

**45. JUPITER KONFERENCIJA**  
sa međunarodnim učešćem

**45<sup>th</sup> JUPITER CONFERENCE**  
with foreign participants

# **ZBORNİK RADOVA** **PROCEEDINGS**



**INOVACIONI CENTAR MAŠINSKOG FAKULTETA U BEOGRADU**  
**UNIVERZITET U BEOGRADU - MAŠINSKI FAKULTET**

**THE INNOVATION CENTER OF THE FACULTY OF MECHANICAL**  
**ENGINEERING IN BELGRADE**  
**UNIVERSITY OF BELGRADE, FACULTY OF MECHANICAL**  
**ENGINEERING**

Beograd, jun 2026.

## **45. JUPITER KONFERENCIJA**

# **ZBORNİK RADOVA PROCEEDINGS**

38. simpozijum  
**CIM U STRATEGIJI TEHNOLOŠKOG  
RAZVOJA INDUSTRIJE PRERADE METALA**



32. simpozijum  
**CAD/CAM**

41. simpozijum  
**NU – ROBOTI – FTS**

47. simpozijum  
**UPRAVLJANJE PROIZVODNJOM U  
INDUSTRIJI PRERADE METALA**

25. simpozijum  
**MENADŽMENT KVALITETOM**

Organizator:

**INOVACIONI CENTAR MAŠINSKOG FAKULTETA U BEOGRADU  
UNIVERZITET U BEOGRADU - MAŠINSKI FAKULTET**

Beograd, jun 2026. godine

## **45. JUPITER KONFERENCIJA**

### **ZBORNİK RADOVA**

Organizator i izdavač:

**INOVACIONI CENTAR MAŠINSKOG FAKULTETA U BEOGRADU  
UNIVERZITET U BEOGRADU - MAŠINSKI FAKULTET**

Adresa:

Kraljice Marije 16, 11120 Beograd, Srbija

Tel: 011/3370341, Fax: 011/3370364

**El. pošta: [jupiter@mas.bg.ac.rs](mailto:jupiter@mas.bg.ac.rs)**

Za izdavača: Dekan, dr Vladimir Popović, red. prof.

Urednik: dr Nebojša Manić, red. prof., Predsednik komisije za izdavačku delatnost Mašinskog fakulteta u Beogradu

Štampanje odobrila:

Komisija za izdavačku delatnost Mašinskog fakulteta i Dekan Mašinskog fakulteta

Odlukom br. 11/2026 od 26.05.2026.

Tehnički urednici:

Prof. dr Saša Živanović

Prof. dr Miloš Pjević

Doc. dr Dušan Nedeljković

Lazar Matijašević, mast. inž. maš.

Beograd, jun 2026.

---

**ISBN 978-86-6060-250-5**

Izaberite simpozijum JUPITER Konferencije

**CIM U STRATEGIJI TEHNOLOŠKOG RAZVOJA  
INDUSTRIJE PRERADE METALA**  
CIM IN THE STRATEGY OF TECHNOLOGICAL  
DEVELOPMENT OF METALWORKING INDUSTRY

**CAD/CAM**

**NU – ROBOTI – FTS**  
NC – ROBOTS – FMS

**UPRAVLJANJE PROIZVODNJOM U INDUSTRIJI  
PRERADE METALA**  
PRODUCTION CONTROL IN METALWORKING INDUSTRY

**MENADŽMENT KVALITETOM**  
QUALITY

---

Spisak svih radova na JUPITER Konferenciji  
po prezimenu prvog autora

<b>Borojević, S., Sredanović, B., Čiča, Đ., Gajanin, M., Marković, J., Vujašin, D.</b> IZVOD IZ ISTRAŽIVANJA U OBLASTI PROJEKTOVANJA TEHNOLOŠKIH PROCESA, SAVREMENIH METODA OBRADE I MAŠINA ALATKI .....	UR.38
<b>Bošković, J., Ivković, M., Pantić, M., Grujić, I., Živković, B., Petrović Savić, S., Erić, M.</b> MODELIRANJE I KINEMATSKA ANALIZA PETOOSNE GLODALICE .....	3.18
<b>Božić, D., Milošević, M., Santoši, Ž., Lukić, D.</b> HIBRIDNI „GREY-BOX” MODEL ZA OPTIMIZACIJU: INTEGRACIJA GRUPNE TEHNOLOGIJE I RANDOM FOREST REGRESIJE .....	1.12
<b>Budimir, A. B., Tabaković, S., Zeljković, M.</b> CALIBRATION OF A SPECIALIZED LATHE FOR MACHINING WHEELSET ASSEMBLIES OF RAIL TRACTION AND TOWED VEHICLES .....	3.25
<b>Crnobrnja Maletić, J., Vasilić, G., Nešovanović, Lj., Živanović, S.</b> GENERISANJE PUTANJA ZA OBRADU KONTURA PARAMETARSKIM PROGRAMIRANJEM PODRŽANO VIRTUELONOM OBRADOM .....	3.41
<b>Četnik, U., Matijašević, L., Jakovljević, Ž.</b> REGISTRACIJA TRODIMENZIONALNIH OBLAKA TAČAKA SA RAVNIM SEGMENTIMA .....	3.31
<b>Devedžić, G.</b> WAITING FOR THE FOUNDATION (WORLD) MODEL FOR CA <sub>x</sub> TECHNOLOGIES .....	UR.29
<b>Dragičević, A., Popović, M., Pjević, M., Mladenović, G.</b> IZRADA METALNIH DELOVA PRIMENOM ADITIVNE TEHNOLOGIJE EKSTRUDIRANJEM MATERIJALA .....	2.21
<b>Dragičević, A., Pjević, M., Popović, M., Mladenović, G.</b> EKSPERIMENTALNA IDENTIFIKACIJA MEHANIČKIH KARAKTERISTIKA POLIMERNIH DELOVA DOBIJENIH FFF METODOM ADITIVNE PROIZVODNJE .....	2.27
<b>Dučić, N., Baralić, J., Milićević, I., Savićević, P.</b> UPOREDNA ANALIZA G KODOVA GENERISANIH U CAD/CAM SOFTVERSKIM SISTEMIMA FUSION 360 I ZW3D .....	3.47
<b>Đurović, S., Velikinac, N., Mišić, M., Ivković, M., Lazarević, D., Gvozdić, A.</b> 3D PRINTING IN THE AUTOMOTIVE INDUSTRY: TECHNOLOGIES, APPLICATIONS, AND FUTURE PERSPECTIVES .....	2.15
<b>Erwinski, K., Ustaszewski, P., Živanović, S., Slavkovic, N., Dimic, Z.</b> VIABILITY OF USING RASPBERRY PI FOR HIGH-PERFORMANCE REAL TIME NUMERICAL CONTROL OVER ETHERCAT FIELDBUS .....	3.1
<b>Галин, И. Ю., Судов, Е. В., Бојановић, М., Мандић, А.</b> ОБЕСПЕЧЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОДУКЦИИ: НАДЕЖНОСТЬ В РАМКАХ УПРАВЛЕНИЯ ЖИЗНЕННЫМ ЦИКЛОМ .....	1.1
<b>Plić, A., Stojčić, V., Dimitrijević, M., Živanović, U., Pisković, M., Mandić, V., Delić, M.</b> ISPITIVANJE MOGUĆNOSTI ZAMENE METALNIH ALATA FDM-ŠTAMPANIM ABS ALATIMA PRI U-SAVIJANJU LIMOVA .....	2.35
<b>Ivanović, M., Radičević, B., Grković, V., Petrović, A.</b> METODOLOGIJA PROJEKTOVANJA MODULARNIH REKONFIGURABILNIH MAŠINA ALATKI .....	3.53
<b>Ivanović, M., Otović, M., Ivanov, T., Peković, O.</b> PRIMENA I TEHNOLOGIJA IZRADA KOMPONENATA BAZIRANIH NA TROSTRUKO PERIODIČNIM MINIMALNIM POVRŠINAMA (TPMS) .....	2.43
<b>Ivković, M., Bošković, J., Stojanović, N., Đorđević, A., Đurić, S., Petrović Savić, S., Devedžić, G.</b> NUMERIČKA SIMULACIJA PROCESA BUŠENJA SA REALNOM GEOMETRIJOM ALATA .....	3.59

**45. JUPITER KONFERENCIJA**  
sa međunarodnim učešćem

45<sup>th</sup> JUPITER CONFERENCE  
with foreign participants

**ZBORNİK RADOVA**  
**PROCEEDINGS**



**41. simpozijum**

**NU \* ROBOTI \* FTS**

Beograd, jun 2026.

NU – ROBOTI –FTS  
NC - ROBOTS – FMS

Sesija 1

<b>Erwinski, K., Ustaszewski, P., Živanović, S., Slavkovic, N., Dimic, Z.</b> VIABILITY OF USING RASPBERRY PI FOR HIGH-PERFORMANCE REAL TIME NUMERICAL CONTROL OVER ETHERCAT FIELDBUS .....	3.1
<b>Живановић, С., Воркапић, Н., Славковић, Н., Димић, З.</b> ПРОГРАМИРАЊЕ И СИМУЛАЦИЈА СТОНЕ ТРООСНЕ МАШИНЕ АЛАТКЕ СА ДВЕ ТРАНСЛАТОРНЕ И ВЕРТИКАЛНОМ ОБРТНОМ ОСОМ.....	3.9
<b>Bošković, J., Ivković, M., Pantić, M., Grujić, I., Živković, B., Petrović Savić, S., Erić, M.</b> MODELIRANJE I KINEMATSKA ANALIZA PETOOSNE GLODALICE .....	3.18
<b>Budimir, A. B., Tabaković, S., Zeljković, M.</b> CALIBRATION OF A SPECIALIZED LATHE FOR MACHINING WHEELSET ASSEMBLIES OF RAIL TRACTION AND TOWED VEHICLES .....	3.25
<b>Četnik, U., Matijašević, L., Jakovljević, Ž.</b> REGISTRACIJA TRODIMENZIONALNIH OBLAKA TAČAKA SA RAVNIM SEGMENTIMA .....	3.31
<b>Crnobrnja Maletić, J., Vasilić, G., Nešovanović, Lj., Živanović, S.</b> GENERISANJE PUTANJA ZA OBRADU KONTURA PARAMETARSKIM PROGRAMIRANJEM PODRŽANO VIRTUELONOM OBRADOM.....	3.41
<b>Dučić, N., Baralić, J., Milićević, I., Savićević, P.</b> UPOREDNA ANALIZA G KODOVA GENERISANIH U CAD/CAM SOFTVERSKIM SISTEMIMA FUSION 360 I ZW3D .....	3.47
<b>Ivanović, M., Radičević, B., Grković, V., Petrović, A.</b> METODOLOGIJA PROJEKTOVANJA MODULARNIH REKONFIGURABILNIH MAŠINA ALATKI .....	3.53
<b>Ivković, M., Bošković, J., Stojanović, N., Dorđević, A., Đurić, S., Petrović Savić, S., Devedžić, G.</b> NUMERIČKA SIMULACIJA PROCESA BUŠENJA SA REALNOM GEOMETRIJOM ALATA .....	3.59





Bošković, J., Ivković, M., Pantić, M., Grujić, I., Živković, B., Petrović Savić, S., Erić, M.<sup>1)</sup>

## MODELIRANJE I KINEMATSKA ANALIZA PETOOSNE GLODALICE<sup>2)</sup>

### Rezime

Savremene višeosne obradne mašine zahtevaju detaljnu analizu kinematskih karakteristika u cilju provere funkcionalnosti konstrukcionih rešenja i optimizacije radnih performansi. U radu je prikazan konstrukcioni model petoosne glodalice i simulacija njenog kretanja u digitalnom okruženju. Na osnovu konstruisanog modela formiran je kinematski model mašine u softverskom paketu CATIA V5 R21. Simulacijom su dobijeni podaci o brzinama i položajima pojedinih osa mašine. Dobijeni kinematski podaci dalje su obrađeni u MATLAB okruženju u cilju analize trajektorija kretanja i kinematskih karakteristika sistema. Rezultati omogućavaju detaljniji uvid u kinematsko ponašanje mašine i predstavljaju osnovu za unapređenje konstrukcije i optimizaciju performansi višeosnih obradnih mašina.

*Ključne reči:* petoosna glodalica, kinematska simulacija, CATIA V5 R21, MATLAB, višeosne obradne mašine

### 1. UVOD

CNC mašine predstavljaju automatizovane mašine alatke koje se mogu programirati za izvođenje složenih obradnih zadataka sa visokim stepenom tačnosti, ponovljivosti i produktivnosti. Njihova primena omogućila je značajan napredak u savremenoj proizvodnji, naročito u oblastima u kojima se zahtevaju visoka preciznost, stabilnost procesa i obrada delova složene geometrije. U okviru savremenih CNC sistema posebno mesto zauzimaju višeosne mašine alatke [1-3].

Petoosne CNC mašine omogućavaju koordinisano upravljanje sa tri translatorne i dve obrtne ose, čime se ostvaruje mogućnost promene položaja i orijentacije alata u odnosu na obradak tokom procesa obrade. Na taj način moguće je obrađivati složene geometrije, smanjiti broj potrebnih stezanja obratka, skratiti vreme obrade i poboljšati kvalitet obrađene površine. Zbog ovih prednosti, petoosni obradni sistemi imaju značajnu primenu u vazduhoplovnoj, automobilskoj, medicinskoj, alatnoj i drugim industrijskim oblastima u kojima se izrađuju delovi kompleksnih oblika i visokih zahteva tačnosti [1-3].

Međutim, povećanje broja upravljanih osa istovremeno dovodi do porasta složenosti kretanja mašine i potrebe za preciznom koordinacijom translatornih i obrtnih osa. Kod petoosnih sistema neophodno je pravilno definisati koordinatne sisteme, ograničenja kretanja, referentne tačke i trajektoriju alata kako bi se izbegle pojave kolizija, prekoračenja radnog prostora, naglih promena orijentacije alata i smanjenja tačnosti obrade [1,4]. Pored toga, dinamičko ponašanje mašine ima značajan uticaj na stabilnost procesa, kvalitet obrađene površine i tačnost obrade, naročito pri većim brzinama i složenim obradnim operacijama. Promene položaja, brzina i ubrzanja pokretnih osa mogu izazvati pojavu vibracija, odstupanja trajektorije alata i nepovoljno dinamičko ponašanje sistema [5].

Zbog toga modeliranje i simulacija predstavljaju važan korak u analizi i verifikaciji višeosnih CNC sistema pre njihove fizičke realizacije. Primena CAD/CAM i PLM softverskih okruženja omogućava razvoj

<sup>1)</sup> Julija Bošković, istraživač ([juljabkg@gmail.com](mailto:juljabkg@gmail.com)), Fakultet inženjerskih nauka, Univerzitet u Kragujevcu; Milan Ivković, istraživač ([milan.ivkovic@kg.ac.rs](mailto:milan.ivkovic@kg.ac.rs)), Fakultet inženjerskih nauka, Univerzitet u Kragujevcu; dr Marko Pantić, doc. ([marko.pantic@pr.ac.rs](mailto:marko.pantic@pr.ac.rs)), Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Prištini sa privremenim sedištem u Kosovskoj Mitrovici; dr Ivan Grujić, doc. ([ivan.grujic@kg.ac.rs](mailto:ivan.grujic@kg.ac.rs)), Fakultet inženjerskih nauka, Univerzitet u Kragujevcu; Zastava TERVO d.o.o; Bogdan Živković, istraživač ([bogdanzivkovic@mail.ru](mailto:bogdanzivkovic@mail.ru)), Fakultet inženjerskih nauka, Univerzitet u Kragujevcu; dr Suzana Petrović Savić, vanr. prof. ([petrovic.savic@kg.ac.rs](mailto:petrovic.savic@kg.ac.rs)), Fakultet inženjerskih nauka, Univerzitet u Kragujevcu; dr Milan Erić, red. prof. ([ericm@kg.ac.rs](mailto:ericm@kg.ac.rs)), Fakultet inženjerskih nauka, Univerzitet u Kragujevcu.

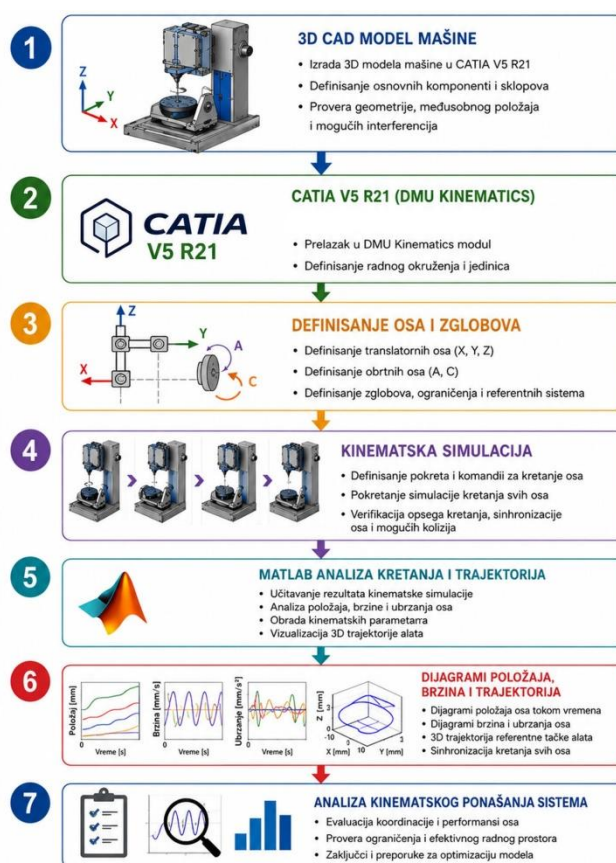
<sup>2)</sup> U okviru ovog rada saopštavaju se rezultati istraživanja koja su realizovana u okviru projekata koje finansijski podržava Ministarstvo nauke, tehnološkog razvoja i inovacija Vlade Republike Srbije po evidencionom broju Ugovora 451-03-34/2026-03/200107 od 05.02.2026.god.

geometrijskog i kinematskog modela mašine, definisanje veza između pokretnih elemenata, kao i proveru opsega kretanja i međusobne koordinacije osa. Na taj način moguće je uočiti potencijalne greške u ranoj fazi razvoja i obezbediti pouzdaniju osnovu za optimizaciju konstrukcije i upravljanja mašinom [2,4]. Dodatno, analiza rezultata simulacije u MATLAB okruženju omogućava detaljnije sagledavanje promena kinematskih parametara tokom rada sistema, kao i procenu kontinuiteta kretanja, sinhronizacije osa i karaktera trajektorije alata [6].

U okviru ovog rada izvršeno je modeliranje i kinematska analiza petoosne CNC glodalice sa konfiguracijom tri translatorne i dve obrtne ose. Trodimenzionalni CAD model mašine razvijen je u softverskom okruženju CATIA V5 R21, nakon čega je formiran kinematski model sistema. Na osnovu definisanog modela sprovedena je simulacija koordinisanog rada svih osa, a rezultati kretanja analizirani su u programskom okruženju MATLAB sa ciljem ispitivanja promena položaja, brzina, ubrzanja i trajektorije kretanja alata.

## 2. MATERIJALI I METODE

Metodološki postupak primenjen u ovom istraživanju zasniva se na integrisanom pristupu modeliranju, kinematskoj simulaciji i analizi kretanja petoosne CNC mašine alatke (Sl.1).



*Slika 1. Metodologija modeliranja, simulacije i analize petoosne mašine*

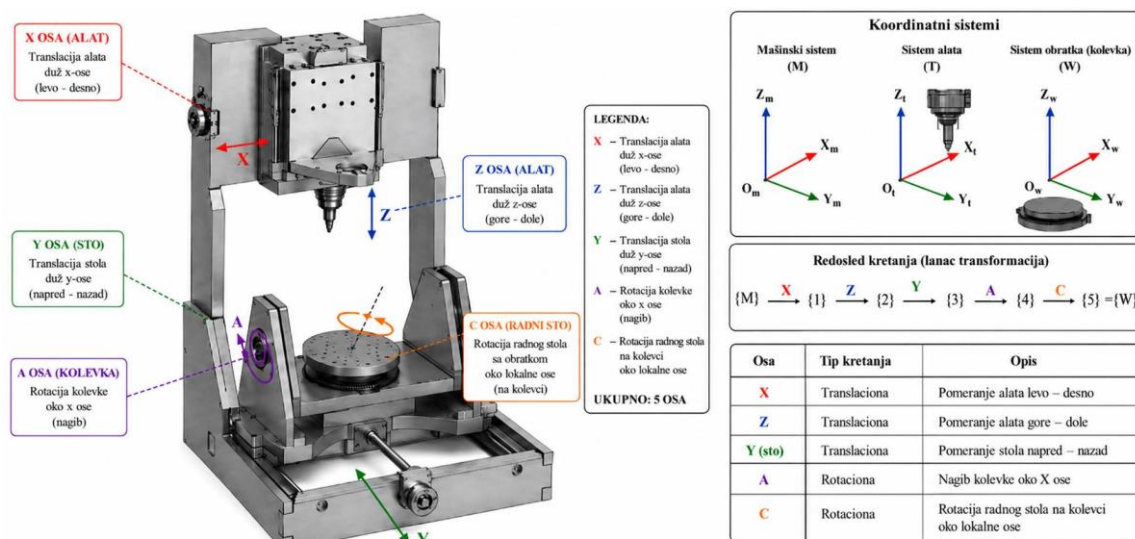
Prva faza obuhvatila je razvoj trodimenzionalnog CAD modela petoosne mašine alatke u softverskom okruženju CATIA V5 R21, pri čemu je izvršena strukturna organizacija modela i definisanje osnovnih konstrukcionih celina, pokretnih sklopova i međusobnih odnosa elemenata sistema. Analizom konstrukcionog modela identifikovane su funkcionalne celine i veze između pojedinih komponenti mašine, što je predstavljalo osnovu za formiranje kinematske šeme sistema. Konstrukcija mašine obuhvata noseću strukturu, radni sto, sistem linearnih osa, vertikalnu glavu sa alatom, kao i kolevku sa obrtnim stolom, preko kojih se ostvaruju rotaciona kretanja obratka. Nakon izrade geometrijskog modela, u okviru modula DMU Kinematics definisan je kinematski model mašine definisanjem tri translacione i dve rotacione ose, pripadajućih zglobova, ograničenja kretanja i referentnih koordinatnih sistema.

Translacione ose projektovane su pomoću linearnih vođica i navojnih vretena, pri čemu je za buduću fizičku realizaciju sistema predviđeno korišćenje koračnih motora tipa NEMA 17. Isti tip motora planiran je i za

realizaciju rotacionih osa  $A$  i  $C$ , u cilju ostvarivanja preciznog upravljanja translacionim i rotacionim kretanjima sistema. Translaciona kretanja realizuju se duž ortogonalnih osa  $x$ ,  $y$  i  $z$ , pri čemu osa  $x$  omogućava translaciono kretanje alata, osa  $y$  omogućava translaciono kretanje radnog stola, dok osa  $z$  omogućava vertikalno kretanje glave mašine, odnosno alata.

Rotaciona kretanja projektovana su preko osa  $A$  i  $C$ . Osa  $A$  predstavlja rotaciju kompletne kolevke oko  $x$  ose, čime se ostvaruje nagnjanje radnog stola i obratka u odnosu na alat. Osa  $C$  realizovana je na samoj kolevci i omogućava rotaciju radnog stola sa obratkom oko njegove lokalne ose. Položaj ose  $C$  zavisi od trenutnog položaja kolevke, odnosno od zakretanja oko ose  $A$ , pa se pri promeni nagiba kolevke menja i prostorna orijentacija ose rotacije radnog stola. Ovakva konfiguracija omogućava kombinovano pozicioniranje i orijentaciju obratka u prostoru, kao i koordinisano upravljanje svim osama u cilju analize složenog kretanja sistema i trajektorije referentne tačke alata (Tabl.1) (Sl.2).

Translaciona kretanja modelirana su pomoću prizmatičnih zglobova, dok su rotaciona kretanja realizovana primenom revolutnih zglobova. Svakom zglobu dodeljeni su odgovarajući stepeni slobode, ograničenja kretanja i referentni koordinatni sistemi (Sl.2).



Slika 2. Kinematska šema petoosne CNC mašine sa definisanim translacionim i rotacionim osama

Osa	Tip kretanja	Funkcija	Hod / opseg	Pogon
$X$	Translacija	Kretanje alata	90 mm	NEMA 17
$Y$	Translacija	Kretanje stola	100 mm	NEMA 17
$Z$	Translacija	Vertikalno kretanje alata	70 mm	NEMA 17
$A$	Rotacija	Nagib kolevke oko $X$ ose	$\pm 20^\circ$	NEMA 17
$C$	Rotacija	Rotacija radnog stola na kolevci oko lokalne ose	$360^\circ$	NEMA 17

Po definisanja kinematskog modela, analiza kretanja sistema nastavljena je u MATLAB softverskom okruženju. Za potrebe ispitivanja koordinisanog rada translacionih i obrtnih osa formirani su simulacioni ulazni podaci, kojima je opisana promena položaja pojedinačnih osa tokom vremena. Iz definisanih vremenskih promena položaja određene su brzine i ubrzanja osa, što je omogućilo analizu kontinuiteta kretanja, sinhronizacije osa i karaktera promene kinematskih parametara. Parametri kretanja usklađeni su sa geometrijskim i konstrukcionim ograničenjima modela, odnosno sa hodovima translacionih osa i dozvoljenim opsezima rotacije obrtnih osa.

Za translacione ose  $x$ ,  $y$  i  $z$  definisane su funkcije promene položaja u okviru raspoloživih hodova, dok su za rotacione ose  $A$  i  $C$  definisane ugaone promene položaja u skladu sa ograničenjima rotacije kolevke i radnog stola. Promena položaja pojedinačne ose tokom vremena može se opšte predstaviti vremenski zavisnom funkcijom [8]:

$$q_i = q_i(t) \quad (1)$$

gde je

$q_i(t)$  - položaj ili ugaoni položaj posmatrane ose u funkciji vremena.

U okviru simulacije, za pojedine ose korišćeni su sinusni i kosinusni profili kretanja, dok je za osu  $C$  primenjena linearna promena ugaonog položaja. Brzine i ubrzanja osa određivani su diferenciranjem funkcija položaja prema vremenu [8]:

$$v_i(t) = \frac{d q_i(t)}{dt} \quad (2)$$

$$a_i(t) = \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} \quad (3)$$

gde je

$v_i(t)$  - brzina ose,

$q_i(t)$  - položaj posmatrane ose,

$a_i(t)$  - ubrzanje ose,

$t$  - vremenski parametar simulacije.

Na osnovu realizovane simulacije omogućena je analiza međusobne koordinacije svih osa sistema, kao i procena kinematskog ponašanja petoosne mašine tokom simuliranog procesa obrade.

### 3. REZULTATI

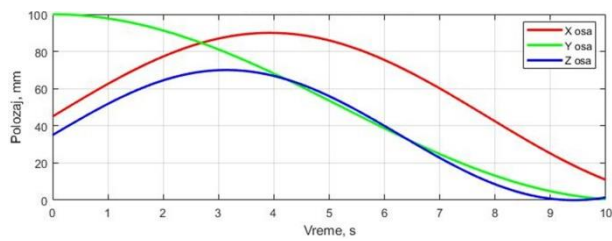
U rezultatima je prikazana promena kinematskih parametara petoosnog sistema tokom vremena simulacije od 10s. Analiza je obuhvatila translaciona kretanja osa  $x$ ,  $y$  i  $z$ , ugaone promene rotacionih osa  $A$  i  $C$ , brzine i ubrzanja translacionih osa, ugaone brzine i ugaonog ubrzanja rotacionih osa, kao i prikaz sinhronizovanog kretanja svih osa i 3D trajektorije referentne tačke alata. Na ovaj način je omogućena procena kontinuiteta kretanja, promene smera i međusobne vremenske usklađenosti osa tokom simuliranog procesa obrade.

Dijagram položaja translacionih osa (Sl.3a) pokazuje promenu položaja osa  $x$ ,  $y$  i  $z$  tokom vremena. Ose se kreću u okviru prethodno definisanih hodova, pri čemu  $x$  - osa ostvaruje pomeranje alata duž  $x$ -pravca (levo-desno/pozitivno-negativno),  $y$  - osa pomeranje radnog stola (napred-nazad/pozitivno-negativno), dok  $z$  - osa opisuje vertikalno kretanje glave mašine, odnosno alata (gore-dole/pozitivno-negativno). Sa dijagrama se može uočiti da  $x$  - osa polazi iz srednjeg položaja radnog hoda, zatim se pomera ka maksimalnoj vrednosti, nakon čega se postepeno vraća ka nižim vrednostima položaja.  $y$  - osa započinje kretanje iz krajnjeg položaja i tokom simulacije ima opadajući trend, što odgovara pomeranju radnog stola u negativnom smeru duž  $y$  pravca.  $z$  - osa takođe polazi iz srednjeg položaja, dostiže gornju vrednost hoda u prvoj polovini simulacije, a zatim se spušta ka nižim vrednostima. Ovakvi obrasci položaja pokazuju da translacione ose ne menjaju položaj istovremeno na isti način, već svaka osa ima sopstveni vremenski zakon kretanja, što omogućava formiranje prostorno promenljive putanje referentne tačke alata.

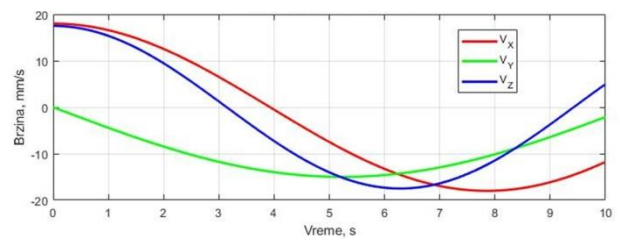
Na slici 3b prikazane su brzine translacionih osa  $x$ ,  $y$  i  $z$ , dobijene diferenciranjem funkcija položaja po vremenu. Tokovi brzina pokazuju promenu intenziteta i smera kretanja svake ose tokom simulacije. Brzine  $x$  i  $z$  osa najpre imaju pozitivne vrednosti, zatim se smanjuju i prelaze u negativno područje, što ukazuje na promenu smera njihovog kretanja. Brzina  $y$  - ose uglavnom zadržava negativan smer, što odgovara kontinuiranom smanjenju položaja ove ose u posmatranom vremenskom intervalu. Različiti obrasci brzina ukazuju na to da translacione ose ne ostvaruju jednoliko kretanje, već učestvuju u formiranju prostorno promenljive putanje kroz vremenski usklađene promene brzine.

Vremenski obrazac ubrzanja translacionih osa  $x$ ,  $y$  i  $z$  omogućava sagledavanje promene brzine pojedinačnih osa tokom simulacije (Sl.3c). Krive ubrzanja pokazuju da  $x$  i  $z$  osa imaju izraženije promene, pri čemu nakon negativnih vrednosti prelaze u pozitivno područje, što odgovara prelazu iz faze usporavanja u fazu ubrzanja. Ubrzanje  $y$  - ose menja se postepeno, sa blažim porastom tokom celog vremenskog intervala.

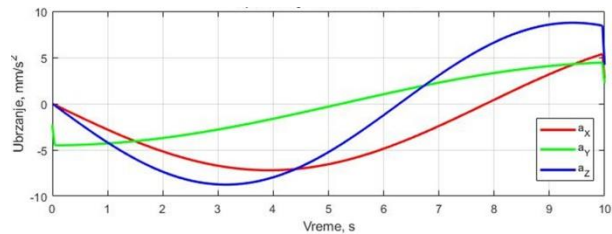
Ugaoni položaji rotacionih osa  $A$  i  $C$  dopunjuju analizu translacionih kretanja prikazom promene orijentacije obratka tokom simulacije (Sl. 3d). Osa  $A$  opisuje nagib kolevke oko  $x$  - ose, dok osa  $C$  predstavlja rotaciju radnog stola sa obratkom oko lokalne ose na kolevci. Sa dijagrama se uočava da se ugao  $A$  - ose menja po glatkom, periodičnom profilu, pri čemu kolevka ostvaruje kontrolisano zakretanje u okviru zadatog opsega. Nasuprot tome, ugaoni položaj  $C$  - ose ima linearan porast tokom celog vremenskog intervala, što odgovara ravnomernoj i kontinuiranoj rotaciji radnog stola.



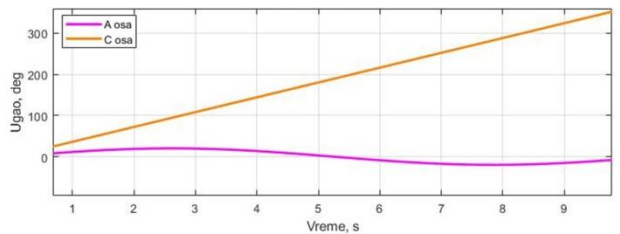
a)



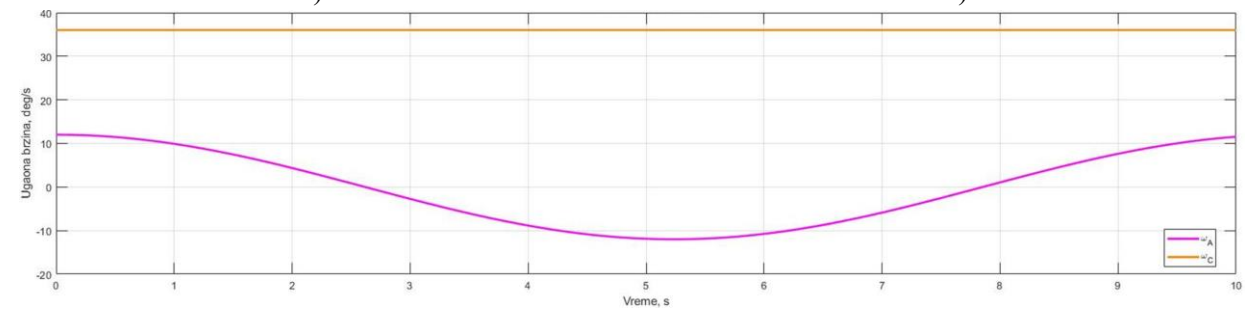
b)



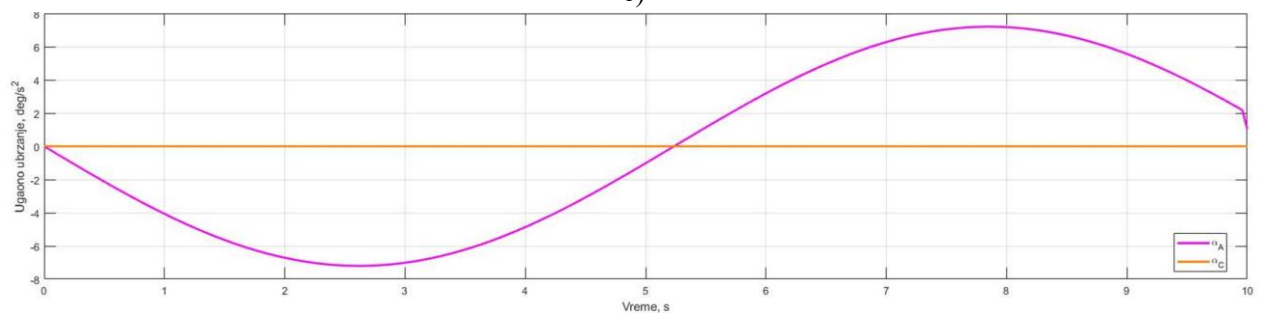
c)



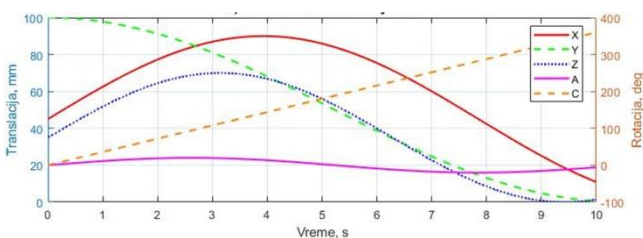
d)



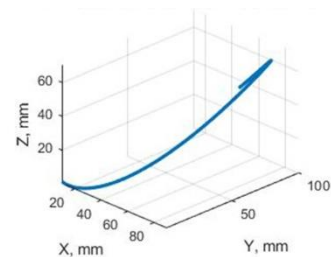
e)



f)



g)



h)

**Slika 3.** Analiza kretanja osa i trajektorije referentne tačke alata u MATLAB okruženju: a) Položaj translacionih osa, b) Brzina translacionih osa, c) Ubrzanje translacionih osa, d) Ugaoni položaj osa A i C, e) Ugaona brzina osa A i C, f) Ugaono ubrzanje osa A i C, g) Sinhronizovano kretanje svih osa i h) 3D trajektorija referentne tačke alata

Promena ugaonih brzina rotacionih osa A i C prikazana je na slici 3e i omogućava dodatno sagledavanje karaktera rotacionog kretanja sistema. Ugaona brzina A - ose menja se u skladu sa periodičnom promenom ugaonog položaja kolevke, što ukazuje na promenljivo zakretanje kolevke tokom simulacije. Nasuprot tome, ugaona brzina C - ose ima konstantnu vrednost, jer je rotacija radnog stola na kolevci definisana linearnom

promenom ugla u vremenu.

Ugaona ubrzanja rotacionih osa  $A$  i  $C$  prikazana su na slici 3f i omogućavaju analizu promene ugaonih brzina tokom simulacije. Kod  $A$  - ose uočava se promenljiv tok ugaonog ubrzanja, što je posledica periodične promene ugla nagiba kolevke. Ubrzanje  $A$  - ose pokazuje intervale u kojima dolazi do povećanja ili smanjenja ugaone brzine kolevke. Nasuprot tome, ugaono ubrzanje  $C$  - ose ima vrednost jednaku nuli, odnosno približno nuli usled numeričkog diferenciranja, jer je za  $C$  - osu definisana linearna promena ugaonog položaja.

Sinhronizovano kretanje svih osa sistema prikazano je na slici 3g, gde su objedinjene vremenske promene translacionih osa  $x$ ,  $y$  i  $z$  i rotacionih osa  $A$  i  $C$ . Ovaj prikaz omogućava sagledavanje međusobne vremenske usklađenosti osa tokom simulacije, odnosno pokazuje kako se translatorna i obrtna kretanja odvijaju u istom vremenskom intervalu. Sa dijagrama se uočava da  $x$ ,  $y$  i  $z$  ose imaju različite profile promene položaja, dok se  $A$  - osa menja periodično u okviru ograničenog opsega, a  $C$  - osa ostvaruje kontinualan porast ugaonog položaja.

Prostorna trajektorija referentne tačke alata (Sl.3h) predstavlja rezultat kombinovanja translacionih pomeranja osa  $x$ ,  $y$  i  $z$  tokom simulacije. Prikazana kriva omogućava vizuelnu analizu putanje referentne tačke u radnom prostoru mašine i pokazuje da se kretanje odvija kroz istovremenu promenu položaja u sva tri koordinatna pravca. Oblik trajektorije posledica je različito definisanih vremenskih profila translacionih osa, odnosno njihovih međusobnih faznih pomeraja i amplituda. Rotacione ose  $A$  i  $C$  nisu direktno uključene u formiranje prikazane prostorne krive.

#### 4. DISKUSIJA I ZAKLJUČAK

Rezultati dobijeni simulacijom ukazuju na funkcionalnost definisanog kinematskog modela i mogućnost koordinisane analize translacionih i rotacionih osa petoosne CNC mašine. Analizom promena položaja translacionih osa  $x$ ,  $y$  i  $z$ , kao i ugaonih promena rotacionih osa  $A$  i  $C$ , sagledano je ponašanje sistema tokom simulacionog intervala od 10 s. Dobijeni dijagrami pokazuju da se kretanje osa odvija u okviru definisanih hodova i opsega rotacije, bez izraženih diskontinuiteta u promeni položaja, brzine i ubrzanja, što ukazuje na kontinualan karakter zadatih kinematskih profila.

Poseban značaj u sprovedenoj analizi imaju dijagrami brzina i ubrzanja, jer omogućavaju detaljnije sagledavanje karaktera kretanja pojedinačnih osa. Kod translacionih osa uočavaju se promene intenziteta i smera kretanja, dok obrasci ubrzanja ukazuju na intervale ubrzavanja i usporavanja tokom simulacije. Kontinualan oblik krivih pokazuje da zadati profili kretanja ne uvode nagle promene kinematskih veličina, što je značajno za stabilnost upravljanja i dalje unapređenje trajektorija kretanja [7,8]. Iako u ovom radu nisu analizirani dinamički efekti, sile, deformacije niti vibracije, dobijeni profili predstavljaju dobru osnovu za buduća istraživanja dinamičkog ponašanja sistema. U literaturi se ističe da modalne karakteristike i vibracije imaju značajan uticaj na stabilnost rada mašina alatki, naročito pri većim brzinama i složenim obradnim operacijama [1,5,9].

Rezultati ovog istraživanja mogu se posmatrati i u kontekstu savremenih pristupa razvoju virtuelnih mašina alatki, kod kojih se geometrijski i kinematski modeli koriste za proveru funkcionalnosti sistema pre fizičke realizacije. Shinde S. M. et al. navode da razvoj virtuelne petoosne mašine omogućava analizu kinematskog lanca i identifikaciju mogućih problema u ranoj fazi razvoja, posebno kod složenih višeosnih konfiguracija [4]. Takođe, Dang N.H. ističe značaj 3D modelovanja i integracije upravljačkog sistema u procesu projektovanja petoosnih CNC mašina [3]. U tom smislu, razvijeni model u ovom radu predstavlja početnu fazu razvoja sistema, jer omogućava proveru koordinacije osa, kinematskog ponašanja i prostorne trajektorije referentne tačke alata pre potencijalne fizičke realizacije mašine.

Koordinacija translacionih i rotacionih osa ima poseban značaj kod petoosnih obradnih sistema jer nagle promene položaja i orijentacije mogu dovesti do povećanja dinamičkih opterećenja, smanjenja stabilnosti kretanja i pojave odstupanja tokom procesa obrade [1,9]. U sprovedenoj simulaciji ovo je analizirano kroz istovremeno praćenje translacionih osa  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  i rotacionih osa  $A$  i  $C$ . Translacione ose su definisale prostornu promenu položaja referentne tačke alata, dok su rotacione ose opisale promenu orijentacije obratka preko nagiba kolevke i rotacije radnog stola. Osa  $A$  ostvaruje promenljivi nagib kolevke, što se vidi kroz promenljiv ugaoni položaj, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje. Nasuprot tome, osa  $C$  ostvaruje ravnomernu rotaciju radnog stola oko lokalne ose kolevke, što je prikazano linearnim porastom ugaonog položaja, konstantnom ugaonom brzinom i približno nultim ugaonim ubrzanjem. Ovakvi rezultati pokazuju da translaciona i rotaciona kretanja u modelu imaju različite vremenske zakone, ali se odvijaju u istom simulacionom intervalu.

Trodimenzionalna trajektorija referentne tačke alata dobijena je na osnovu translacionih pomeranja osa  $x$ ,  $y$  i  $z$  i pokazuje kontinualnu promenu položaja u radnom prostoru mašine, bez naglih promena pravca kretanja [5].

Na osnovu sprovedene analize može se zaključiti da razvijeni model petoosne CNC mašine omogućava sistematično sagledavanje kinematskog ponašanja translacionih i rotacionih osa tokom simuliranog rada sistema. Primenjena metodologija, koja obuhvata razvoj CAD modela, formiranje kinematskog modela i MATLAB analizu kretanja, predstavlja osnovu za dalju nadogradnju modela, optimizaciju kinematskih parametara i potencijalnu fizičku realizaciju razvijene konfiguracije mašine.

Dalja istraživanja su usmerena ka razvoju naprednijeg sistema upravljanja osama, uključivanju dinamičkih efekata i analizi uticaja realnih radnih uslova na ponašanje petoosne CNC mašine. Posebna pažnja biće posvećena eksperimentalnoj validaciji simulacionih rezultata, kao i ispitivanju uticaja opterećenja, vibracija i mogućih odstupanja tokom rada sistema [8]

## 5. ZAHVALNOST

Ovaj rad realizovan je uz podršku kompanije ZASTAVA TERVO doo, koja je omogućila razvoj konceptualnog modela petoosne CNC mašine i finansijski podržala objavljivanje rezultata istraživanja.

## 6. LITERATURA

- [1] Xu J., Zhang D., Sun Y.: *Kinematics performance oriented smoothing method to plan tool orientations for 5-axis ball-end CNC machining*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol 157-158, 2019, pp. 293-303.
- [2] Petko M., Gac K., Góra G., Karpziel G., Ochoński J., Kobus K.: *CNC system of the 5-axis hybrid robot for milling*, Mechatronics, Vol 37, 2016, pp. 89-99.
- [3] Dang N.: *Study on the design and manufacturing for the five-axis CNC machine*, VNUHCM Journal of Engineering and Technology, Vol 8, No 4, 2025, pp. 2689-2693.
- [4] Shinde S.M., Lekurwale R.R., Bhole K.S., Oza A.D., Patil A.S., Ramesh R.: *5-axis virtual machine tool centre building in PLM environment*, International Journal on Interactive Design and Manufacturing, 2022, DOI: 0.1007/s12008-022-00974-2.
- [5] Rupavani V., Rao A.B., Rao V.V.S.: *Experimental Investigations on a Parallel Kinematic Machine Tool and Validation Through Statistical Regression*, 10 Dec 2025, PREPRINT (Version 1) dostupno na Research Square, <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-7450672/v1>, [pristup: april 2026].
- [6] Liu Y.: *Simulation of motion error compensation of CNC with multi-axis linkage*, Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering, Vol 24, 2024, pp. 311-325.
- [7] Huang X., Zhao F., Tao T., Mei X.: *A Novel Local Smoothing Method for Five-Axis Machining With Time-Synchronization Feedrate Scheduling*, IEEE Access, Vol 8, 2020, pp. 89185.
- [8] Ariano A., Perna V., Senatore A., Scatigno R., Nicolò F., Fazioli F., Avallone G., Pesce S., Gagliano A.: *Simulation and Experimental Validation of Novel Trajectory Planning Strategy to Reduce Vibrations and Improve Productivity of Robotic Manipulator*, Electronics, Vol 9, No 4, 2020, pp. 581.
- [9] Ma J.W., Hu G.-Q., Qin F., Li G.-L.: *Global tool axis vector optimization based on the minimum angular acceleration of rotary axes*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol 105, No 5-6, 2024, pp. 1-16.

Bošković, J., Ivković, M., Pantić, M., Grujić, I., Živković, B., Petrović Savić, S., Erić, M.

## MODELING AND KINEMATIC ANALYSIS OF A FIVE-AXIS MILLING MACHINE

**Abstract:** Modern multi-axis machine tools require a detailed analysis of kinematic characteristics in order to verify the functionality of design solutions and optimize operational performance. This paper presents the design model of a five-axis milling machine and the simulation of its motion in a digital environment. Based on the developed design model, a kinematic model of the machine was created using the CATIA V5 R21 software package. The simulation provided data on the velocities and positions of individual machine axes. The obtained kinematic data were further processed in the MATLAB environment in order to analyze motion trajectories and kinematic characteristics of the system. The results provide a deeper insight into the kinematic behavior of the machine and represent a basis for improving the design and optimizing the performance of multi-axis machine tools.

**Key words:** five-axis milling machine, kinematic simulation, CATIA V5 R21, MATLAB, multi-axis machine tools

ISBN 978-86-6060-250-5



9 788660 602505