о такмичењима. Садржаји задатака су дефинисани Програмом такмичења који доноси Друштво математичара Србије на почетку такмичарског циклуса. Правилник и Програм такмичења су јавно доступни. Оцењивање задатака се врши на основу прецизно дефинисане скале и упутства за прегледање (задаци се бодују парцијално). Сваки задатак се бодује максимално са 20 бодова.

Резултати добијени на државним такмичењима сваке године се обједињују у јединствену базу која је коришћена у овом истраживању. Узорак истраживања чине сви ученици седмог разреда који су учествовали на државним такмичењима из математике у периоду од 2015. до 2024. године, чији укупан број износи 1014. Структура популације у односу на тип одељења које ученици похађају дата је у Табели 1.

Табела 1

Структура популације истраживања

Година	Класично одељење		СМ одељење	
	F	%	F	%
2015.	64	66,67%	32	33,33%
2016.	50	50,00%	50	50,00%
2017.	57	58,16%	41	41,84%
2018.	53	52,48%	48	47,52%
2019.	60	62,50%	36	37,50%
2020.	60	61,22%	38	38,78%
2021.	50	50,00%	50	50,00%
2022.	61	54,46%	51	45,54%
2023.	64	61,54%	40	38,46%
2024.	67	61,47%	42	38,53%
Укупно	586	57,79%	428	42,21%

Добијени подаци обрађени су у софтверском пакету SPSS 20. Од статистичких мера и поступака коришћени су: фреквенције, проценти, аритметичка средина, статистички тест Шапиро-Вилк (енгл. Shapiro-Wilk) за одређивање нормалности расподеле нумеричких података, Студентов t-тест за независне групе и Ман-Витнијев (енгл. Mann-Whitney) за поређење расподеле података у две групе.

Резултати истраживања и дискусија

У складу са циљем истраживања, анализирали смо да ли постоје статистички значајне разлике у постигнућима ученика који похађају СМ и класична одељења, у решавању задатака за седми разред, на државним такмичењима из математике, за сваки задатак појединачно, у претходних десет година (укупно 50 задатака). За сваки задатак је у обе групе ученика испитано да ли број поена који су ученици остварили има нормалну расподелу. У случајевима када су обе групе имале нормалну расподелу, Студентовим t-тестом независних група упоређиване су аритметичке средине броја остварених поена, док су у супротним случајевима Ман-Витнијевим тестом упоређене расподеле броја поена које су ученици двеју група остварили. Резултати су приказани у Табели 2. За сваки задатак су наведене аритметичке средине броја поена које су ученици две групе остварили, док су резултати Ман-Витнијевог теста наведени у случајевима када су установљене статистички значајне разлике. Ни у једном задатку у коме су разлике испитиване Студентовим t-тестом нису установљене статистички значајне разлике у резултатима ученика.

Табела 2

Посјетивућа шахмичара седмог разреда, у односу на врсту одељења, по задацима, у периоду од 2015. до 2024. године

Година	Редни број задатка									
	1.		2.		3.		4.		5.	
	Класично	СМ	Класично	СМ	Класично	СМ	Класично	СМ	Класично	СМ
2015.			2,73	5,56						
	5,72	8,97	U=798.0 Z=-3.100 p=.002		2,39	4,09	6,42	9,13	1,31	3,50
2016.					3,44	8,78	12,00	15,98		
	7,90	8,38	9,86	12,72	U=914.0 Z=-2.414 p=.016		U=1009.5 Z=-1.994 p=.046		3,64	4,56
2017.	7,00	11,56	4,30	9,85	4,65	9,90	3,21	8,02	7,18	11,32
	U=798.0 Z=-2.766 p=.006		U=644.5 Z=-3.946 p=.000		U=782.5 Z=-2.833 p=.005		U=861.5 Z=-2.349 p=.019		U=849.0 Z=-2.371 p=.018	
2018.			8,58	12,54					6,57	13,42
	17,08	16,96	U=990.0 Z=-2.071 p=.038		2,17	2,35	3,02	4,73	U=742.0 Z=-3.800 p=.000	
2019.			6,75	12,17					7,03	3,72
	10,32	13,39	U=664.5 Z=-3.178 p=.001		10,00	12,06	6,90	8,06	U=862.0 Z=-1.962 p=.050	
2020.			8,55	13,95	10,50	18,71	2,67	6,58	4,40	9,76
	9,62	13,08	U=745.0 Z=-3.056 p=.002		U=591.0 Z=-4.545 p=.000		U=829.5 Z=-2.394 p=.017		U=690.0 Z=-3.491 p=.000	
2021.					11,10	15,62				
	6,00	7,60	11,06	12,18	U=865.0 Z=-2.987 p=.003		14,22	15,54	2,00	1,20
2022.	9,18	12,65	2,26	7,94			8,08	12,84	0,84	5,35
	U=1193.5 Z=-2.306 p=.021		U=866.5 Z=-4.523 p=.000		4,25	4,90	U=1063.5 Z=-2.960 p=.003		U=1146.5 Z=-3.147 p=.002	
2023.	6,53	8,75	4,48	7,03	10,08	12,15	4,84	5,50	1,39	3,57
2024.			10,21	15,14			2,96	7,07	11,30	14,38
	18,33	17,83	U=931.0 Z=-3.064 p=.002		9,76	11,57	U=1011.5 Z=-2.781 p=.005		U=1080.0 Z=-2.095 p=.036	

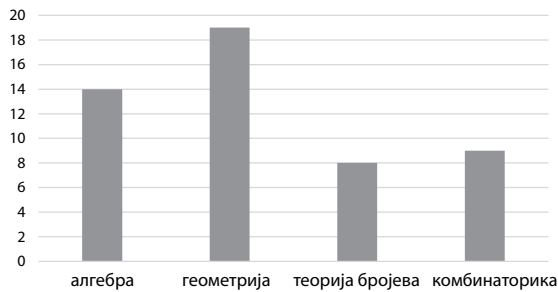
Од 50 посматраних задатака, ученици СМ одељења постигли су статистички значајно боље резултате у 23 задатка, у 26 задатака разлике нису биле статистички значајне, док су ученици класичних одељења у једном задатку постигли статистички значајно боље резултате.

Успех ученика у зависности од области којима припадају задаци

Већ је напоменуто да задаци припадају областима алгебре, геометрије, теорије бројева и комбинаторике, а да су за решавање одређеног броја задатака потребна знања и умења из две или три области. Сваки задатак сврстали смо у једну област која је доминантна у његовом решавању судећи по садржајима и поступцима. На основу Графика 1, уочавамо да је у посматраном периоду највећи број задатака на државним такмичењима био из геометрије, затим из алгебре, па комбинаторике, а најмањи број из области теорије бројева.

Графикон 1

Број задатака на државним такмичењима ученика 7. разреда од 2015. до 2024. године, по областима



Ако упоредимо успех по задацима ученика СМ и класичних одељења, у односу на области којима задаци припадају, добијамо резултате приказане на Графику 2.

Графикон 2

Посећивања ученика 7. разреда из СМ и класичних одељења у односу на област из које су задаци на такмичењу у периоду од 2015. до 2024. године



Уочавамо да је разлика у постигнућима у корист ученика СМ одељења највећа на задацима из теорије бројева. Од 8 задатака из ове области, ученици СМ одељења су у 5 задатака имали статистички значајно бољи резултат. Анализом садржаја ових задатака уочавамо да сви садрже делове који се могу решити познавањем садржаја са редовне наставе, нпр. растављања броја на просте чиниоце или дељивости и остатка при дељењу природним бројем, али да је за успешно спровођење читавог решења обично неопходно и добро познавање садржаја додатне наставе, нпр. дешифровање бројева у декадном запису у складу са датим условима, примена Дирихлеовог (комбинаторног) принципа (на дељивост природним бројем). Стога је нпр. примена конгруенција за одређивање остатка при дељењу, као и специјално за одређивање последње цифре вишецифреног броја (као специјалан случај дељења са 10), нешто са чиме се просечан ученик основне школе не сусреће, осим ако наставник томе не посвети посебну пажњу на додатној настави. С друге стране, веће су шансе да ће ученици седмог разреда СМ одељења имати прилику да науче особине конгруенција јер се оне и јављају у њиховом програму рада. Поред тога, Дирихлеов принцип се такође обрађује искључиво на додатној настави математике (и наглашен је у програму такмичења). Напомињемо да се задаци у којима се примењује Дирихлеов принцип сврставају у комбинаторне, али да је један конкретан задатак (из 2018. године) класификован у теорији бројева, будући да је у решавању акценат на примени особина дељивости.

На геометријским задацима су ученици СМ одељења на 9 задатака остварили статистички значајно боље резултате, док разлика у резултатима код 10 задатака није постојала. Садржаји заступљени у овим задацима су усвајани пре седмог разреда (особине квадрата и правоугаоника, углова и троуглова, подударност троуглова, површина троуглова и четвороуглова, осна симетрија, симетрала дужи, симетрала угла, описана и уписана кружница у троугао, итд), а од садржаја седмог разреда заступљени су: Питагорина теорема са применама на троугао, четвороугао и многоугао, круг, периферијски и централни угао. Посебно треба нагласити да се у свим задацима очекивало познавање већег броја дефиниција, тврђења и особина из различитих тема, као и њихово синтетисање у решење задатка. Из тог разлога је било задатака у којима је требало повезати знања из две теме (подударност троуглова и углови троугла; збир углова у троуглу и периферијски угао...), три теме (троугао, четвороугао, Питагорина теорема; висина троугла, подударност троуглова, многоугао...), али и четири теме (особине правоуглог троугла, кружница уписана у троугао, обим троугла, површина троугла; симетрала угла, кружница уписана у троугао, углови троугла, подударност троуглова). Анализом захтева у овим задацима уочавамо да се садржаји које ученици треба да познају како би решили дате захтеве обрађују готово у пуном обиму у редовној настави. Ипак, неопходност повезивања садржаја из више области и креирање различитих стратегија јесу оно што њихово решавање чини захтевним. Поред способности за препознавање стратегије и познавања потребних садржаја, неопходна је и одређена увежбаност ученика, односно искуство у решавању сложених задатака, које се до одређене мере стиче вежбањем. До таквих искустава долазе кроз сарадњу са вршњацима који имају слична искуства, али и уз подршку наставника који води ученике кроз поступак решавања, бар у првом сусрету са таквим задацима.

На задацима из области комбинаторике ученици СМ одељења постигли су статистички значајно боље резултате у четири задатка, а скоро сви задаци припадали су областима додатне наставе: креирање победничке стратегије математичке игре, примена комбинаторике за решавање проблема бојења, пребројавање палиндрома, пребројавање начина на који се елементи скупа могу разбити у подскупове (који нису обавезно дисјунктни) са задатим својством итд. Овде се посебно истиче примена Дирихлеовог принципа у геометрији, код којег је потребно познавање геометријских садржаја који се обрађују на редовној настави, али је у решавању акценат на пребројавању геометријских објеката и доказивању да је одабиром било ког одређеног броја тих објеката могуће да се изабере њихов подскуп такав да испуњава задати услов.

Најмање разлике у постигнућима ученика су из области алгебре и у овој области се јављају у 5 од 14 задатака. У задацима из области алгебре акценат је на примени алгебарских трансформација, доказивању алгебарских једнакости, одређивању вредности алгебарских израза, примени степена и факторизацији природног броја, што се обрађује на редовној настави, док се из тема додатне наставе издвајају решавање линеарних и нелинеарних Диофантових једначина, алгебарски разломци и сложенији задаци из степена и операције са степеном. Ученици СМ одељења су статистички значајно боље решили задатке у којима је требало применити особине степена и алгебарске трансформације, одредити вредност израза у којима се јављају алгебарски разломци, факторизацију полинома и одређивање скупа решења система нелинеарних једначина. Можемо уочити да се садржаји заступљени у овим задацима претежно јављају на редовној настави, али и да су захтеви у њима прилично озбиљни за тај узраст ученика, будући да и подразумевају искуство у решавању сличних задатака, односно примену одговарајуће стратегије решавања.

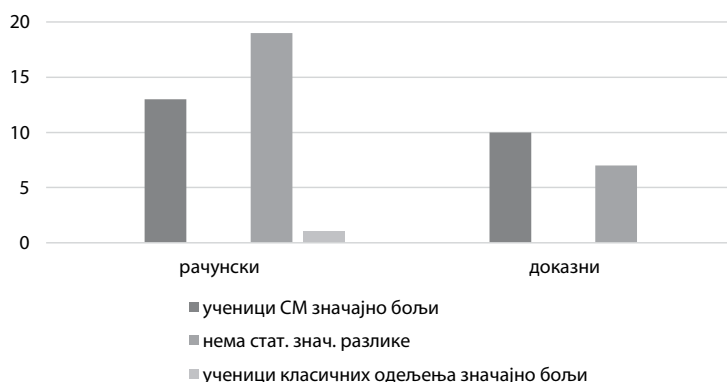
Успех ученика у зависности од типа задатака

Поред математичке области којој припадају задаци, желели смо да анализирамо успех ученика СМ и класичних одељења у односу на врсту (тип) задатака. У складу са тиме, поделили смо задатке на рачунске и доказне. Првом типу задатака припадају сви задаци у којима је требало одредити: вредност бројевног израза, меру неког геометријског објекта (дужину дужи, површину и/или обим фигуре, меру угла), остатак при дељењу, непознату вредност и сл. Другом типу задатака припадају они задаци у којима се тражи извођење неке врсте доказа: једнакост мера геометријских објеката, дељивост алгебарског израза природним бројем, ваљаност алгебарских једнакости, егзистенција подскупова чији елементи задовољавају одређено својство итд. Доказни задаци су обично захтевнији од рачунских, што потврђује и начин бодовања на одређеним такмичењима, где се доказни задаци вреднују значајно већим бројем поена (Facciaroni et al., 2023). У овим задацима ученици углавном прилазе решењу тако што прво опишу тврђење које треба доказати, па затим поступно изводе доказ (Falk de Losada & Taylor, 2022). Постигнућа ученика на основу овако дефинисане класификације дата су на Слици 3.

Од 33 задатка рачунског типа, ученици СМ одељења остварили су статистички значајно боља постигнућа у 39,39% задатака, у 57,58% задатака није било статистички значајне разлике, а само један задатак (3,03%) ученици из класичних одељења су статистички значајно боље урадили. Од преосталих 17 задатака доказног типа, ученици СМ одељења су остварили статистички значајно боље резултате у 10 (58,82%) задатака, док у осталим задацима разлике нису биле статистички значајне.

Графикон 3

Постигнућа ученика седмог разреда на државним такмичењима у зависности од типа задатака



Ученике који похађају СМ одељења, са једне стране, карактеришу добре предрасположности за бављење математиком на високом нивоу јер су неретко остваривали добре резултате на такмичењима у шестом разреду, где се већ јављају доказни задаци, а полагањем квалификационог испита за упис у СМ одељење потврдили су своје способности за решавање захтевних математичких задатака. С друге стране, у оквиру редовне и додатне наставе, ученици СМ одељења су захваљујући подршци наставника имали прилику да решавају већи број доказних задатака (у односу на ученике из класичних одељења), чиме су увежбали способност аргументације, па самим тим и научили да, навођењем одговарајућих контрапримера, претежно доказују да задатак нема решења или да не постоји математички објекат који задовољава захтевана својства – осим што су свакако на часовима алгебре и геометрије у већој мери доказивали позната математичка тврђења.

Уколико посматрамо конкретне садржаје код доказних задатака које су ученици СМ одељења боље урадили, издваја се примена Дирихлеовог принципа у геометрији. Од три задатка примене Дирихлеовог принципа (један у теорији бројева, а два у геометрији), разлике су у сва три задатка биле статистички значајне у корист ученика СМ одељења (5. задатак, 2018; 5. задатак, 2020; 4. задатак, 2022. године). Потешкоћа за ученике класичних одељења била је генерализација одређене карактеристике математичких објеката. Управо способност генерализације, као мисаони процес, и Дирихлеов принцип, као конкретан математички садржај, представљају комбинацију где ученици који поседују посебне способности за математику по правилу остварују боља постигнућа (Sriraman, 2003).

Закључак

Резултати ранијих истраживања показују да ученици седмог разреда груписани у хомогена одељења, где се у раду са њима подразумева продубљивање и обогаћивање наставног програма, постижу статистички значајно боље резултате од својих вршњака из хетерогених одељења (Neihart, 2007; Swiatek & Lupkowski-Shoplik, 2003; Vulović i sar., 2024) на државним такмичењима. До сличних резултата дошли смо и нашом анализом. Резултати указују да су ученици СМ одељења постигли статистички значајно боље резултате у 46% задатака на државним такмичењима у последњих десет година. Статистички значајна разлика у корист ученика СМ одељења се највише пута јавила у задацима из области теорије бројева, након чега следе геометрија и комбинаторика, да би тај проценат задатака био најмањи из алгебре.

За решавање задатака из одређених области, попут теорије бројева и комбинаторике, као предуслов било је неопходно познавање одређених поступака, тврђења и особина математичких концепата са којима се ученици у највећој мери срећу ван редовне наставе математике. За њихово усвајање није довољна сама изложеност тим садржајима, већ је неопходна и способност аргументације, уопштавања и генерализације. С друге стране, поред способности за препознавање стратегије и познавања садржаја из других области, попут геометрије и алгебре, потребна је увежбаност, односно искуство, за шта је улога наставника који треба да упозна ученике са одређеним процедурама у почетку од круцијалног значаја.

Када је реч о типу задатака, у рачунским задацима су ученици СМ одељења остварили статистички значајно боље резултате у нешто мање од 40% задатака, док је код доказних задатака тај проценат скоро 60%. Решавање доказних задатака захтевало је темељно познавање садржаја из више наставних тема, као и способност одржавања и синтетисања тока мисли у кохерентан и логички заснован доказ, који је поткрепљен одговарајућом аргументацијом. Дакле, потврђено је да познавање школске математике није довољно за успешно решавање такмичарских задатака који се заснивају на извођењу доказа и одговарајућем резонувању приликом тог поступка (Sal'kov et al., 2017).

Можемо закључити да су комбинација присуства надарености ученика за математику, заједно са детаљнијим (обогаћеним и продубљеним) наставним програмом, уз формалније бављење одређеним садржајима довели до тога да ученици СМ одељења у знатној мери надмашују постигнућа својих вршњака из класичних одељења. Правац наредних истраживања може се огледати у спровођењу квалитативних истраживања како би се расветлило који је од ова два ефектадоминантнији код већег броја ученика и у којој мери.

Литература

- Asmat, R. (2021). *Ordinal Rank Effects in Mathematical Competitions*. Retrieved July 31, 2024 from <https://warwick.ac.uk/fac/soc/economics/staff/rasmatbelleza/rank.pdf>
- Facciaroni, L., Gambini, A., & Mazza, L. (2023). The difficulties in geometry: A quantitative analysis based on results of mathematics competitions in Italy. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(2), 259–270. <https://doi.org/10.30935/scimath/12590>

- Falk de Losada, M. & Taylor, P. J. (2022). Perspectives on mathematics competitions and their relationship with mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 54, 941–959. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01404-z>
- Karp, A. (2009). Teaching the Mathematically Gifted: An Attempt at a Historical Analysis. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 11–29). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087909352_003
- Keldibekova, A. O. (2020). About the subject content of Mathematical Olympiads for schoolchildren. *Perspektivy nauki i obrazovanja – Perspectives of Science and Education*, 46(4), 269–282. <https://doi.org/10.32744/pse.2020.4.18>
- Kenderov, P. (2022). Mathematical competitions: an integral part of the educational process. *ZDM – Mathematics Education*, 54, 983–996. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01348-4>
- Kim, M. (2016). A Meta-Analysis of the Effects of Enrichment Programs on Gifted Students. *Gifted Child Quarterly*, 60(2), 102–116. <https://doi.org/10.1177/0016986216630607>
- Kulik, J. A., & Kulik, C. C. (1987). Effects of ability grouping on student achievement. *Equity & Excellence in Education*, 23(1–2), 22–30. <https://doi.org/10.1080/1066568870230105>
- Laamena, C. M., Nusantara, T., Irawan, E. B., & Muksar, M. (2018). How do the Undergraduate Students Use an Example in Mathematical Proof Construction: A Study based on Argumentation and Proving Activity. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(3), 185–198. <https://doi.org/10.12973/iejme/3836>
- Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In D. Pitta, P. Phillippou & G. Phillippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2330–2339). European Society for Research in Mathematics Education (ERME).
- Liljedahl, P. (2019). Conditions for supporting problem-solving: Vertical non-permanent surfaces. In P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical problem solving* (pp. 289–310). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_13
- Mićić, V., i Kadelburg, Z. (2022). 75 godina rada Društva matematičara Srbije. *Nastava matematike*, 67(3-4), 39–68.
- Neihart, M. (2007). The socioaffective impact of acceleration and ability grouping: Recommendations for best practice. *Gifted Child Quarterly*, 51(4), 330–341. <https://doi.org/10.1177/0016986207306319>
- Nieto-Said, J. H., & Sánchez-Lamonedá, R. (2022). The curriculum for mathematical competitions. *ZDM - Mathematics Education*, 54(5), 1043–1057. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01389-9>
- Pravilnik o nastavnom planu i programu za učenike sedmog i osmog razreda osnovnog obrazovanja i vaspitanja obdarene za matematiku* (2019). Prosvetni glasnik, Službeni glasnik Republike Srbije, br. 12/2019.
- Rochayati, M. Y., & Rochayani, M. Y. (2024). The Effect of Enrichment Program on the Achievement of Vocational High School Gifted Students in Mathematics Competitions. *Jurnal Ilmu Pendidikan (JIP) STKIP Kusuma Negara*, 15(2), 127–137. <https://doi.org/10.37640/jip.v15i2.1855>
- Sal'kov, N. A., Vyshnyepolskiy, V. I., Aristov, V. M., & Kulikov V. P. (2017). Academic Olympics on descriptive geometry as a catalyst of heuristic thinking. *Geometry & Graphics*, 5(2), 93–101. https://doi.org/10.12737/article_5953f3767b1e80.12067677
- Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, and the Ability to Formulate Generalizations: The Problem-Solving Experiences of Four Gifted Students. *The Journal of Secondary Gifted Education*, 14(3), 151–165. <https://doi.org/10.4219/jsge-2003-425>

- Steenbergen-Hu, S., Makel, M. C., & Olszewski-Kubilius, P. (2016). What one hundred years of research says about the effects of ability grouping and acceleration on K–12 students' academic achievement: Findings of two second-order meta-analyses. *Review of Educational Research*, 86(4), 849–899. <https://doi.org/10.3102/0034654316675417>
- Swiatek, M. A., & Lupkowski-Shoplik, A. (2003). An Evaluation of the Elementary Student Talent Search by Families and Schools. *Gifted Child Quarterly*, 49(3), 247–259. <https://doi.org/10.1177/001698620504900306>
- Špijunović, K., i Maričić, S. (2013). Pupils' Performance in the District Mathematics Competition as the Indicator of Efficiency of Primary Mathematics Education. In H. Butenko & B. Kozuh (Eds.), *Contemporary School and Education* (pp. 133–146). Ministry of Education and Science, Youth and Sport of Ukraine, Horlivka Institute for Foreign Languages of the State Higher Educational Establishment „Donbas State Pedagogical University” A. F. M. Krakow University, Faculty of Education University of Primorska. <https://doi.org/10.13140/2.1.3312.2240>
- Vulović, N., Maričić, S., i Randelović, B. (2024). Analiza uspešnosti rešavanja geometrijskih zadataka na okružnim takmičenjima učenika četvrtog razreda osnovne škole. *Zbornik Instituta za pedagoška istraživanja*, 56(2), 259–279. <https://doi.org/10.2298/ZIPI2402259V>
- Vulović, N., Milenković, A., & Milikić, M. (2024). Razlike u postignućima učenika 7. i 8. razreda koji nastavu pohađaju u osnovnim školama i pri gimnazijama na državnim takmičenjima iz matematike. *Zbornik radova Pedagoškog fakulteta u Užicu*, 27(26), 221–244. <https://doi.org/10.5937/ZRPFU2426221V>
- Vulović, N., Mihajlović, A., i Milinković, J. (2023). Polne razlike na matematičkim takmičenjima u Republici Srbiji. *Inovacije u nastavi*, 36(3), 119–135. <https://doi.org/10.5937/inovacije2303119V>

Примљено: 10.07.2025.

Коригована верзија примљена: 10.09.2025.

Прихваћено за штампу: 10.09.2025.

Александар Миленковић

Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу, Крагујевац, Србија
<https://orcid.org/0000-0001-6699-8772>

Милан Миликић

Факултет педагошких наука, Универзитет у Крагујевцу, Јагодина, Србија
<https://orcid.org/0000-0002-4241-8021>

Ненад Вуловић

Факултет педагошких наука, Универзитет у Крагујевцу, Јагодина, Србија
<https://orcid.org/0000-0002-6606-2357>



Овај рад је објављен под лиценцом Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0). Допуштено је да се дело копира и дистрибуира у свим медијима и форматима, да се прерађује, мења и надограђује у било које сврхе, укључујући и комерцијалне, под условом да се на правиан начин цитирају његови првобитни аутори, постави линк ка оригиналној лиценци и назначи да ли је дело измењено. Корисници су при томе дужни да наведу пун библиографски опис чланка објављеног у овом часопису (аутори, наслов рада, наслов часописа, волумен, свеска, пагинација), као и његову DOI ознаку, а у случају објављивања у електронској форми такође су дужни да поставе и HTML линк.