

Продановић, С.¹⁾, Дубоњић, Љ.²⁾, Rajaraman, J.³⁾**УПРАВЉАЊЕ НИВОА У РЕЗЕРВОАРУ ПОМОЋУ ПИД РЕГУЛАТОРА
РАЗЛОМЉЕНОГ РЕДА⁴⁾***Резиме*

Резиме: Управљање нивоа течности у проточном резервоару веома је чест задатак у производним системима. Бројни су примјери гдје је неопходно ниво одржавати на задатој вриједности цијелим током функционисања система, као на примјер: у систему за централно хлађење СХП средства, за галванизацију, машинама за прање дијелова и сл. Пропорционално-интегрално-диференцијални (ПИД) регулатори и њихове краће изведбе и у овом случају дају добре резултате. У циљу даљег унапређења у овом раду су истражене могућности примјене ПИД регулатора разломљеног реда. Истраживање је реализовано помоћу симулација на математичким моделима резервоара као процеса са два улаза и два излаза, који су се показали репрезентативни у претходним радовима из литературе.

Кључне речи: управљање нивоа, ПИД регулатор разломљеног реда

1. УВОД

Производно машинство као широка област садржи огроман број различитих објеката управљања. Технолошки напредак допринијео је повећању степена аутоматизације, као и учешћа аутоматизованих система у производним погонима. У истраживању које је представљено у овом раду у фокусу су били системи аутоматског управљања нивоа у проточном резервоару, јер се они често сусрећу у системима за централно хлађење СХП средства, за галванизацију, машинама за прање дијелова и другим системима у индустрији. Поменути резервоари често се представљају њиховим математичким моделима са два улаза и два излаза, дакле као вишеструко преносни (мултиваријабилни) системи [1-3]. Управљање овим системима успјешно се врши када се узме у обзир међусобно спрежање између различитих улазних и излазних величина, тј. када се та интеракција компензује помоћу распрегивача и један мултиваријабилни систем представи као скуп више једнострукопреносних система [4]. Постоји више врста распрегивача попут директног, инверзног, статичког и сличних, који дају добре резултате код различитих објеката управљања. Истраживани су интензивно у претходних неколико деценија, описани су у многим радовима, и могу се сажето представити са сљедећим референцама [5-7]. Квалитетно управљање се постиже примјеном пропорционално-интегрално-диференцијалних (ПИД) регулатора као генерално најчешће коришћених регулатора у индустрији. Поред огромног броја референци на тему пројектовања ПИД регулатора веома обухватан преглед њихових врста и метода подешавања и самоподешавања је дат у [8]. Евидентно је да не постоји једна универзална метода помоћу које се гарантовано добијају одзиви система задовољавајућих карактеристика. Умјесто тога системи који су слични по природи (с обзиром на ред преносне функције, са или без кашњења и сл.) успјешно се управљају одговарајућом комбинацијом распрегивача и ПИД регулатора [9-12].

Циљ овог истраживања је испитати мултиваријабилне системе управљања нивоа у проточном резервоару коришћењем ПИД регулатора разломљеног реда, који су претходно распрегнути. Ову врсту

¹⁾ проф. др Саша Продановић, Универзитет у Источном Сарајеву, Машински факултет, (sasa.prodanovic@ues.rs.ba)

²⁾ проф. др Љубиша Дубоњић, Универзитет у Крагујевцу, Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву, (dubonjic.lj@mfkv.kg.ac.rs)

³⁾ доц. др Janani Rajaraman, Sri Chandrasekharendra Saraswathi Viswa Mahavidyalaya University, Department of Mechanical Engineering, (janani.rajaraman@kanchiuniv.ac.in)

⁴⁾ У оквиру овог рада саопштавају се резултати истраживања која се спроводе на пројекту број уговора. 451-03-34/2026-03/200108, који финансијски подржава Министарство науке, технолошког развоја и иновација Републике Србије

регулятора представио је Подлубни [13], а након тога њихова примјена значајно је проширена на широк спектар објеката управљања [14-18]. Њихова ефикасност у односу на ПИД регулаторе цјелобројног реда за системе управљања нивоа приказана је на два примјера из литературе.

Рад је подијељен у сљедећа поглавља. Након овог уводног дијела, у поглављу 2. укратко је наведена методологија пројектовања ПИД регулятора разломљеног реда. У поглављу 3. представљено је мјесто децентрализованог ПИД регулятора у оквиру структуре централизованог управљања помоћу распрезивача. Поглавље 4. садржи резултате симулација на тестираним математичким моделима резервоара као процеса са два улаза и два излаза. Закључци су дати у поглављу 5.

2. ПИД РЕГУЛАТОРИ РАЗЛОМЉЕНОГ РЕДА – МЕТОДОЛОГИЈА ПРОЈЕКТОВАЊА

Идеја за примјену ПИД регулятора разломљеног реда логично је слиједила из њихове математичке интерпретације, када је уочено да осим пропорционалног K_p , интегралног K_i и диференцијалног K_d појачања, додатну флексибилност и слободу у подешавању могу дати разломљени експоненти комплексне промјенљиве s , а то су λ и μ . Преносна функција овог типа регулятора дата је једначином (1) [13].

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (1)$$

Диференцијатор разломљеног реда може се означити општим фундаменталним оператором $a^{D_t^q}$ као генерализација диференцијалних и интегралних оператора, што је дефинисано у (2):

$$a^{D_t^q} = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q}, & R(q) > 0 \\ 1, & R(q) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-q}, & R(q) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

гдје је a константа која зависи од почетних услова, q разломљени ред.

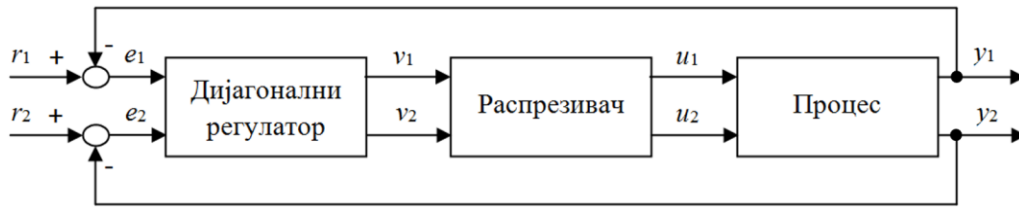
Постоји више критеријума за оцјену квалитета одзива система чија се минимизација може користити при подешавању параметара ПИД регулятора, па тако и ових разломљеног реда. Неки од њих су: интеграл квадрата грешке - *ISE* (*Integral of Squared Error*), интеграл апсолутне грешке - *IAE* (*Integral of Absolute Error*), временски пондерисан интеграл квадрата грешке - *ITSE* (*Integral of Time-weighted Squared Error*) и временски пондерисан интеграл апсолутне грешке - *ITAE* (*Integral of Time-weighted Absolute Error*). *ITAE* показатељ је коришћен у овом раду за подешавање у оквиру Матлабовог алата и дат је изразом (3):

$$ITAE = \int_0^\infty t |e(t)| dt = \int_0^\infty t |r(t) - y(t)| dt \quad (3)$$

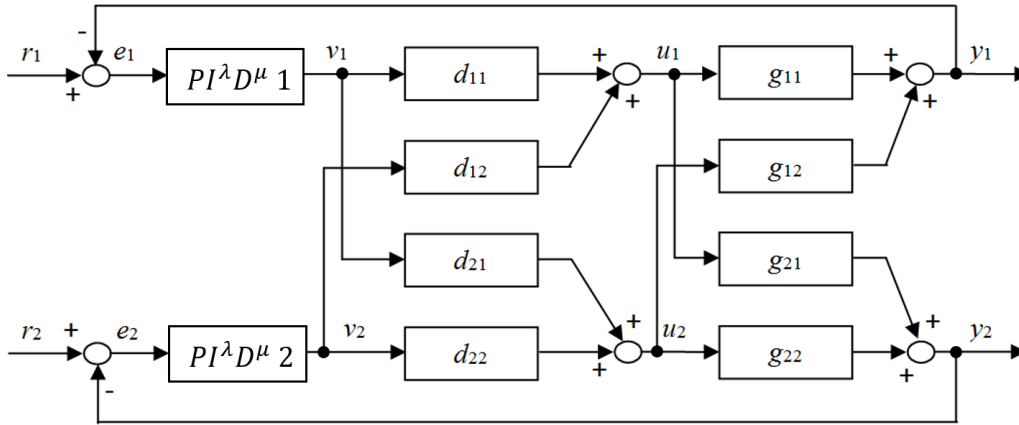
гдје су: $e(t)$ - грешка управљане величине, $r(t)$ - референтна (задата) вриједност, $y(t)$ - излазна (управљана) величина, t - вријеме (независна промјенљива).

3. ЦЕНТРАЛИЗОВАНА СТРАТЕГИЈА УПРАВЉАЊА

Ова стратегија управљања у општем случају састоји се од распрезивача и децентрализованог ПИД регулятора (слика 1.) [5], с тим што је у овом истраживању примијењен ПИД регулатор разломљеног реда, као што је приказано на слици 2 [10]. На поменутих сликама значење ознака је сљедеће: r_1 и r_2 референтне (задате) вриједности, e_1 и e_2 грешке управљаних величина, v_1 и v_2 управљачке величине, u_1 и u_2 манипулативне величине и y_1 и y_2 излазне (управљане) величине, тј. (одзиви) система.



Слика 1. Распрезивач и децентрализовани (дијагонални) регулатор [5]



Слика 2. Централизовано управљање помоћу распрезивача и децентрализованог ПИД регулатора разломљеног реда [10]

Као што је познато, распрезање је успјешно извршено ако је производ $G(s)D(s)$ дијагонална матрица [5]. Ако је преносна матрица процеса дата са једначином (4):

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4)$$

и ако је примијењен поједностављени директни распрезивач (5):

$$D(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{-g_{21}}{g_{22}} & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

тада дијагонална матрица $Q(s)$ гласи (6):

$$Q(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d_{12}(s) \\ d_{21}(s) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) - \frac{g_{21}(s)g_{12}(s)}{g_{22}(s)} & 0 \\ 0 & g_{22}(s) - \frac{g_{21}(s)g_{12}(s)}{g_{11}(s)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

На овај начин вишеструкопреносни систем са 2 улаза и 2 излаза разложен је на два једнострукопреносна система чије су преносне функције $q_1(s)$ и $q_2(s)$ (7).

$$q_1(s) = g_{11}(s) - \frac{g_{21}(s)g_{12}(s)}{g_{22}(s)} \quad q_2(s) = g_{22}(s) - \frac{g_{21}(s)g_{12}(s)}{g_{11}(s)} \quad (7)$$

Након тога ПИД регулатори разломљеног реда пројектују се посебно за ова два једнострукопреносна

система $q_1(s)$ и $q_2(s)$.

4. СИМУЛАЦИОНИ ТЕСТОВИ

Ефекти примјене ПИД регулатора разломљеног реда у оквиру стратегије управљања приказане у претходном поглављу истражени су путем симулација на два математичка модела резервоара, који су представљени као процеси са 2 улаза и 2 излаза. У оба примјера најмање једна излазна величина је ниво течности у резервоару.

4.1 Примјер 1.

У овом примјеру анализира се проточни резервоар у који се вода доводи преко два одвојена улазна вода различитих температура. Ниво h и температура t представљају излазне величине. Њихове задате вриједности су 1m и 30°, респективно. Протоци у улазним цјевоводима представљају управљачке (манипулативне) величине. Промјена протока кроз било који вентил на улазном воду истовремено утиче на ниво и температуру течности у резервоару. Циљ процеса је мијешање воде из два различита извора како би се на излазу обезбиједила вода жељене температуре и константног протока. Регулација нивоа неопходна је ради обезбјеђивања довољне количине течности за ефикасно мијешање. Математички модел овог резервоара слиједи (8) [1]:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,01}{63s+1} & \frac{0,01}{63s+1} \\ \frac{-0,15}{10s+1}e^{-3s} & \frac{0,4}{10s+1}e^{-2s} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Након примјене распрезивача (9) [19] пројектованог на основу (5):

$$D(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0,375 \cdot e^{-s} & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

добива се дијагонална матрица $Q(s)$ чији су чланови дати изразима (10) након претходне апроксимације експоненцијалних чланова.

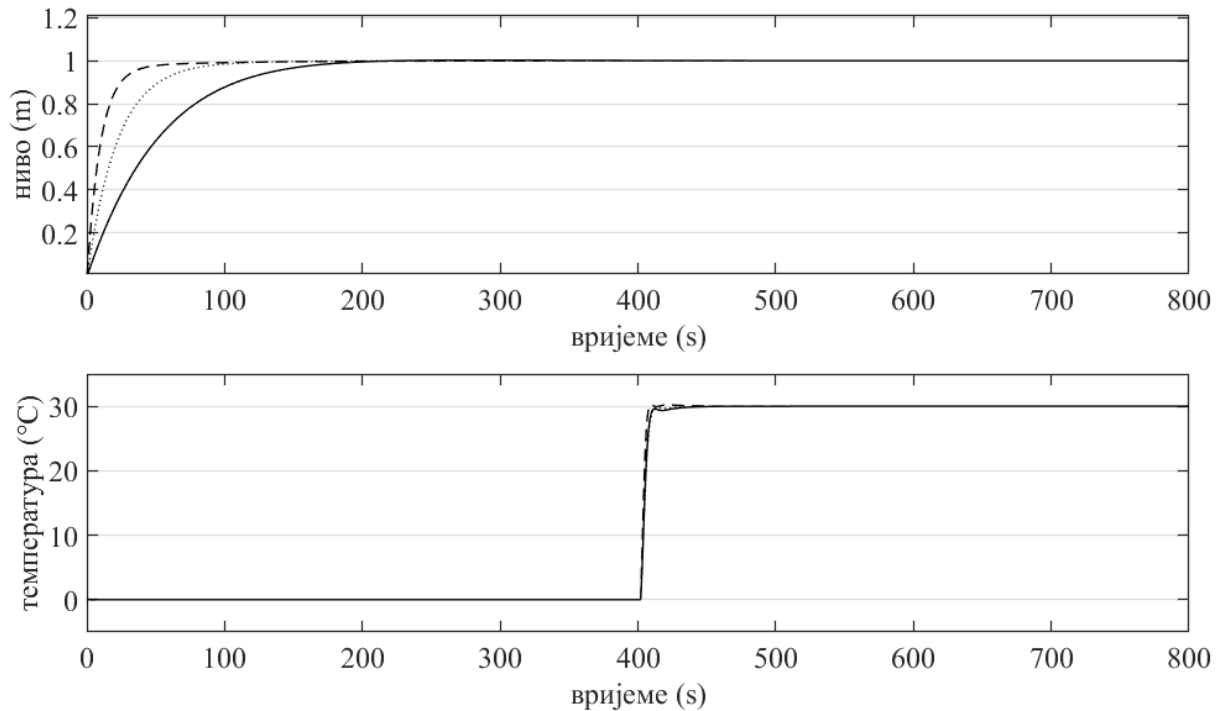
$$q_1(s) = \frac{16.5s+15}{80(63s+1)(1+\frac{s}{2})} \quad (10)$$

$$q_2(s) = \frac{-14175s^3+10170s^2+9615s+150}{(10s+1)(1+s)(63s+1)(20+30s)}$$

Параметри регулатора $PI^\lambda D^\mu$ 1 подешени су користећи Матлабов алат на основу преносне функције $q_1(s)$, а регулатора $PI^\lambda D^\mu$ 2 на основу преносне функције $q_2(s)$. При подешавању је коришћен *Nelder–Mead* нумерички оптимизациони алгоритам, а као критеријум перформансе примијењен је *ITAE* показатељ квалитета одзива. Минималне вриједности претека појачања и претека фазе су узете да буду 10dB и 60°, респективно. За свих пет параметара регулатора постављени су одговарајући дијапазони у оквиру којих се очекује вриједност датог параметра водећи се претходним вриједностима, које су добијене пројектовањем регулатора цјелобројног реда. Осим овако добијених параметара, у табели 1. приказани су параметри ПИД регулатора са цјелобројним експонентима преузети из литературе [20] пројектовани методом из [21], као и параметри добијени помоћу Матлабовог алата.

Табела 1. Параметри регулатора за процес из примјера 1.			
	Матлабов алат цјелобројни ред	Литература [20]	Матлабов алат разломљени ред
Регулатор 1	$K_p=6,85$; $K_i=0,104$	$K_p=2,875$; $K_i=0,05096$	$K_p=14,99$; $K_i=0,2$; $\lambda=1$; $K_d=0,103$; $\mu=0,756$
Регулатор 2	$K_p=0,118$; $K_i=0,011$	$K_p=0,125$; $K_i=0,01096$	$K_p=0,14$; $K_i=0,015$; $\lambda=1$; $K_d=0,05$; $\mu=0,6$

Након извршених симулација функционисања система управљања, одзиви су дати на слици 3. на истом графику за сва три случаја, с тим што су референтне величине другог управљачког круга уведене са кашњењем од 400 секунди како би ефикасност распрезања била уочљивија.



Слика 3. Одзиви процеса за три различита регулатора (примјер 1.): Матлабов алат цјелобројни ред, _____ Литература [20], --- Матлабов алат разломљени ред

На графицима на слици 3. јасно се уочава бољи квалитет одзива када је регулатор пројектован помоћу Матлабовог алата цјелобројног реда, а најбољи су одзиви када је извршено подешавање регулатора разломљеног реда, јер се добијају бржи одзиви са краћим временом смирења и са занемарљивим прескоком или без њега. Побољшање је више изражено код нивоа, тј. код првог излаза. Такође је важно напоменути да је распрезање перфектно.

4.2 Примјер 2.

Два спрегнута проточна резервоара тестирана су у овом примјеру. Циљ је управљати нивоима у њима, чије су задате вриједности у овом случају изражене у процентима и износе 40%. Управљачка (манипулативна) величина је проток кроз вентил који се налази на воду између ова два резервоара. Математички модел поменутих спрегнутих резервоара је дат у (11) [2].

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,43}{29s+1} e^{-5s} & \frac{0,145}{40s+1} e^{-10s} \\ \frac{0,172}{35s+1} e^{-10s} & \frac{0,37}{27s+1} e^{-5s} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Након примјене распрезивача (12) [2], који није поједностављен:

$$D(s) = \begin{bmatrix} \frac{2,55}{27s+1} & \frac{-1}{40s+1} e^{-5s} \\ \frac{-1}{35s+1} e^{-5s} & \frac{2,5}{29s+1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

добија се дијагонална матрица $Q(s)$, чији су чланови дати изразима (13) након претходне апроксимације

експоненцијалних чланова.

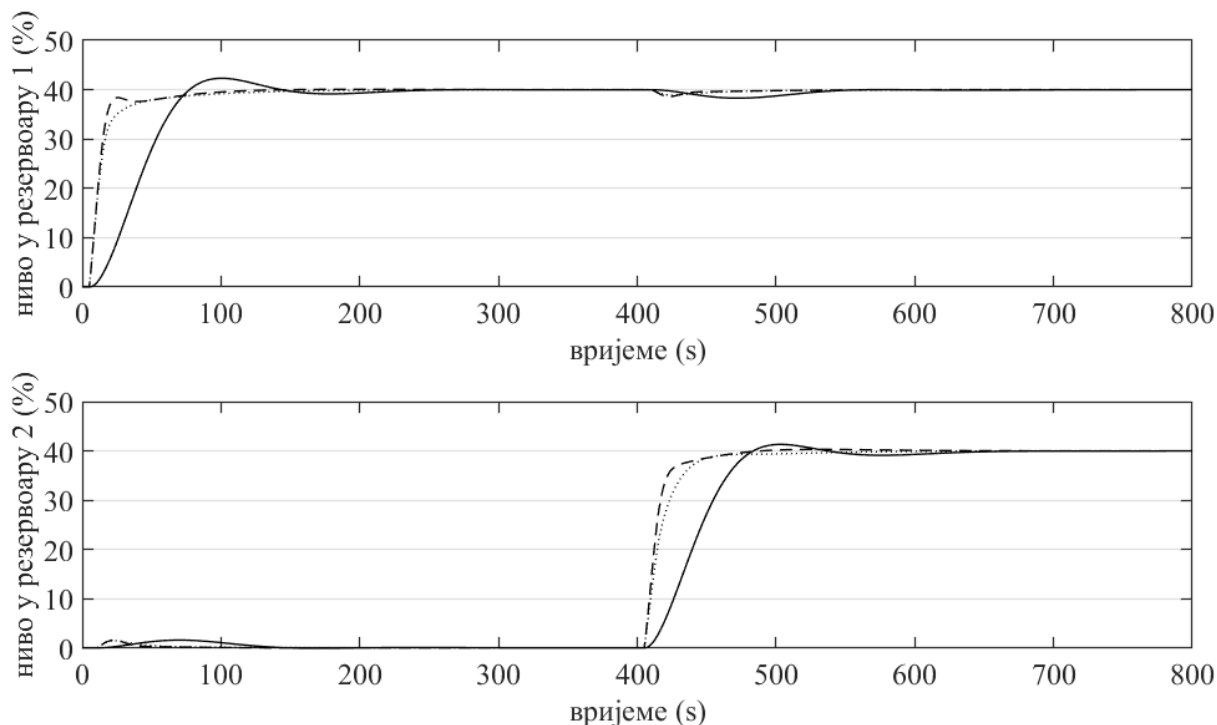
$$q_1(s) = \frac{1,0965}{(27s+1)(29s+1)(5s+1)} - \frac{0,172}{(35s+1)(40s+1)(15s+1)}$$

$$q_2(s) = \frac{0,925}{(27s+1)(29s+1)(5s+1)} - \frac{0,145}{(35s+1)(40s+1)(15s+1)}$$
(13)

Параметри оба $PI^\lambda D^\mu$ регулатора подешени су користећи Матлабов алат на основу одговарајуће преносне функције $q_1(s)$ и $q_2(s)$. Примијењени су алгоритми, критеријуми и ограничења по питању претека стабилности исти као и у претходном примјеру. За сва три типа регулатора параметри су дати у табели 2.

Табела 2. Параметри регулатора за процес из примјера 2.			
	Матлабов алат цјелобројни ред	Литература [2]	Матлабов алат разломљени ред
Регулатор 1	$K_p=3,7678$ $K_i=0,0584$ $K_d=55,7204$	$K_p=1,1508$ $K_i=0,0267$ $K_d=11,68$	$K_p=3,7976$; $K_i=0,07$; $\lambda=1$; $K_d=49,7707$; $\mu=0,0899$
Регулатор 2	$K_p=3,7432$ $K_i=0,0658$ $K_d=45,7287$	$K_p=1,3641$ $K_i=0,0316$ $K_d=13,84$	$K_p=3,9783$; $K_i=0,0899$; $\lambda=1$; $K_d=50,9149$; $\mu=0,8929$

Одзиви система добијени симулацијама дати су на слици 4 на истом графику за сва три случаја. Као и у примјеру 1. референтне величине другог управљачког круга уведене су са кашњењем од 400 секунди да би ефикасност распрезања била уочљивија.



Слика 4. Одзиви процеса за три различита регулатора (примјер 2.): Матлабов алат цјелобројни ред, _____ Литература [2], _ _ _ Матлабов алат разломљени ред

И у овом примјеру регулатор разломљеног реда обезбјеђује најбрже одзиве у поређењу са преостала два регулатора. Краће вријеме смирења и изостанак прескока такође су евидентни. Остварено је задовољавајуће распрезање. Значајна побољшања квалитета одзива видљива су код оба излаза.

5. ЗАКЉУЧАК

Супериорност ПИД регулатора разломљеног реда илустрована је на управљању нивоа у проточном резервоару, који је веома чест објекат управљања у производном машинству. Потврђена је полазна идеја, која је довела до њихове примјене, а то је да се са повећањем броја параметара регулатора на 5 обезбјеђује већа могућност манипулације при дефинисању динамичког понашања система. На тестирана два система са двије улазне и двије излазне величине са кашњењем, са нагласком на повећање брзине одзива, остварено је квалитетније управљање у поређењу са ПИ и ПИД регулаторима цјелобројног реда (експонента). Прецизно подешавање према изабраним критеријумима и ограничењима извршено је дефинисањем дијапазона за сваки од 5 параметара регулатора, у оквиру којих се добијају вриједности тих параметара. Овај приступ може водити ка повећању обима употребе ПИД регулатора разломљеног реда, јер се регулатори цјелобројног експонента могу надограђивати у циљу поштовања одређених ограничења за вриједности показатеља квалитета прелазног процеса система.

Даља истраживања могу ићи у правцу тестирања примјене регулатора разломљеног реда код мултиваријабилних система високог реда.

6. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Prodanović S. Lj., Nedić N. N., Brašić V. S.: *Some Considerations of Mutual Coupling in Multivariable Processes*, Proceedings of the XII International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, Niš 2014.
- [2] Hajare V. D., Patre B. M., Khandekar A. A., Malwatkar G. M.: *Decentralized PID controller design for TITO processes with experimental validation*, Int. J. Dynam. Control, Vol 5, 2017, pp. 583-595.
- [3] Dasgupta S., Sadhu S., Ghoshal T. K.: *Internal Model Control based controller design for a Stirred Water Tank*, Proceedings of the 2010 Annual IEEE India Conference: Green Energy, Computing and Communication, 2010.
- [4] Skogestad S., Postlethwaite I.: *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, 2nd ed. John Wiley & Sons, Chichester, 2005.
- [5] Morilla F., Garrido J., Vázquez F.: *Multivariable decoupling control*, Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial, Vol 10, 2013, pp. 3-17.
- [6] Garrido J., Vázquez F., Morilla F., Hägglund T.: *Practical advantages of inverted decoupling*, Journal of Systems and Control Engineering, Vol 225, 2010, pp. 977-992.
- [7] Prodanović S., Košarac A.: *A Comparative Analysis of Direct and Inverted Decoupling for TITO Process*, Proceedings of the V International Conference Industrial Engineering and Environmental Protection (IIZS 2015), Zrenjanin 2015, pp. 223-227.
- [8] Филиповић В. Ж., Недић Н. Н.: ПИД регулатори, Универзитет у Крагујевцу, Машински факултет Краљево, Краљево, 2008.
- [9] Vázquez F., Morilla F.: *Tuning decentralized PID controllers for MIMO systems with decouplers*, Proceedings of the 15th Triennial IFAC World Congress, Barcelona 2002, pp. 2172-2178.
- [10] Morilla F., Vázquez F., Garrido J.: *Centralized PID control by decoupling for TITO processes*, Proceedings of the 13th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation, Hamburg 2008, pp. 1318-1325.
- [11] Prodanović S., Nedić N.: *Analysis of Possibilities for the Static Decoupling Control Application in TITO Systems*, Proceedings of the 3rd International Scientific Conference on Mechanical Engineering Technologies and Applications – COMETA 2016, East Sarajevo-Jahorina 2016, pp. 81-86.
- [12] Prodanović S., Nedić N., Dubonjić Lj.: *On the Diversities of Multivariable Control Systems*, Proceedings of the 4th International Scientific Conference on Mechanical Engineering Technologies and Applications – COMETA 2018, East Sarajevo-Jahorina 2018, pp. 312-319.
- [13] Podlubny I.: *Fractional-Order Systems and PI^λ D^μ Controllers*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol 44, No 1, 1999, pp. 208-214.
- [14] Edet E., Katebi R.: *On Fractional-order PID Controllers*, IFAC PapersOnLine, Vol 51, No 4, 2018, pp. 739-744.
- [15] Shah P., Agashe S.: *Review of fractional PID controller*, Mechatronics, Vol 38, 2016, pp. 29-41.

- [16] Sabura B. U., Lakshmanaprabu S. K.: *Multivariable Centralized Fractional Order PID Controller tuned using Harmony search Algorithm for Two Interacting Conical Tank Process*, Proceedings of the SAI Intelligent Systems Conference, London 2015, pp. 320-327.
- [17] Nourelhouda F., Abdelmadjid K.: *The impact of fractional order control on multivariable systems*, Algerian journal of signals and systems (AJSS), Vol 7, No 1, 2022, pp. 7-12.
- [18] Rajaraman J., Prodanović S., Dubonjić, Lj.: *Design of Fractional - order PI Controller for Multivariable Process*, Proceedings of the 6th International Scientific Conference on Mechanical Engineering Technologies and Applications – COMETA 2022, East Sarajevo-Jahorina 2022, pp. 322-327.
- [19] Продановић С.: *Пројектовање ПИД регулатора за мултиваријабилне процесе*, Универзитет у Крагујевцу, Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву, 2016.
- [20] Prodanović S., Dubonjić Lj., Rajaraman J.: *Iterative Decoupler Design Method for TITO Processes*, Technical Gazette, Vol 33, No 2, 2026, pp. 742-751.
- [21] Dubonjić LJ., Nedić N., Filipović V., Pršić N.: *Design of PI controllers for hydraulic control systems*, Mathematical Problems in Engineering, 2013, pp. 1-10.

Prodanović, S., Dubonjić, Lj., Rajaraman, J.

LEVEL CONTROL IN A TANK USING A FRACTIONAL-ORDER PID CONTROLLER

Abstract: Liquid level control in a flow tank is a very common task in manufacturing systems. There are numerous examples where it is necessary to maintain the level at a specified value during the entire system operation, such as in central cooling systems, electroplating processes, parts washing machines, and similar applications. Proportional–Integral–Derivative (PID) controllers and their shorter forms provide satisfactory performance in such cases. In order to further improve control performance, this paper investigates the possibilities of applying fractional-order PID (FOPID) controllers. The study is carried out through simulations based on mathematical models of the tank system represented as a two-input two-output process, which has been shown to be representative in previous studies reported in the literature.

Key words: level control, FOPID