

Fakultet inženjerskih nauka
Univerziteta u Kragujevcu

Mehanika kontinuuma za inženjere

Dragan Rakić, Miroslav Živković

Kragujevac, 2025.

Autori:

Dr Dragan Rakić, vanr. prof, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu
Dr Miroslav Živković, red. prof, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu

Naslov publikacije:

Mehanika kontinuuma za inženjere

Naziv izdavača:

Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu, Sestre Janjić 6, 34000 Kragujevac

Za izdavača:

Dr Slobodan Savić, red. prof, dekan, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu

Urednik:

Dr Blaža Stojanović, red. prof, prodekan za nastavu, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu

Recenzenti:

Dr Vladimir Dunić, vanr. prof, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu
Dr Nenad Stojanović, vanr. prof, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Kragujevcu

Korica:

Milan Bojović, mast. inž, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu

Mesto i godina izdavanja: Kragujevac, 2025. godine.

Tiraž: 150 primeraka

Štampa: Grafički centar INTERPRINT, Kragujevac

ISBN broj: 978-86-6335-126-4

Copyright © Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu, Kragujevac 2025.

Odlukom Nastavno-naučnog veća Fakulteta inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu, broj 01-1/145-34 od 23.01.2025. godine odobreno je izdavanje ove publikacije kao osnovnog univerzitetskog udžbenika.

Predgovor

Ovaj udžbenik predstavlja objedinjen nastavni materijal namenjen predavanjima i auditornim vežbama iz predmeta Mehanika kontinuuma na Fakultetu inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu. Prvenstveno je osmišljen za studente ovog fakulteta kao osnovni materijal za pripremu polaganja pismenog i usmenog dela ispita. Sadržaj je u potpunosti usklađen sa nastavnim planom i programom predmeta.

Udžbenik se sastoji od devet poglavlja, koja su grupisana po tematskim oblastima u skladu sa planom i programom predmeta. Prvo poglavlje obrađuje matematičke osnove indeksne notacije, uključujući konvenciju o sabiranju, definicije slobodnih i nemih indeksa, osnove vektorske i matrice algebre, kao i Kronekerov delta simbol i permutacioni simbol. Drugo poglavlje fokusira se na osnove tenzorske algebre, gde su objašnjeni pojmovi kao što su Dekartov i izotropni tenzori, tenzor kao linearni operator, kao i njihove osobine, invarijante i polarna dekompozicija.

Treće poglavlje uvodi osnove tenzorskog računa, u okviru koga se definišu skalare, vektorske i tenzorske funkcije, definiše notacija sa zarezom, definiše gradijent, divergencija i rotor. Četvrto poglavlje obrađuje hipoteze mehanike kontinuuma, gde se definiše notacija u mehanici kontinuuma, konfiguracija kontinuuma, definišu masa i gustina, pojam kretanja, materijalne i prostorne koordinate, materijalni izvod, brzina i ubrzanje, kao i brzina deformacije. Peto poglavlje obrađuje deformaciju, u okviru koga se definiše tenzor gradijenta deformacije, izduženje i rotacija, tenzor deformacije, daje veza između deformacije i pomeranja, definiše tenzor infinitezimalne deformacije, infinitezimalno izduženje i rotacija, daju uslovi kompatibilnosti, definišu glavne deformacije, kao i devijator deformacije. Šesto poglavlje se odnosi na pojam napona, gde se obrađuju zapreminske i površinske sile, komponente napona, tenzor napona, normalni i smičući napon, glavni napon, devijator napona i Piola-Kirhofov tenzor napona. Sedmo poglavlje obrađuje fundamentalne zakone mehanike kontinuuma u okviru koga je dat zakon o održanju mase, zakon o promeni količine kretanja, zakon o promeni momenta količine kretanja, kao i zakon o održanju mehaničke energije materijalnog sistema.

Osmo poglavlje se odnosi na konstitutivno modeliranje u okviru koga je obrađena linearna elastičnost, hiperelastičnost i hipoelastičnost, kao i plastičnost materijala. Deveto poglavlje razmatra princip virtualnog rada, gde je obrađeno virtualno pomeranje i virtualna deformacija.

Svako poglavlje, osim teorijskog pregleda, sadrži i primere zadataka koji su prilagođeni zahtevima ispita na Fakultetu inženjerskih nauka. Ovi zadaci pružaju studentima praktične smernice za razumevanje i primenu teorijskih koncepata.

Izražavamo zahvalnost recenzentima na stručnim sugestijama i korekcijama koje su unapredile kvalitet ovog udžbenika. Posebno se zahvaljujemo studentima master akademskih studija na smeru za Primenjenu mehaniku i automatsko upravljanje generacije 2024/2025, čije su sugestije tokom izvođenja nastave doprinele unapređenju kvaliteta nastavnog materijala.

Unapred se zahvaljujemo svim čitaocima koji će svojim komentarima i predlozima doprineti daljem unapređenju ovog udžbenika u narednim izdanjima.

*U Kragujevcu,
Januar 2025.*

Autori

Sadržaj

1	Indeksna notacija	1
1.1	Konvencija o sumiranju	1
1.2	Slobodni i nemi indeksi.....	2
1.3	Vektorska algebra	4
1.4	Matrična algebra	9
1.5	Kronekerov delta simbol (δ_{ij}).....	14
1.6	Permutacioni simbol (ϵ_{ijk}).....	15
1.7	Rešeni primeri	18
2	Tenzorska algebra	29
2.1	Koordinatne transformacije.....	29
2.2	Dekartov tenzor.....	32
2.2.1	Tenzorski proizvod vektora	33
2.2.2	Dekartov tenzor drugog reda.....	33
2.2.3	Dekartov tenzor višeg reda	34
2.2.4	Skalarne invarijante.....	34
2.2.5	Terminologija i notacija	35
2.3	Osobine tenzora	36
2.3.1	Nula tenzor.....	36
2.3.2	Jednakost tenzora	36
2.3.3	Množenje tenzora skalarom	37
2.3.4	Zbir i razlika tenzora	37
2.3.5	Množenje tenzora	38
2.3.6	Unutrašnji proizvod (kontrakcija).....	39
2.3.7	Unutrašnji proizvod tenzora i vektora.....	41
2.4	Izotropni tenzor	42
2.5	Tenzor kao linearni operator	44
2.6	Transponovani tenzor.....	45
2.6.1	Inverzni tenzor i ortogonalni tenzor	46

2.7	Simetrični i koso-simetrični tenzor	47
2.8	Invarijante tenzora	48
2.8.1	Determinanta tenzora	49
2.9	Devijator tenzora.....	50
2.10	Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori.....	51
2.11	Polarna dekompozicija.....	53
2.12	Rešeni primeri	54
3	Tenzorski račun.....	75
3.1	Skalarne, vektorske i tenzorske funkcije.....	75
3.2	Notacija sa zarezmom	77
3.3	Gradijent, divergencija i rotor	78
3.3.1	Gradijent skalarnog, vektorskog i tenzorskog polja.....	78
3.3.2	Divergencija vektorskog i tenzorskog polja.....	80
3.3.3	Rotor vektorskog i tenzorskog polja	81
3.4	Rešeni primeri	84
4	Hipoteze mehanike kontinuuma.....	91
4.1	Notacija kontinuuma	91
4.2	Konfiguracija kontinuuma	92
4.3	Masa i gustina	93
4.4	Definisanje kretanja	94
4.5	Materijalne i prostorne koordinate	96
4.6	Materijalni izvod.....	98
4.7	Brzina i ubrzanje	99
4.8	Brzina deformacije.....	100
5	Deformacija.....	103
5.1	Tenzor gradijenta deformacije	103
5.1.1	Translacija.....	104
5.1.2	Rotacija	105
5.1.3	Deformacija površinskog elementa.....	105
5.1.4	Deformacija zapreminskog elementa.....	108
5.1.5	Deformacija bez promene zapremine.....	109

5.2	Izduženje i rotacija	109
5.2.1	Dekompozicija deformacije	110
5.2.2	Troosno izduženje	111
5.2.3	Transformacija krutog tela	112
5.3	Tenzor deformacije	113
5.3.1	Normalna deformacija.....	114
5.3.2	Smičuća deformacija.....	116
5.3.3	Deformacija u prostornom obliku	118
5.4	Veza deformacije i pomeranja	121
5.5	Tenzor male deformacije	123
5.5.1	Dilatacija	125
5.6	Infinitezimalno izduženje i rotacija.....	125
5.7	Uslovi kompatibilnosti	128
5.8	Glavne deformacije	129
5.9	Devijator deformacije	130
5.10	Rešeni primeri	132
6	Napon.....	147
6.1	Zapreminske i površinske sile.....	147
6.2	Komponente napona	150
6.3	Tenzor napona.....	151
6.4	Normalni i smičući napon	154
6.5	Glavni naponi.....	156
6.6	Devijator napona	158
6.7	Piola-Kirhofov tenzor napona.....	159
6.8	Rešeni primeri	161
7	Fundamentalni zakoni mehanike kontinuuma	175
7.1	Zakon o održanju mase	175
7.2	Zakon o promeni količine kretanja	176
7.3	Zakon o promeni momenta količine kretanja.....	178
7.4	Zakon o održanju mehaničke energije	178
7.5	Rešeni primeri	180

8	Konstitutivno modeliranje.....	187
8.1	Linearna elastičnost	187
8.2	Hiperelastičnost i hipoelastičnost.....	192
8.3	Plastičnost	192
8.3.1	Uslovi tečenja.....	194
8.3.2	Plastično tečenje.....	196
8.3.3	Plastični potencijal	197
8.3.4	Ekvivalentni napon	198
8.4	Rešeni primeri	198
9	Princip virtualnog rada.....	205
9.1	Virtualno pomeranje i virtualna deformacija	205
9.2	Princip virtualnog rada.....	207
10	Literatura.....	211

10 Literatura

- Abeyaratne, R., 2006. *Lecture Notes on The Mechanics of Elastic Solids. Volume I: A Brief Review of Some Mathematical - Electronic Publication*. Cambridge, MA: Abeyaratne, Rohan.
- Abeyaratne, R., 2012. *Lecture Notes on The Mechanics of Elastic Solids. Volume II: Continuum Mechanics - Electronic Publication*. Cambridge, MA and Singapore: Abeyaratne, Rohan.
- Bonet, J. & Richard D., W., 1997. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Chandrasekharaiah, D. & Debnath, L., 1994. *Continuum Mechanics*. San Diego: Academic press inc..
- Dunica, Š. & Kolundžija, B., 1986. *Nelinearna analiza konstrukcija*. Beograd: Građevniski fakultet Univerziteta u Beogradu, Naučna knjiga.
- Ellad, T., Miller, R. & Ryan S., R., 2011. *Continuum Mechanics and Thermodynamics: From Fundamental Concepts to Governing Equations*. 1st ur. Cambridge: Cambridge University Press.
- Gonzalez, O. & Stuart, A. M., 2008. *A First Course in Continuum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Holzapfel, G. A., 2000. *Nonlinear Solid Mechanics - A Continuum Approach for Engineering*. New York, NY: John Wiley & Sons, Ltd.
- Itskov, M., 2019. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers*. Cham, Switzerland: Springer.
- Jarić, J., 1988. *Mehanika kontinuuma*. Beograd: Naučna knjiga.
- Kojić, M., Slavković, R., Živković, M. & Grujović, N., 2010. *Metod konačnih elemenata 1 - Linearna analiza*. Kragujevac: Mašinski fakultet Univerziteta u Kragujevcu.
- Lai, W. M., Rubin, D. & Krempl, E., 2010. *Introduction to Continuum Mechanics*. Burlington, MA: Elsevier.
- Mase, G., 1970. *Theory and Problems of Continuum Mechanics*. New York: McGraw-Hill.
- Mićunović, M., 1990. *Primenjena mehanika kontinuuma*. Beograd: Naučna knjiga.
- Reddy, J. N., 2013. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sudhakar, N., 2009. *Introduction to Continuum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Xavier, O. & Agelet de Saracibar, C., 2017. *Continuum Mechanics for Engineers: Theory and Problems*. Barcelona: s.n.

Živković, M., 2006. *Nelinearna analiza konstrukcija*. Kragujevac: Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

539.3(075.8)

539.3:514.743(075.8)

РАКИЋ, Драган, 1979-

Mehanika kontinuuma za inženjere / Dragan Rakić, Miroslav Živković. -
Kragujevac: Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta, 2025 (Kragujevac:
Interprint). - IV, 212 str.: graf. prikazi, tabele; 25 cm

Tiraž 150. - Bibliografija: str. 211-212.

ISBN 978-86-6335-126-4

1. Живковић, Мирослав, 1962- [аутор]

а) Механика непрекидних средина б) Пластомеханика -- Тензорски
рачун в) Еластомеханика -- Тензорски рачун

COBISS.SR-ID 162590217